

تحلیل پایداری ناخطی قاب‌های فولادی ساده نامنشوری با تکیه‌گاه‌های کشسان و پیوند نیمه‌سخت

محسن بمبائی چی^{۱*}، قاسم پاسبان^۲

۱- استادیار، دانشکده فنی و مهندسی، گروه مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی قوچان، قوچان، ایران

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد سازه، دانشکده فنی و مهندسی، گروه مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی قوچان، قوچان، ایران

چکیده

در این مقاله به تحلیل پایداری خطی و ناخطی یک قاب فولادی ساده دو عضوی با پیوند نیمه‌سخت و تکیه‌گاه‌های کشسان دورانی و انتقالی پرداخته می‌شود. تیر سازه، منشوری می‌باشد. با وجود این، ستون قاب، دارای مقطع I-شکل نامنشوری با ضریب‌های شکل متفاوت است که زیر اثر بار برون محور قائم قرار دارد. سختی پیوند نیمه‌سخت تیر به ستون، سختی جانبی قاب و سختی دورانی تکیه‌گاه پای ستون، به ترتیب، با فنرهای خطی دورانی، انتقالی و دورانی الگوسازی می‌شوند. بر این پایه، نخست، با بهره‌جویی از نگره تیر اولر- برنولی، رابطه کارمایه نهفته کل سازه به دست می‌آید. در این راستا، کرنش‌ها کوچک پنداشته می‌شوند ولی تغییرمکان‌ها می‌توانند بزرگ باشند. سپس، با بهره‌گیری از اصل پایستاری کارمایه نهفته و وارد نمودن شرط‌های مرزی طبیعی و هندسی در تغییرمکان‌های محوری و جانبی، رابطه‌های تعادل خطی و ناخطی مسیر ایستایی پیش‌کمانشی و پس‌کمانشی قاب در دسترس قرار می‌گیرد. در ادامه، پس از صحت‌سنجی رابطه‌سازی پیشنهادی، به ارزیابی اثر عامل‌های ضریب شکل نامنشوری ستون، سختی تکیه‌گاه‌های کشسان، سختی پیوند نیمه‌سخت، برون محوری بار و نسبت لاغری عضوها، بر مسیر ایستایی و بار بحرانی قاب ساده پرداخته خواهد شد. یافته‌ها نشان می‌دهد هر یک از عامل‌های یاد شده، اثر قابل‌توجهی بر مسیر ایستایی و بار کمانشی سازه دارند. به سخن دیگر، با افزایش نسبت لاغری عضوها، ضریب شکل و سختی پیوند‌های تکیه‌گاهی و عضوی، بار کمانشی ناخطی سازه افزایش می‌یابد. در این میان، سختی انتقالی تکیه‌گاه جانبی و نسبت لاغری عضوها، به ترتیب، بیشترین و کمترین اثر را در این افزایش دارند. با وجود این، افزایش برون محوری، کاهش بار بحرانی را در پی خواهد داشت. همچنین، ناخطی پنداشتن تحلیل پایداری، سبب کاهش بار کمانشی سازه نسبت به تحلیل خطی می‌گردد.

کلمات کلیدی: تحلیل ناخطی، پایداری، قاب ساده فولادی، ستون نامنشوری I-شکل، تکیه‌گاه کشسان، پیوند نیمه‌سخت، برون محوری بار.

شناسه دیجیتال:		سابقه مقاله:			
10.22065/JSCE.2019.144522.1641	چاپ	انتشار آنلاین	پذیرش	بازنگری	دریافت
doi: 10.22065/JSCE.2019.144522.1641	۱۳۹۹/۰۷/۰۱	۱۳۹۹/۰۷/۰۱	۱۳۹۷/۱۰/۲۸	۱۳۹۷/۱۰/۲۴	۱۳۹۷/۰۵/۲۵
محسن بمبائی چی				*نویسنده مسئول:	
m.bambaechee@qiet.ac.ir				پست الکترونیکی:	

Nonlinear stability analysis of non-prismatic simple steel frames with flexible supports and semi-rigid connection

mohsen bambaechee^{*1}, ghasem Paseban²

*1 Dept. of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Quchan University of Technology, Quchan, Iran.
2 M. Sc. Student of Structural Eng., Faculty of Civil Eng., Quchan University of Technology, Quchan, Iran*

ABSTRACT

In this paper, various methods of linear and nonlinear stability analysis of simple steel frames are introduced. In the following, based on moderately large rotations and small strains, nonlinear stability analysis of a non-prismatic simple steel frame with semi-rigid connection and flexible supports is performed, which is subjected to a concentrated vertical load eccentrically at its joint. Accordingly, firstly, the accuracy and capability of suggested formulations will be verified by comparing with the results of other researchers. Then, the effects of eccentric axial load factor, shape factor of non-prismatic column, rotational stiffness of elastic support, translational stiffness of lateral support, rotational stiffness of beam-column connection and slenderness ratio of members on the pre-buckling and post-buckling behavior of a steel frame will be investigated. The results show each of these factors has a significant effect on the equilibrium path and buckling load of the structure. In other words, by increasing the slenderness ratio of members, shape factor and stiffness of connections, increases the nonlinear buckling load of the structure. Accordingly, the translational stiffness of lateral support and slenderness ratio of members have the maximum and minimum effect on this increase, respectively. Moreover, by utilizing the non-linear stability analysis, the buckling load of the simple steel frame reduces with respect to linear stability analysis.

ARTICLE INFO

Receive Date: 16 August 2018

Revise Date: 14 January 2019

Accept Date: 18 January 2019

Keywords:

Nonlinear analysis, stability, simple steel frame, I-shape non-prismatic column, flexible support, semi-rigid connection, eccentric load

All rights reserved to Iranian Society of Structural Engineering.

doi: 10.22065/JSCE.2019.144522.1641

*Corresponding author: mohsen bambaechee

Email address: m.bambaechee@qiet.ac.ir

۱- مقدمه

پایداری سازه‌ها همواره به عنوان یک عامل اثرگذار در طرح سازه‌ها و به ویژه، سازه‌های فولادی بوده است. در عضوهای سازه‌ای لاغر، افزون بر آن که مقاومت و سختی سازه باید در حد مجاز باشد، می‌بایست، پدیده کمانش و در نتیجه، ناپایداری مورد بررسی قرار گیرد. نگره پایداری سازه‌ها و مفهوم‌های وابسته به آن، پاسخگوی بسیاری از پرسش‌های قابل طرح در رابطه با عضوهای فشاری می‌باشند.

تا کنون، پژوهش‌های بسیاری درباره پدیده تحلیل ناخطی پایداری و پس‌کمانش قاب‌های فولادی ساده دو عضوی زیر اثر بار برون محور صورت پذیرفته است. یافته‌ها نشان می‌دهند که وجود نقص‌های کوچک، ظرفیت باربری سازه را به طور قابل توجه‌ای در محدوده پس‌کمانش کاهش می‌دهند. افزون بر این، اثر عامل‌های گوناگونی مانند مقدار برون محوری بار، نیمه‌سخت بودن پیوند تیر به ستون، نامنشوری بودن ستون و کشسان بودن تکیه‌گاه پای ستون بر پایداری قاب‌های ساده مورد ارزیابی قرار گرفته است. از آن میان، کونادیس و همکاران، تحلیل پایداری ناخطی یک قاب منشوری دو عضوی با برون محوری بار را مورد ارزیابی قرار دادند [۱]. سمتسز و ولانوس، به تحلیل ناخطی پایداری قاب ساده منشوری دو عضوی با پیوند نیمه‌سخت^۱ تیر به ستون پرداختند [۲]. تحلیل پس‌کمانشی یک قاب ساده با ستون نامنشوری و ضریب شکل $n=2$ ، به وسیله کونادیس و ارموپولوس انجام پذیرفت [۳]. آورام و کونادیس، به اثر برون محوری بار و تکیه‌گاه کشسان بر تحلیل پایداری و پس‌کمانش یک قاب منشوری دو عضوی پرداختند [۴]. کمانش ناخطی پویای قاب‌های فولادی ساده دو عضوی بر پایه نگره کاتاستروف به وسیله کونادیس [۵]، و همچنین، کونادیس و رافتویانیس [۶]، انجام پذیرفت. رافتویانیس و کونادیس، راهکاری ساده برای تعیین بار کمانش قاب‌های منشوری دو عضوی زیر اثر بار برون محور در دسترس قرار دادند [۷]. تحلیل کمانشی ناخطی قاب‌های ساده منشوری دو عضوی با نقص نخستین دورانی پای ستون، به وسیله آورام و رافتویانیس انجام شد [۸]. در این میان، رضایی‌پژند و بمبائی‌چی، تحلیل کشسان مرتبه دوم و پایداری خطی قاب‌های فولادی منشوری با پیوندهای نیمه‌سخت را مورد ارزیابی قرار دادند [۹]. افزون بر این، رضایی‌پژند و همکاران، پایداری خطی قاب‌های فولادی نامنشوری با تکیه‌گاه‌های کشسان را در فضای عدم قطعیت بررسی کردند [۱۰]. راهکار ساده‌ای برای تحلیل پایداری خطی و ناخطی قاب‌های فولادی منشوری ساده با برون محوری بار، به وسیله رافتویانیس ارائه گردید [۱۱]. وی، از اثر کوتاه‌شدگی ناشی از خمش در رابطه‌سازی‌ها چشم‌پوشی کرد. به دنبال آن، آورام و فسولاکیس، به تحلیل پس‌کمانشی ناخطی قاب‌های فولادی ساده دو عضوی با ستون نامنشوری و ضریب شکل $n=3$ پرداختند [۱۲]. آن‌ها اثر تکیه‌گاه‌های کشسان را نیز وارد تحلیل پایداری کردند. به تازگی، فسولاکیس و همکاران، با چشم‌پوشی از نیروی محوری تیر، کمانش ناخطی پویای^۲ قاب ساده نامنشوری با ضریب شکل $n=3$ را بررسی نموده‌اند [۱۳].

آن گونه که آمد، بیشتر پژوهش‌های انجام گرفته به ارزیابی رفتار قاب‌های دو عضوی منشوری با تکیه‌گاه‌های ساده پرداخته‌اند. افزون بر این، در بیشتر کارها، پیوند تیر به ستون، سخت پنداشته شده است. بر این پایه، پژوهش کنونی، به تحلیل پایداری ناخطی^۳ قاب ساده نامنشوری دو عضوی با پیوند نیمه‌سخت و تکیه‌گاه‌های کشسان می‌پردازد. باید افزود، وارد نمودن اثر کوتاه‌شدگی ناشی از خمش و نیروی محوری تیر در رابطه‌سازی‌ها، سبب ناخطی شدن تحلیل می‌شود. تیر سازه، دارای مقطع منشوری و ستون قاب، دارای مقطع I-شکل نامنشوری با ضریب شکل‌های متفاوت می‌باشد که زیر اثر بار برون محور قائم قرار دارد. سختی پیوند نیمه‌سخت تیر به ستون، سختی جانبی قاب و سختی دورانی تکیه‌گاه پای ستون، به ترتیب، با فنرهای خطی دورانی، انتقالی و دورانی الگوسازی می‌شوند. نخست، با بهره‌جویی از نگره تیر اولر- برنولی، رابطه کارمایه نهفته کل سازه به دست می‌آید. سپس، با وارد نمودن شرط‌های مرزی طبیعی و هندسی، رابطه‌های تعادل ناخطی مسیر ایستایی پیش‌کمانشی و پس‌کمانشی قاب در دسترس قرار می‌گیرد. در ادامه، اثرهای ضریب شکل ستون نامنشوری، پیوند نیمه‌سخت، تکیه‌گاه‌های کشسان و برون محوری بار، بر مسیر ایستایی و بار بحرانی قاب نامنشوری با پیوند نیمه‌سخت و تکیه‌گاه‌های کشسان بررسی خواهد شد.

¹ semi-rigid connection

² dynamic

³ nonlinear

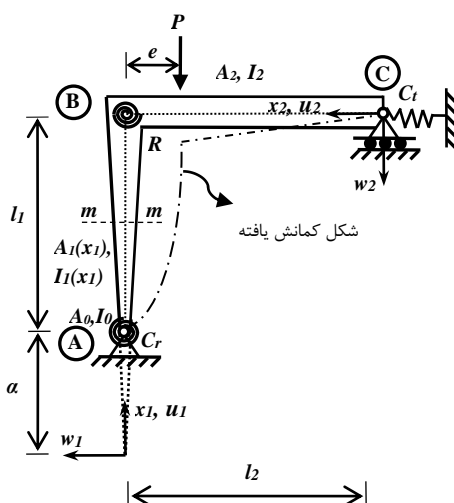
۲- قاب ساده نامنشوری با پیوند نیمه سخت و تکیه گاه های کشسان

یک قاب فولادی ساده نامنشوری با پیوند نیمه سخت و تکیه گاه های کشسان، همانند شکل ۱ در نظر گرفته می شود. در تکیه گاه A، یک فنر دورانی با سختی دورانی C_r ، در تکیه گاه C، یک فنر انتقالی با سختی انتقالی C_t و در پیوند تیر به ستون B، یک فنر دورانی با سختی دورانی R قرار دارد. بار P با برون محوری e نسبت به خط مرکزی ستون در نقطه B وارد می شود. بر پایه شکل ۱، l_1 طول ستون پنداشته می شوند. سطح مقطع تیر A_2 و لنگر لختی آن با I_2 نشان داده می شوند که هر دو ثابت هستند. w_1 و w_2 به ترتیب، تغییر مکان جانبی ستون و تیر می باشند. همچنین، تغییر مکان محوری ستون و تیر، به ترتیب، با u_1 و u_2 نشان داده می شوند. سطح مقطع و لنگر لختی ستون نامنشوری I-شکل، به ترتیب، با رابطه های (۱) و (۲) در دسترس قرار می گیرند.

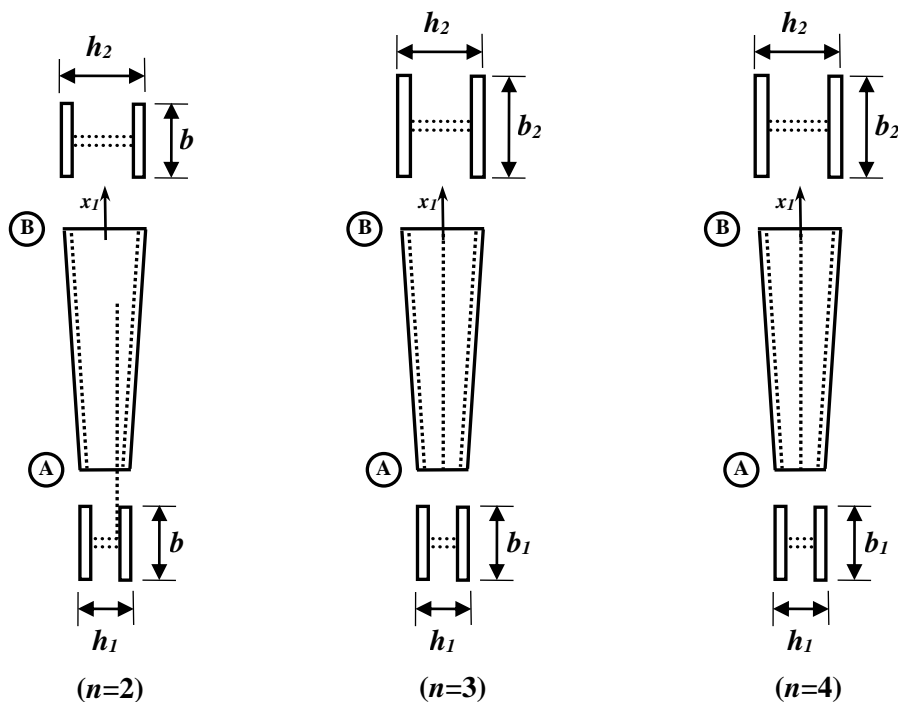
$$A_1(x_1) = A_0 \left(\frac{x_1}{\alpha} \right)^{n-2} = A_{1,m} \left(\frac{2x_1}{2\alpha + l_1} \right)^{n-2} \quad (1)$$

$$I_1(x_1) = I_0 \left(\frac{x_1}{\alpha} \right)^n = I_{1,m} \left(\frac{2x_1}{2\alpha + l_1} \right)^n \quad (2)$$

که در آن ها، A_0 و $A_{1,m}$ ، به ترتیب، سطح مقطع آغاز ($x_1 = \alpha$) و میانه ($x_1 = \alpha + l_1/2$) ستون می باشند. همچنین، I_0 و $I_{1,m}$ به ترتیب، لنگر لختی در ابتدا و میانه ستون هستند. ضریب شکل n ، وابسته به چگونگی تغییر ارتفاع جان، h ، و پهنا ی بال، b ، ستون نامنشوری با مقطع I-شکل در امتداد محور طولی ستون می باشد. این ضریب برای حالت های رایج، در شکل ۲ آمده است. باید افزود، برای مقطع منشوری، مقدارهای لنگر لختی و سطح مقطع ثابت می باشند و ضریب شکل، صفر خواهد بود. خاطر نشان می کند، رابطه سازی های همانندی، تنها برای ستون نامنشوری I-شکل فولادی با $n=3$ به وسیله آورام و فسولاکیس در مرجع [۱۲] در دسترس قرار گرفته است. همچنین، رابطه های مشابهی، تنها برای ستون نامنشوری نردبانی فولادی با $n=2$ به وسیله کونادیس و ارموپولوس در مرجع [۳] آمده است. با وجود این، رابطه های پیشنهادی، کلی می باشند و برای همه n های برابر یا بزرگتر از دو برقرار خواهند بود.



شکل ۱: قاب ساده نامنشوری با تکیه گاه های کشسان و پیوند نیمه سخت زیر اثر بار برون محور.



تغییرات ارتفاع جان، h خطی

پهنای بال، b ثابت

تغییرات ارتفاع جان، h خطی

تغییرات پهنای بال، b خطی

تغییرات ارتفاع جان، h خطی

تغییرات پهنای بال، b سهمی

شکل ۲: ستون نامنشوری I-شکل با ضرب‌های شکل متفاوت.

۳- رابطه‌سازی پیشنهادی

در این بخش، رابطه‌های کارمایه نهفته کل^۴، شرط‌های مرزی هندسی^۵، شرط‌های مرزی طبیعی^۶، تغییر مکان‌های محوری و جانبی و سرانجام، رابطه تعادل ناخطی و مسیر ایستایی^۷ قاب ساده نامنشوری شکل ۱ در دسترس قرار می‌گیرند.

• ۳-۱- برپایی کارمایه نهفته کل سازه

بر پایه رابطه‌های میان تغییر مکان و انحنا، کارمایه نهفته کل (VT) قاب دو عضوی شکل ۱ که ناشی از کارمایه‌های نهفته ستون (V1)، تیر (V2)، پیوند تیر به ستون (VR) و نیروی خارجی (VP) می‌باشد را می‌توان از برابری زیر یافت:

$$V_T = V_1 + V_2 + V_R + V_P \quad (3)$$

⁴ total potential energy

⁵ geometrical boundary conditions

⁶ natural boundary conditions

⁷ equilibrium path

در رابطه کنونی، V_1 کارمایه نهفته ستون (عضو AB) می‌باشد، که در آن کارمایه کرنشی ذخیره شده به سبب تغییرشکل‌های محوری و خمشی و با در نظر گرفتن سختی فنر دورانی تکیه‌گاه C_r به قرار زیر خواهد بود [۱۲]:

$$V_1 = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\alpha+l_1} \left[EI_1(x_1) w_1''^2(x_1) + EA_1(x_1) \left(u_1'(x_1) + \frac{1}{2} w_1'^2(x_1) \right)^2 \right] dx_1 + \frac{1}{2} C_r w_1'^2(\alpha) \quad (4)$$

V_2 نیز، کارمایه نهفته تیر (عضو BC) می‌باشد که در آن کارمایه نهفته شده به سبب کرنش‌های ناشی از خمش و نیروی محوری و با در نظر گرفتن سختی تکیه‌گاه جانبی C_t ، به صورت رابطه (۵) بیان می‌گردد [۱۲]:

$$V_2 = \frac{1}{2} \int_0^{l_2} \left[EI_2 w_2''^2(x_2) + EA_2 \left(u_2'(x_2) + \frac{1}{2} w_2'^2(x_2) \right)^2 \right] dx_2 + \frac{1}{2} C_t u_2^2(0) \quad (5)$$

همچنین، V_R ، کارمایه نهفته ناشی از فنر پیوند دهنده تیر به ستون با سختی دورانی R ، برابر زیر خواهد بود:

$$V_R = \frac{1}{2} R \left(w_1'^2(\alpha + l_1) - w_2'^2(l_2) \right) \quad (6)$$

افزون بر این‌ها، کار نیروی خارجی (V_P) ، به سبب نیروی خارجی محوری P همانند زیر می‌باشد [۱۲]:

$$V_P = -P w_2(l_2) - P e w_2'(l_2) \quad (7)$$

باید افزود، از آن‌جا که کرنش‌ها کوچک پنداشته می‌شوند ولی تغییرشکل‌ها (دوران‌ها) می‌توانند بزرگ باشند، برای یافتن کارمایه کرنشی محوری اعضا در رابطه‌های (۴) و (۵)، از برابری زیر بهره‌جویی شده است:

$$\varepsilon_i = u_i' + \frac{1}{2} w_i'^2 \quad (i = 1, 2) \quad (8)$$

در رابطه کنونی، u_i' ، کوتاه‌شدگی ناشی از نیروی محوری و عبارت $\frac{1}{2} w_i'^2$ ، کوتاه‌شدگی ناشی از خمش می‌باشند. باید افزود، پانویس‌های $i=1$ و $i=2$ ، به ترتیب، نشانگر رابطه‌های وابسته به ستون و تیر هستند.

• ۳-۲- یافتن رابطه‌های دیفرانسیلی حاکم تعادلی

برای به دست آوردن رابطه‌های دیفرانسیلی حاکم تعادلی، بر پایه اصل پایستاری و ثابت بودن مقدار کارمایه نهفته، رابطه $\delta V_T = 0$ بایستی برقرار باشد. به سخن دیگر، مشتق کارمایه نهفته کل، نسبت به تمامی متغیرهایش، برابر صفر خواهد بود. از این رو، مشتق گیری کلی از رابطه کارمایه نهفته کل و صفر قرار دادن آن، چهار رابطه دیفرانسیلی حاکم تعادلی زیر در دسترس قرار می‌گیرد [۱۲]:

$$\left[EA_1(x_1) \left(u_1'(x_1) + \frac{1}{2} w_1'^2(x_1) \right) \right]' = 0 \quad (9)$$

$$\left[EA_2 \left(u_2'(x_2) + \frac{1}{2} w_2'^2(x_2) \right) \right]' = 0 \quad (10)$$

$$\left[EI_1(x_1) w_1''(x_1) \right]'' - \left[EA_1(x_1) \left(u_1'(x_1) + \frac{1}{2} w_1'^2(x_1) \right) w_1'(x_1) \right]' = 0 \quad (11)$$

$$EI_2 w_1'''(x_2) - \left[EA_2 \left(u_2'(x_2) + \frac{1}{2} w_2'^2(x_2) \right) w_2'(x_2) \right]' = 0 \quad (12)$$

باید افزود، در ادامه، با تابع اولیه گیری^۸ از برابری‌های (۹) و (۱۰)، تغییرشکل‌های محوری عضوها (u_1 و u_2) به دست می‌آیند. همچنین، تغییر مکان جانبی عضوها (w_1 و w_2)، با به کارگیری رابطه‌های (۱۱) و (۱۲) و تابع اولیه گیری از آن‌ها در دسترس قرار خواهند گرفت.

• ۳-۴- وارد نمودن شرط‌های مرزی هندسی و طبیعی

با بدون یکاسازی طول‌ها، تغییرشکل‌های جانبی و تغییر مکان‌های محوری عضوها و معرفی عامل‌های بدون یکای $X_i = \frac{x_i}{l_i}$

که در آن‌ها پانویس‌های $i=1$ و $i=2$ ، به ترتیب، نشانگر رابطه‌های وابسته به ستون و تیر هستند، شرط‌های

مرزی هندسی و طبیعی سازه شکل ۱، به ترتیب، همانند رابطه‌های (۱۳) و (۱۴) خواهند بود. باید افزود، شرط‌های مرزی هندسی، بر پایه مقدارهای تغییرشکل‌های محوری و جانبی و وابستگی آن‌ها به یکدیگر به دست می‌آیند؛ در حالی که، شرط‌های مرزی طبیعی، بنا بر رابطه‌های تعادل نیرویی و وابستگی آن‌ها با تغییر مکان‌های محوری و جانبی برپا می‌گردند. برای نمونه، نخستین شرط مرزی هندسی رابطه (۱۳)، از صفر بودن تغییرشکل جانبی پای ستون در گره A و نخستین شرط مرزی طبیعی رابطه (۱۴)، از صفر بودن لنگر سر تیر در گره C به دست آمده‌اند.

⁸ Integral

$$\begin{cases} W_1(\bar{\alpha}) = 0 \\ W_2(0) = 0 \\ U_1(\bar{\alpha}) = 0 \\ W_1(1+\bar{\alpha}) = rU_2(1) \\ U_1(1+\bar{\alpha}) = -rW_2(1) \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} W_2''(0) = 0 \\ W_1''(\bar{\alpha}) - \bar{C}_r W_1'(\bar{\alpha}) = 0 \\ \left(\frac{2+2\bar{\alpha}}{1+2\bar{\alpha}}\right)^n r W_1''(1+\bar{\alpha}) + [r W_1'(1+\bar{\alpha}) - W_2'(1)] \bar{R} = 0 \\ k_2^2 = -\bar{C}_t U_2(0) \\ k_{1,m}^2 W_1'(1+\bar{\alpha}) + \left[\left(\frac{2X_1}{1+2\bar{\alpha}}\right)^n W_1''(X_1)\right]_{X_1=1+\bar{\alpha}} - \frac{\bar{C}_t}{\rho r^2} U_2(0) = 0 \\ \left(\frac{2+2\bar{\alpha}}{1+2\bar{\alpha}}\right)^n W_1''(1+\bar{\alpha}) + \frac{1}{\rho r} W_2''(1) + r\beta^2 e = 0 \\ \beta^2 - k_{1,m}^2 + \frac{1}{\rho r^2} [W_1'''(1) + k_2^3 W_1'(1)] = 0 \end{cases} \quad (14)$$

در این رابطه‌ها، $k_{1,m}$ و k_2 به ترتیب، نسبت نیروی محوری ستون و تیر پنداشته می‌شوند. این عامل‌ها، به ترتیب، به صورت $k_{1,m}^2 = \frac{P_1 l_1^2}{EI_{1,m}}$ و $k_2^2 = \frac{P_2 l_2^2}{EI_2}$ تعریف می‌شوند. بار خارجی سازه، P ، با عامل بدون یکای $\beta^2 = \frac{Pl_1^2}{EI_{1,m}}$ تعیین می‌گردد. بر این

پایه، ضریب بار بحرانی سازه، برابر $\beta_{cr}^2 = \frac{P_{cr} l_1^2}{EI_{1,m}}$ خواهد بود. عامل $r = \frac{l_2}{l_1}$ ، نسبت طول تیر به ستون و پارامتر $\rho = \frac{I_{1,m}}{I_2}$ ، نسبت لنگر

لختی میانه ستون نامنشوری به لنگر لختی تیر می‌باشد. برای سادگی، عامل‌های بدون یکای $\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{l_1}$ و $\bar{e} = \frac{e}{l_2}$ ، به ترتیب، نسبت

نامنشوری و نسبت برون محوری بار معرفی می‌شوند. همچنین، نسبت‌های بدون یکای سختی دورانی تکیه‌گاه، سختی دورانی پیوند تیر به

ستون و سختی جانبی، به ترتیب، با رابطه‌های $\bar{C}_r = \frac{C_r l_1}{EI_0}$ ، $\bar{R} = \frac{Rl_1}{EI_{1,m}}$ و $\bar{C}_t = \frac{C_t l_2^3}{EI_2}$ بیان می‌گردند. یادآوری می‌کند، عامل n

ضریب شکل ستون نامنشوری I-شکل است که بر پایه جدول ۱، می‌تواند برابر مقدارهای $n=2$ ، $n=3$ و $n=4$ باشد. همچنین، آشکار است که برای ستون منشوری، این ضریب، برابر صفر خواهد بود.

• ۳-۳- یافتن تغییر مکان های محوری و جانبی

باید دانست، بر پایه رابطه های میان تنش- نیرو- کرنش، تنش محوری فشاری عضوهای قاب (σ_i) بر حسب نیروی محوری داخلی (P_i)، سطح مقطع (A_i) و کرنش محوری (ϵ_i) تیر و ستون و از برابری های زیر به دست می آید:

$$\sigma_i = -\frac{P_i}{A_i} = E \epsilon_i \quad (i = 1, 2) \quad (15)$$

از این رو، با در نظر گرفتن رابطه میان کرنش محوری و تغییر شکل های محوری و جانبی، همانند برابری (۹)، تابع های پنداشتی نیروی محوری فشاری در تیر و ستون، به ترتیب، همانند رابطه های (۱۶) و (۱۷) بیان می شوند.

$$P_1(x_1) = -EA_1(x_1) \left(u_1'(x_1) + \frac{1}{2} w_1'^2(x_1) \right) \quad (16)$$

$$P_2(x_2) = -EA_2 \left(u_2'(x_2) + \frac{1}{2} w_2'^2(x_2) \right) \quad (17)$$

از سوی دیگر، بر پایه رابطه های تعادلی (۹) و (۱۰)، نیروی محوری عضوها مقدارهایی ثابت خواهند بود و تابعی از x نیستند. از این رو، با تابع اولیه گیری از رابطه های تعادلی (۹) و (۱۰)، نیروهای داخلی محوری ستون P_1 و تیر P_2 همانند برابری های زیر در دسترس قرار می گیرند:

$$\left(\frac{2x_1}{l_1 + 2\alpha} \right)^{n-2} \left(u_1'(x_1) + \frac{1}{2} w_1'^2(x_1) \right) = \frac{-P_1}{EA_{1,m}} \quad (18)$$

$$u_2'(x_2) + \frac{1}{2} w_2'^2(x_2) = \frac{-P_2}{EA_2} \quad (19)$$

سرانجام، با تابع اولیه گیری دوباره از رابطه های بالا در حالت بدون یکا، تغییر مکان های محوری ستون نامنشوری با ضریب شکل های متفاوت (U_1) و تیر منشوری (U_2)، همانند برابری های زیر به دست می آیند:

$$U_1(X_1) = \begin{cases} C_5 - \frac{k_{1,m}^2}{\lambda_{1,m}^2} (X_1 - \bar{\alpha}) - \frac{1}{2} \int_{\bar{\alpha}}^{X_1} W_1'^2(X_1) dX_1 & (n=2) \\ C_5 - \frac{k_{1,m}^2}{\lambda_{1,m}^2} \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha} \right) \ln \frac{X_1}{\bar{\alpha}} - \frac{1}{2} \int_{\bar{\alpha}}^{X_1} W_1'^2(X_1) dX_1 & (n=3) \\ C_5 - \frac{k_{1,m}^2}{\lambda_{1,m}^2} \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha} \right)^2 \left(\frac{1}{\bar{\alpha}} - \frac{1}{X_1} \right) - \frac{1}{2} \int_{\bar{\alpha}}^{X_1} W_1'^2(X_1) dX_1 & (n=4) \end{cases} \quad (20)$$

$$U_2(X_2) = D_5 - \frac{k_2^2}{\lambda_2^2} X_2 - \frac{1}{2} \int_0^{X_2} W_2'^2(X_2) dX_2 \quad (21)$$

در این رابطه‌ها، $\lambda_{1,m} = l_1 \left(\frac{A_{1,m}}{I_{1,m}} \right)^{\frac{1}{2}}$ و $\lambda_2 = l_2 \left(\frac{A_2}{I_2} \right)^{\frac{1}{2}}$ ، به ترتیب، نسبت لاغری ستون و تیر پنداشته می‌شوند. یادآوری می‌کند،

عامل‌های $k_{1,m}$ و k_2 ، پیش از این تعریف شدند و به ترتیب، برابر با $k_{1,m} = \frac{P_1 l_1^2}{EI_{1,m}}$ و $k_2 = \frac{P_2 l_2^2}{EI_2}$ می‌باشند.

از سوی دیگر، با در نظر گرفتن رابطه‌های تعادلی (۹) و (۱۰)، آشکار می‌گردد که جمله‌های دوم رابطه‌های تعادلی (۱۱) و (۱۲)، بایستی برابر صفر باشند. بنابراین، این رابطه‌ها به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$\left[EI_1(x_1)w_1''(x_1) \right]' = 0 \quad (22)$$

$$EI_2 w_1'''(x_2) = 0 \quad (23)$$

حال، با چهار بار تابع اولیه‌گیری پی‌درپی از رابطه‌های بالا در حالت بدون یکا، تغییرمکان‌های جانبی ستون نامنشوری با ضریب شکل‌های متفاوت (W_1) و تیر منشوری (W_2)، به ترتیب، به صورت رابطه‌های (۲۴) و (۲۵) به دست می‌آیند:

$$W_1(X_1) = \begin{cases} C_1 \sqrt{X_1} \sin \left[\sqrt{\mu^2 - \frac{1}{4}} \times \ln \left(\frac{X_1}{\bar{\alpha}} \right) \right] + C_2 \sqrt{X_1} \cos \left[\sqrt{\mu^2 - \frac{1}{4}} \times \ln \left(\frac{X_1}{\bar{\alpha}} \right) \right] + C_3 X_1 + C_4 & (n=2) \\ C_1 \sqrt{X_1} Bessel J \left(1, \frac{2\mu}{\sqrt{X_1}} \right) + C_2 \sqrt{X_1} Bessel Y \left(1, \frac{2\mu}{\sqrt{X_1}} \right) + C_3 X_1 + C_4 & (n=3) \\ C_1 X_1 \sin \left[\mu \left(\frac{\bar{\alpha}}{X_1} \right) \right] + C_2 X_1 \cos \left[\mu \left(\frac{\bar{\alpha}}{X_1} \right) \right] + C_3 X_1 + C_4 & (n=4) \end{cases} \quad (24)$$

$$W_2(X_2) = D_1 \sin(k_2 X_2) + D_2 \cos(k_2 X_2) + D_3 X_2 + D_4 \quad (25)$$

عامل μ ، در رابطه (۲۴) به صورت $\mu^2 = k_{1,m}^2 \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha} \right)^n$ تعریف می‌شود. باید افزود، دو ثابت تغییرمکان محوری عضوها، یعنی C_5 و D_5

در رابطه‌های (۲۰) و (۲۱) و هشت ثابت تغییرمکان جانبی عضوها یعنی C_j و D_j ($j=1,2,3,4$) در رابطه‌های (۲۴) و (۲۵) که از تابع اولیه‌گیری‌ها به وجود آمدند، با بهره‌جویی از سه شرط مرزی نخست رابطه (۱۳) و هفت شرط مرزی رابطه (۱۴) در دسترس قرار می‌گیرند. به سخن دیگر، ده ثابت تابع‌های تغییرشکل محوری و جانبی، با بهره‌جویی از ده شرط مرزی از میان دوازده شرط مرزی رابطه‌های (۱۳) و (۱۴) حساب می‌شوند.

خاطر نشان می‌کند، تا کنون، تغییرمکان‌های محوری و جانبی عضوها حساب شدند. با وجود این، از دو شرط مرزی هندسی پایانی رابطه (۱۳) که از برابری متناظر تغییرشکل‌های محوری و جانبی تیر و ستون در گره B به دست آمده‌اند، بهره‌جویی نشده است. در ادامه، با به کارگیری این دو شرط، مسیر ایستایی سازه در دسترس قرار خواهد گرفت.

• ۵-۳- یافتن رابطه‌های تعادل ناخطی و دستیابی به مسیر ایستایی پیش‌کمانش و پس‌کمانش

در این بخش، با در اختیار داشتن تغییرمکان‌های محوری و جانبی اعضا و با بهره‌جویی از دو شرط پایانی رابطه (۱۳)، دو رابطه تعادل ناخطی به دست می‌آید که با حل عددی هم‌زمان آن‌ها، مسیر ایستایی قاب دو عضوی با پیوند نیمه‌سخت و تکیه‌گاه‌های کشسان بر حسب عامل‌هایی که پیش از این تعریف گردید، در دسترس قرار می‌گیرد. به سخن دیگر، برای مقادیر مختلف بار خارجی P که پیش از این با عامل β^2 معرفی شد، مقادیر نیروی محوری عضوهای قاب، یعنی P_1 و P_2 ، بر حسب عامل‌های $k_{1,m}$ و k_2 ، با دانستن دیگر متغیرها $(\lambda_{1,m}, \lambda_2, \rho, r, \bar{e}, \bar{\alpha}, \bar{C}_r, \bar{C}_t, \bar{R})$ به دست می‌آیند. از این رو، مسیر تعادل ناخطی پیش‌کمانش و پس‌کمانش با رابطه زیر بیان می‌گردد:

$$\beta^2 = \beta^2(k_{1,m}, k_2, \lambda_{1,m}, \lambda_2, \rho, r, \bar{e}, \bar{\alpha}, \bar{C}_r, \bar{C}_t, \bar{R}) \quad (26)$$

بر پایه رابطه کنونی، با در اختیار داشتن مقدار عامل‌های بدون یکای $\lambda_{1,m}, \lambda_2, \rho, r, \bar{e}, \bar{\alpha}, \bar{C}_r, \bar{C}_t, \bar{R}$ و برای مقادیر متفاوت بار خارجی β^2 ، عامل‌های $k_{1,m}$ و k_2 با حل عددی هم‌زمان دو شرط پایانی رابطه (۱۳) به دست می‌آیند. به دنبال آن، تابع‌های تغییرشکل محوری و جانبی اعضا مشخص می‌شوند. سرانجام، نمودار تغییر بار خارجی، β^2 ، در برابر تغییرشکل جانبی نوک ستون، $W(1+\bar{\alpha})$ ، بر حسب عامل‌های متفاوت، به عنوان مسیر ایستایی سازه در دسترس قرار می‌گیرد. همچنین، می‌توان β_{cr}^2 یا همان، ضریب بار بحرانی سازه را یافت. خاطر نشان می‌کند، برای حل عددی رابطه‌های تعادل ناخطی و دیگر عملیات‌های ریاضی، از نرم‌افزار تجاری ریاضی Maple بهره‌جویی شده است.

۴- صحت‌سنجی رابطه‌سازی پیشنهادی

به منظور واری دقت و کارایی رابطه‌سازی پیشنهادی، نخست، قاب شکل ۱ با ستون منشوری، پیوند سخت و تکیه‌گاه‌های ساده تحلیل شده است. مقادیر بارکمانشی و نیروهای محوری اعضا برای مقادیر متفاوت برون محوری، در جدول ۱ می‌آید. باید افزود، این سازه، پیشتر به وسیله کونادیس و همکاران [۱] و نیز، رافتویانیس [۱۱] مورد ارزیابی قرار گرفته است. بر پایه پاسخ‌های جدول ۱، می‌توان دید که یافته‌های رابطه‌سازی پیشنهادی، همخوانی خوبی با پاسخ‌های مرجع‌های [۱] و [۱۱] دارند. در ادامه، سازه شکل ۱ با ستون نامنشوری (ضریب شکل $n=3$)، پیوند سخت و تکیه‌گاه‌های کشسان تحلیل می‌شود. مقادیر بارکمانشی و نیروهای محوری اعضا برای مقادیر متفاوت سختی تکیه‌گاه‌های کشسان، با چشم‌پوشی از نیروی محوری تیر ($k_2=0$) و در نظر گرفتن آن ($k_2 \neq 0$)، در جدول ۲ آمده است. این قاب، پیش از این به وسیله آورام و فسولاکیس (۲۰۱۳)، [۱۲] بررسی شده است. بر پایه پاسخ‌های جدول ۲، دقت و کارایی رابطه‌سازی پیشنهادی آشکار می‌گردد.

جدول ۱: بار بحرانی قاب فولادی منشوری با پیوند سخت و تکیه‌گاه‌های ساده ($\lambda_{1,m} = \lambda_2 = 80, \rho = r = 1, \bar{\alpha} = 10^7, \bar{C}_r = 0, \bar{C}_t = \bar{R} = \infty$)

مرجع	\bar{e}	β_{cr}^2	$k_{1,m}^2$	k_2^2
رافتویبانیس [۱۱]	۰/۰۰۰۴۷۲۸۸	۱۳/۹۴۲۹۸	۱۳/۹۳۹۳۴	۰/۰۰۱۶۲۷۹۱
کونادیس و همکاران [۱]		۱۳/۸۸۷۱	۱۳/۸۸۲۰	۰/۰۰۱۵۱۸۴۶۱
روش پیشنهادی		۱۳/۹۱۳۶۳	۱۳/۹۰۸۳۱	۰/۰۰۱۳۴۳
رافتویبانیس [۱۱]	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۱۳/۵۹۵۴۵	۱۳/۶۸۹۴۳	۰/۰۰۹۴۷۴۱
کونادیس و همکاران [۱]		۱۳/۵۴۷۹	۱۳/۶۴۰۹	۰/۰۰۹۴۳۱۳۲۳
روش پیشنهادی		۱۳/۶۳۳۱۱	۱۳/۷۱۵۵۶	۰/۰۰۹۶۳۶۳
رافتویبانیس [۱۱]	-۰/۰۰۱۳۰۰۰۰	۱۳/۲۷۲۲۷	۱۳/۴۵۹۸۵	۰/۱۷۵۴۰۸
کونادیس و همکاران [۱]		۱۳/۲۳۲۵	۱۳/۴۱۹۵	۰/۱۷۴۸۱۳۴۰
روش پیشنهادی		۱۳/۳۲۷۸۳	۱۳/۵۱۳۴۲	۰/۱۷۶۰۴۸
رافتویبانیس [۱۱]	-۰/۰۰۲۵۰۰۰	۱۳/۰۷۶۰۸	۱۳/۳۲۱۱۳	۰/۲۲۰۹۱۲
کونادیس و همکاران [۱]		۱۳/۰۴۳۴	۱۳/۲۸۷۸	۰/۲۲۰۳۵۵۹۰
روش پیشنهادی		۱۳/۱۴۲۸۱	۱۳/۳۹۵۶۱	۰/۲۲۰۸۱۲
رافتویبانیس [۱۱]	-۰/۰۰۵۰۰۰۰	۱۲/۷۷۷۴۸	۱۳/۱۱۲۸۹	۰/۲۸۷۰۳۳
کونادیس و همکاران [۱]		۱۲/۷۵۱۹	۱۳/۰۸۶۶	۰/۲۸۶۴۵۲۶۰
روش پیشنهادی		۱۲/۸۳۱۶۷	۱۳/۲۱۲۳۱	۰/۲۸۸۸۰۳
رافتویبانیس [۱۱]	-۰/۰۰۷۰۰۰	۱۲/۵۸۷۰۱	۱۲/۹۸۰۲۲	۰/۳۲۶۰۶۳
کونادیس و همکاران [۱]		۱۲/۵۶۸۱	۱۲/۹۶۰۷	۰/۳۲۵۵۳۴۰۰
روش پیشنهادی		۱۲/۶۶۹۳۱	۱۳/۰۸۷۱۲	۰/۳۲۸۱۵۹

جدول ۲: بار بحرانی قاب فولادی نامنشوری ($n=3$) با پیوند سخت و تکیه‌گاه‌های کشسان ($\lambda_{1,m} = \lambda_2 = 80, \bar{e} = 0, \rho = r = \bar{\alpha} = 1, \bar{R} = \infty$)

منبع	\bar{C}_r	\bar{C}_t	β_{cr}^2		$k_{1,m}^2$	k_2^2
			$k_2 = 0$	$k_2 \neq 0$		
آورام و فسولاکیس [۱۲]	۰	۱۰ ^{-۳}	۱/۶۰۶۹۷	۱/۶۰۶۵۵	۱/۶۲۶۹۰	۰/۰۰۰۰۰۲۹۷
روش پیشنهادی			۱/۶۰۵۸۱	۱/۶۰۵۳۱۷	۱/۶۲۰۷۸۳۶	۰/۰۰۰۰۰۳۰۵
آورام و فسولاکیس [۱۲]	۰	۵	۹/۷۶۸۶۲	۹/۷۵۷۲۰	۹/۷۸۵۰۱	۰/۱۵۹۷۰
روش پیشنهادی			۹/۷۴۳۱۵	۹/۷۱۳۴۵	۹/۷۶۲۱۴	۰/۱۳۳۷۱
آورام و فسولاکیس [۱۲]	۰	۱۰ ^{-۵}	۱۱/۰۳۴۰	۱۱/۰۲۲۸۶	۱۱/۰۹۰۲۳	۰/۰۶۷۲۷
روش پیشنهادی			۱۱/۰۲۲۸	۱۱/۰۸۸۸۱	۱۱/۱۰۹۳۱	۰/۰۳۳۵
آورام و فسولاکیس [۱۲]	۱	۱۰ ^{-۳}	۲/۰۶۴۵	۲/۰۶۳۹۶	۲/۰۸۸۳۱	۰/۰۰۰۰۰۳۳۲
روش پیشنهادی			۲/۰۴۳۲۶	۲/۰۲۲۳۹	۲/۰۷۸۱۸	۰/۰۰۰۰۰۲۶۳
آورام و فسولاکیس [۱۲]	۲	۱۰ ^{-۳}	۲/۰۴۴	۲/۰۴۰۰	۲/۴۳۳۲۹	۰/۰۰۰۰۰۳۸۰
روش پیشنهادی			۲/۴۰۳۲۱	۲/۴۰۰۱۵	۲/۴۱۰۱۸	۰/۰۰۰۰۰۳۹۷
آورام و فسولاکیس [۱۲]	۵	۱۰ ^{-۳}	۳/۰۲۵۶	۳/۰۲۵۲۳	۳/۰۶۱۴۵	۰/۰۰۰۰۰۴۲۷
روش پیشنهادی			۳/۰۱۳۶	۳/۰۱۸۳۴	۳/۰۵۵۱۵۴	۰/۰۰۰۰۰۴۳۵
آورام و فسولاکیس [۱۲]	۲۰	۱۰ ^{-۳}	۳/۸۵۲۰	۳/۸۵۱۶۱	۳/۸۹۷۴۷	۰/۰۰۰۰۰۴۷۵
روش پیشنهادی			۳/۸۲۳۶۷	۳/۸۰۳۵	۳/۸۱۴۷۹	۰/۰۰۰۰۰۴۶۹
آورام و فسولاکیس [۱۲]	۱۰۰	۱۰ ^{-۳}	۴/۲۲۵۶۷	۴/۲۲۵۱۹	۴/۲۷۴۵۱	۰/۰۰۰۰۰۴۸۱
روش پیشنهادی			۴/۲۱۳۶۵	۴/۱۹۳۵۸	۴/۲۳۶۷۸	۰/۰۰۰۰۰۴۸۶
آورام و فسولاکیس [۱۲]	۱۰ ^{-۵}	۱۰ ^{-۳}	۴/۳۳۳۸	۴/۳۳۳۸۳	۴/۳۸۴۰۴	۰/۰۰۰۰۰۴۸۱
روش پیشنهادی			۴/۳۱۲۵	۴/۲۹۳۱۵	۴/۳۴۲۸۷	۰/۰۰۰۰۰۴۸

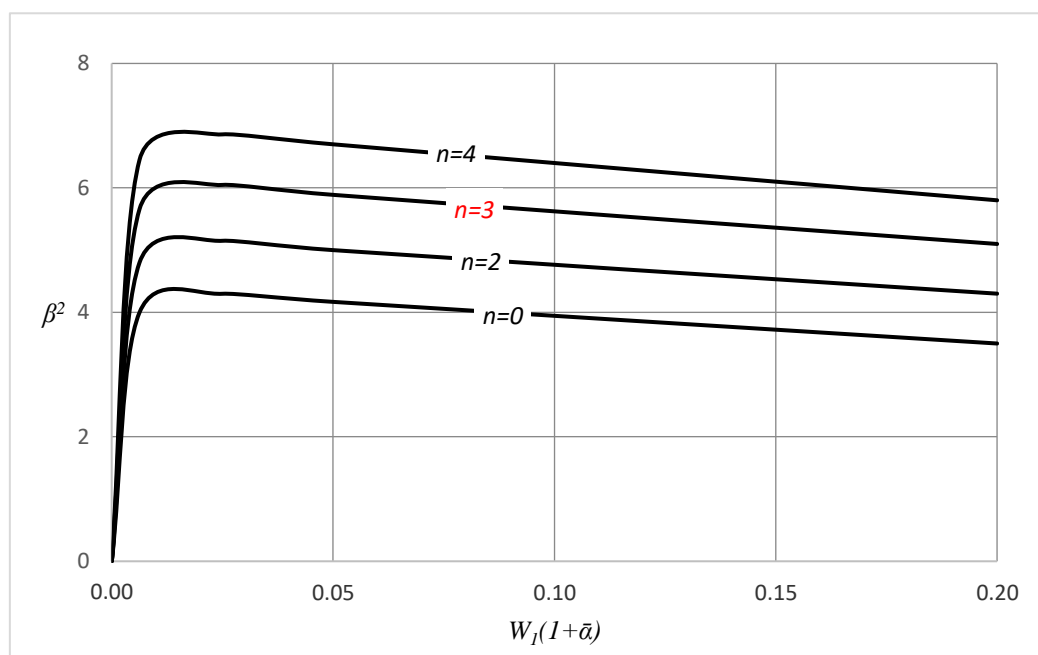
آورام و فسولاکیس [۱۲]	۱	۱۰	۱۱/۸۱۷۳	۱۱/۸۳۴۸۸	۱۱/۹۰۴۵۷	۰/۱۰۲۵۵
روش پیشنهادی			۱۱/۸۰۳۲	۱۱/۸۰۴۳	۱۱/۹۳۲۰۵	۰/۱۲۵۴۶۵
آورام و فسولاکیس [۱۲]	۲	۱۰	۱۲/۷۹۸۲	۱۲/۸۱۹۵۹	۱۲/۸۹۵۲۸	۰/۰۸۸۱۴
روش پیشنهادی			۱۲/۷۸۵۴	۱۲/۸۵۳۴	۱۲/۹۳۱۴۵	۰/۰۸۰۱۷
آورام و فسولاکیس [۱۲]	۵	۱۰	۱۴/۹۱۱۶	۱۴/۹۴۶۲۵	۱۵/۰۴۳۵۴	۰/۰۴۹۲۷
روش پیشنهادی			۱۴/۹۰۱۴	۱۴/۹۰۱۳	۱۵/۰۰۰۱	۰/۰۳۹۹۴
آورام و فسولاکیس [۱۲]	۲۰	۱۰	۱۸/۵۴۴۴	۱۸/۵۹۶۱۱	۱۸/۷۲۶۳۹	۰/۰۹۴۳۹
روش پیشنهادی			۱۸/۵۳۲۱	۱۸/۵۶۳۱۴	۱۸/۶۶۳۱	۰/۰۸۳۱۱
آورام و فسولاکیس [۱۲]	۱۰۰	۱۰	۲۰/۴۳۳۵	۲۰/۴۷۲۱۹	۲۰/۶۱۵۲۳	۰/۲۱۸۲۸
روش پیشنهادی			۲۰/۴۲۱۵	۲۰/۴۱۰۳۱	۲۰/۵۵۲۴۱	۰/۱۸۳۵۷
آورام و فسولاکیس [۱۲]	۱۰۵	۱۰	۲۰/۹۷۸۸	۲۱/۰۱۱۸۶	۲۱/۱۶۵۵۲	۰/۲۷۵۸۸
روش پیشنهادی			۲۰/۹۶۲۱	۲۱/۱۳۳۵۴	۲۱/۶۸۳۴۲	۰/۲۸۳۶۲۱
آورام و فسولاکیس [۱۲]	۱	۱۰.۳	۱۲/۰۵۱۱	۱۲/۰۷۴۳۷	۱۲/۱۴۰۳۵	۰/۰۵۰۸۷
روش پیشنهادی			۱۲/۰۴۲۱	۱۲/۱۷۳۹۵	۱۲/۱۹۷۳۴	۰/۰۵۵۳۱
آورام و فسولاکیس [۱۲]	۲	۱۰.۳	۱۲/۹۴۹۹	۱۲/۹۸۴۷۷	۱۳/۰۷۴۷۳	۰/۰۵۲۸۳
روش پیشنهادی			۱۲/۹۳۸۹	۱۳/۰۳۴۹	۱۳/۱۱۴۹۱	۰/۰۵۰۴۱
آورام و فسولاکیس [۱۲]	۵	۱۰.۳	۱۴/۹۳۹۷	۱۴/۹۸۶۲۱	۱۵/۰۹۷۱۱	۰/۰۲۴۸۵
روش پیشنهادی			۱۴/۹۲۹۸	۱۴/۸۳۱۲۵	۱۴/۹۹۳۱	۰/۰۳۰۱۴
آورام و فسولاکیس [۱۲]	۲۰	۱۰.۳	۱۸/۶۱۴۹	۱۸/۶۵۸۸۹	۱۸/۷۶۱۰۳	۰/۰۳۰۷۲
روش پیشنهادی			۱۸/۶۰۲۳	۱۸/۵۳۳۱۴	۱۸/۶۳۴۵۲	۰/۰۲۳۲۱
آورام و فسولاکیس [۱۲]	۱۰۰	۱۰.۳	۲۰/۷۲۴۶	۱۸/۷۷۴۶۹	۲۰/۹۱۶۹۰	۰/۰۶۸۰۶
روش پیشنهادی			۲۰/۷۰۲۶	۲۰/۸۳۲۱۴	۲۰/۹۹۴۱۳	۰/۰۵۳۱۴
آورام و فسولاکیس [۱۲]	۱۰۵	۱۰.۳	۲۱/۳۷۵۳	۲۱/۴۲۲۳۴	۲۱/۵۶۴۸۸	۰/۰۷۴۳۰
روش پیشنهادی			۲۱/۳۵۳۲	۲۱/۵۵۳۱۲	۲۱/۶۳۳۷۱	۰/۰۶۵۳۱

۵- ارزیابی اثر عامل‌های گوناگون در تحلیل ناخطی پایداری قاب ساده

در این بخش، به بررسی اثرهای ضریب شکل نامنشوری، سختی دورانی پیوند تیر به ستون، سختی انتقالی تکیه‌گاه جانبی، سختی دورانی تکیه‌گاه پای ستون و برون محوری بار، بر مسیر ایستایی (رفتار پیش‌کمانشی و پس‌کمانشی) و بار بحرانی قاب مورد مطالعه پرداخته می‌شود.

• ۵-۱- اثر ضریب شکل نامنشوری n

نمودار مسیر ایستایی بار خارجی β_2 در برابر تغییرمکان جانبی $W1(1+\bar{\alpha})$ قاب فولادی شکل ۱، برای ضریب‌های شکل متفاوت و با در نظر گرفتن $(\lambda_{1,m} = \lambda_2 = 80, \bar{e} = 0, \rho = r = \bar{\alpha} = 1, \bar{C}_r = \bar{C}_i = \bar{R} = 10)$ ، در شکل ۳ به نمایش درآمده است. می‌توان دید، در این نمونه، افزایش ضریب شکل از صفر به چهار، می‌تواند سبب افزایشی در حدود ۶۶ درصد در بار کمانشی سازه نسبت به حالت مشابه منشوری گردد. یادآوری می‌کند، پاسخها نسبت به ستون منشوری همپایه شده‌اند. از سوی دیگر، آشکار است که برای یک مقدار مشخص از بار خارجی، تغییرمکان جانبی نوک ستون، با افزایش ضریب شکل، کاهش می‌یابد.



شکل ۳: نمودار مسیر ایستایی بار خارجی β^2 در برابر تغییر مکان جانبی قاب فولادی برای ضریب‌های شکل متفاوت و
 $(\lambda_{1,m} = \lambda_2 = 80, \bar{e} = 0, \rho = r = \bar{\alpha} = 1, \bar{C}_r = \bar{C}_t = \bar{R} = 10)$

• ۲-۵- اثر سختی دورانی پیوند تیر به ستون R ، سختی دورانی تکیه‌گاه C_r و سختی انتقالی تکیه‌گاه

جانبی C_t

برای بررسی اثرهای سختی دورانی پیوند نیمه‌سخت و سختی‌های انتقالی و دورانی تکیه‌گاه‌های کشسان، مسیر ایستایی پیش‌کمانشی و پس‌کمانشی قاب شکل ۱، برای سه حالت متفاوت، در شکل‌های ۴ تا ۶ رسم شده است. به طور کلی و بر پایه این شکل‌ها، دیده می‌شود که افزایش سختی این عامل‌ها، سبب افزایش بار کمانشی سازه می‌شود، به گونه‌ای که این افزایش، برای نسبت‌های سختی پایین (کمتر از ۵)، بسیار چشم‌گیر ولی برای نسبت‌های سختی بالا (بیشتر از ۵)، ناچیز است.

بر پایه شکل ۴، افزایش سختی دورانی پیوند تیر به ستون از $\bar{R} = 0$ (پیوند ساده)، تا $\bar{R} = 10^6$ (پیوند سخت)، به طور تقریبی، سبب افزایش ۶/۵ برابری بار بحرانی سازه خواهد شد. همچنین، افزایش چشم‌گیر عامل \bar{R} ، سبب تغییر قابل توجه در مسیر ایستایی پس‌کمانشی قاب فولادی می‌شود. شکل ۵ نشان می‌دهد که افزایش سختی دورانی پیوند ستون به تکیه‌گاه از $\bar{C}_r = 0$ (تکیه‌گاه ساده)، تا $\bar{C}_r = 10^5$ (تکیه‌گاه گیردار)، به طور تقریبی، سبب افزایش ۵ برابری بار بحرانی می‌شود. با وجود این، افزایش چشم‌گیر عامل \bar{C}_r ، اثر قابل-توجهی بر مسیر ایستایی پس‌کمانشی نخواهد داشت. بر پایه شکل ۶، افزایش سختی انتقالی تکیه‌گاه جانبی از $\bar{C}_t = 0$ (تکیه‌گاه غلتکی یا قاب بدون مهار)، تا $\bar{C}_t = 10^4$ (تکیه‌گاه ساده یا قاب مهاربندی‌شده)، به طور تقریبی، سبب افزایش ۱۳ برابری بار بحرانی قاب فولادی خواهد شد. همچنین، افزایش چشم‌گیر عامل \bar{C}_t ، سبب تغییر قابل توجهی در مسیر ایستایی پس‌کمانشی سازه می‌شود.

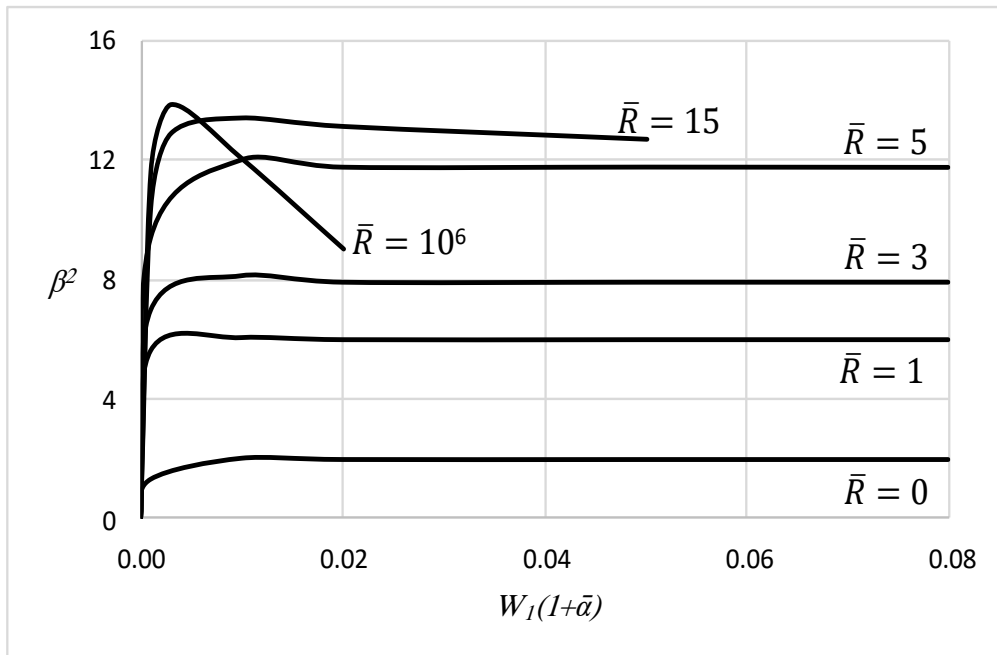
در ادامه و برای درک بهتر اثر عامل‌های یاد شده، مقدار بار بحرانی قاب نامنشوری با ضریب شکل‌های متفاوت و در نظر گرفتن $(\lambda_{1,m} = \lambda_2 = 80, \bar{e} = 0, \rho = r = \bar{\alpha} = 1)$ ، برای مقدارهای حدی (صفر و بی‌کران) سختی‌های دورانی و انتقالی در جدول ۳ می-

آید. پاسخ‌ها برای ضریب شکل $n=3$ در دو حالت خطی و ناخطی و ضریب شکل‌های $n=2$ و $n=0$ در حالت خطی و در هفت گونه قاب فولادی در دسترس قرار گرفته‌اند. یادآوری می‌کند، چشم‌پوشی از اثرهای کوتاه‌شدگی ناشی از خمش و نیروی محوری تیر در رابطه‌سازی-ها، سبب خطی شدن تحلیل می‌شود. بر پایه جدول ۳ و در میان گونه‌های حدی بررسی شده، سختی انتقالی تکیه‌گاه جانبی، بیشترین اثر بر بار کمانشی سازه را دارد. به سخن دیگر، با سنجش گونه‌های یکم و ششم، افزایش عامل \bar{C}_r از صفر تا بی‌کران، در بیشترین حالت، سبب افزایش ۱۳ برابری بار بحرانی قاب با ضریب شکل $n=3$ و افزایش ۸ برابری بار کمانشی قاب منشوری ($n=0$) می‌گردد. همچنین، در میان گونه‌های حدی بررسی شده، افزایش سختی دورانی پیوند تیر به ستون، در کمترین حالت (سنجش گونه‌های ششم و هفتم)، به ترتیب، سبب افزایش ۲۵ درصدی و ۳۴ درصدی بار بحرانی قاب با ضریب شکل‌های $n=3$ و $n=0$ خواهد شد. از سوی دیگر، افزایش عامل \bar{R} در بیشترین حالت (سنجش گونه‌های یکم و سوم)، سبب افزایش ۳ برابری بار کمانشی سازه با ضریب شکل $n=3$ و افزایش ۲/۵ برابری بار کمانشی قاب منشوری ($n=0$) می‌گردد. افزون بر این‌ها، با سنجش بار کمانشی گونه‌های چهارم با ششم و پنجم با هفتم، می‌توان دید که افزایش سختی دورانی پیوند ستون به تکیه‌گاه از صفر ($\bar{C}_r = 0$) تا بی‌کران ($\bar{C}_r = \infty$)، در نمونه‌های یاد شده و برای ضریب شکل‌های متفاوت، به طور تقریبی، سبب افزایش ۲ برابری بار بحرانی قاب می‌شود. با وجود این، سنجش بار کمانشی در گونه‌های دوم و سوم نشان می‌دهد که با افزایش عامل \bar{C}_r از صفر تا بی‌کران، بار بحرانی قاب با ضریب شکل‌های $n=3$ و $n=0$ ، به ترتیب، ۲/۷ برابر و ۴ برابر می‌گردد. خاطر نشان می‌کند، بر پایه یافته‌های کنونی، دیده می‌شود که افزایش ضریب شکل n ، همواره افزایش بار کمانشی سازه را در پی خواهد داشت.

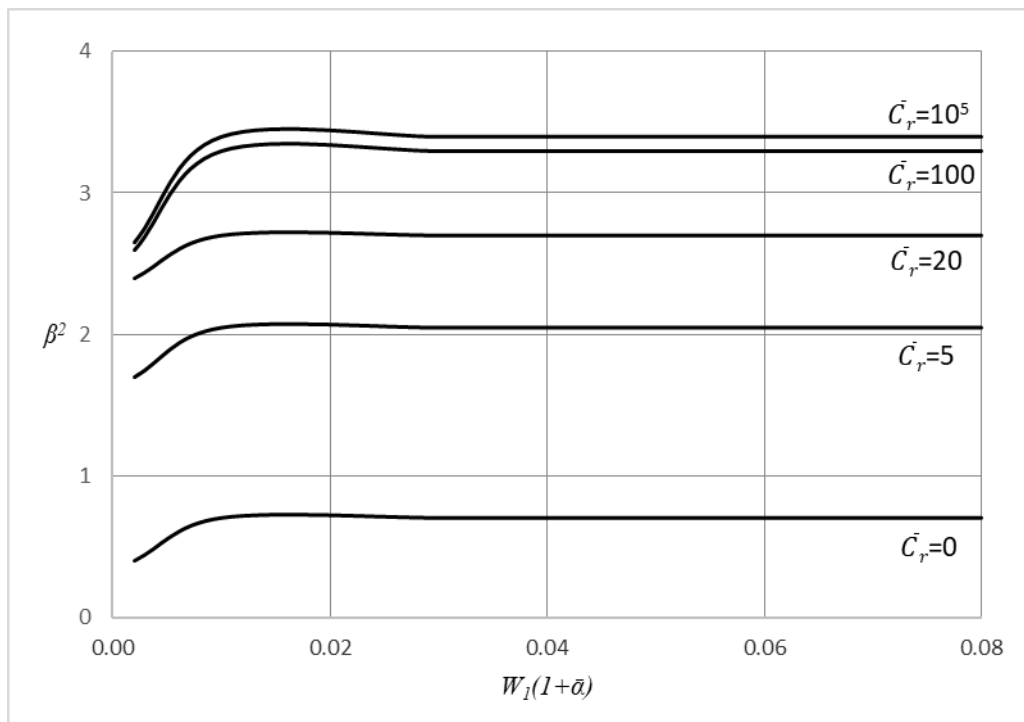
افزون بر این‌ها، جدول ۳ نشان می‌دهد که ناخطی پنداشتن تحلیل پایداری، سبب کاهش بار بحرانی سازه می‌گردد. برای نمونه، بار کمانشی گونه یکم در حالت خطی و برای $n=3$ ، حدود ۴ درصد، بیشتر از بار بحرانی در حالت ناخطی است.

جدول ۳: بار بحرانی قاب فولادی نامنشوری با پیوند نیمه‌سخت و تکیه‌گاه‌های کشسان در حالت‌های حدی ($\lambda_{1,m} = \lambda_2 = 80, \bar{e} = 0, \rho = r = \bar{\alpha} = 1$).

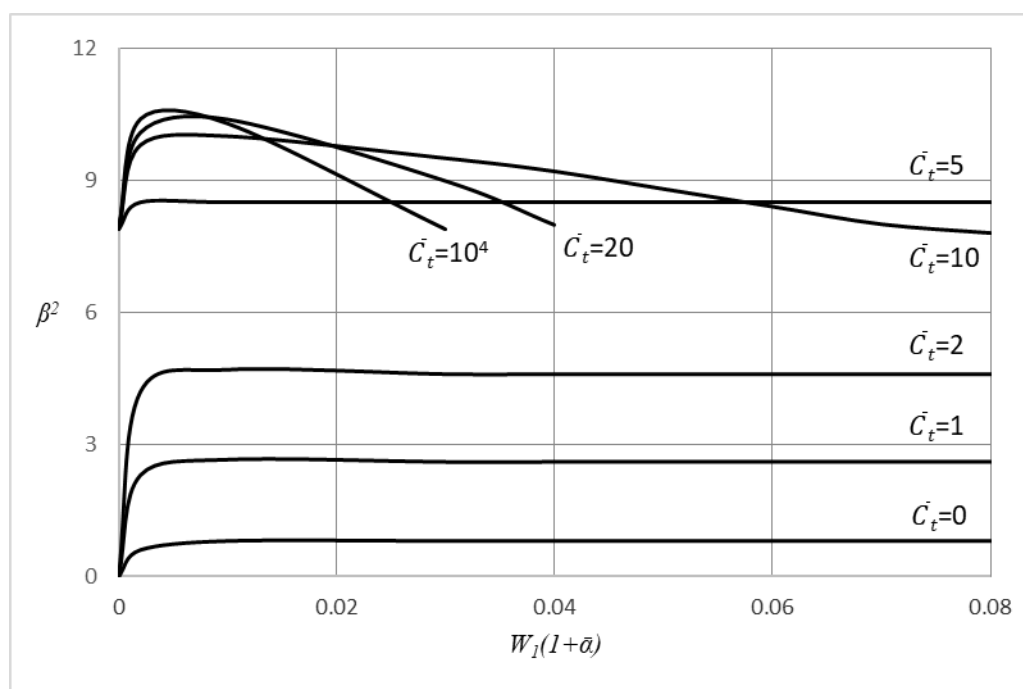
$P_{cr} l_1^2 / EI_0$				\bar{R}	\bar{C}_r	\bar{C}_t	گونه قاب
$n=0$	$n=2$	$n=3$					
تحلیل خطی	تحلیل خطی	تحلیل ناخطی	تحلیل خطی				
۲/۴۶۷۴	۳/۸۳۶۵	۴/۴۴۹۳	۴/۶۱۱۹	0	∞	0	گونه یکم
۱/۴۲۲۰	۳/۶۰۶۳	۵/۴۱۸۲	۵/۶۳۲۹	∞	0	0	۱/۶۶۹۰
۶/۰۳۰۲	۱۱/۱۴۰۷	۱۴/۷۴۰۳	۱۵/۱۵۳۸	∞	∞	0	گونه سوم
۹/۸۶۹۶	۲۰/۷۹۲۳	۲۸/۴۱۵۱	۲۹/۰۲۲۶	0	0	∞	گونه چهارم
۱۳/۸۸۵۹	۲۷/۷۶۹۱	۳۷/۲۲۱۹	۳۸/۰۵۹۹	∞	0	∞	گونه پنجم
۲۰/۱۹۰۷	۴۲/۱۰۹۰	۵۷/۸۷۶۲	۵۸/۹۵۹۶	0	∞	∞	گونه ششم
۲۶/۹۵۸۳	۵۳/۷۱۴۳	۷۲/۴۸۱۸	۷۳/۹۱۵۵	∞	∞	∞	گونه هفتم



شکل ۴: نمودار مسیر ایستایی بار خارجی β^2 در برابر تغییر مکان جانبی قاب فولادی نامنشوری ($n=2$) برای سختی‌های دورانی متفاوت پیوند تیر به ستون و $(\lambda_{1,m} = \lambda_2 = 100, \bar{e} = 0, \rho = r = \bar{\alpha} = 1, \bar{C}_r = \bar{C}_t = 10)$



شکل ۵: نمودار مسیر ایستایی بار خارجی β^2 در برابر تغییر مکان جانبی قاب فولادی نامنشوری ($n=2$) برای سختی‌های دورانی متفاوت تکیه‌گاه و $(\lambda_{1,m} = \lambda_2 = 100, \bar{e} = 0, \rho = r = \bar{\alpha} = 1, \bar{R} = 10, \bar{C}_t = 0)$



شکل ۶: نمودار مسیر ایستایی بار خارجی β^2 در برابر تغییر مکان جانبی قاب فولادی نامنشوری ($n=3$) برای سختی‌های انتقالی متفاوت تکیه‌گاه جانبی و ($\lambda_{1,m} = \lambda_2 = 100, \bar{e} = 0, \rho = r = \bar{\alpha} = 1, \bar{R} = 10, \bar{C}_r = 0$)

• ۳-۵- اثر برون محوری بار e

در این بخش، به منظور بررسی اثر برون محوری بار بر روی بار بحرانی، بار کمانشی قاب شکل ۱ با مقادیرهای متفاوت برون محوری بار در تحلیل ناخطی حساب می‌گردد. یافته‌ها در جدول ۴ در دسترس قرار گرفته‌اند. بر پایه جدول ۴، می‌توان دید که با افزایش برون محوری بار از $\bar{e}=0.000$ تا $\bar{e}=0.007$ در قاب بررسی شده، مقدار بار بحرانی ناخطی، حدود ۷ درصد کاهش می‌یابد. همچنین، آشکار است که افزایش برون محوری، سبب کاهش بار کمانشی سازه در تحلیل پایداری ناخطی می‌گردد. یادآوری می‌کند، تغییر برون محوری بار، تاثیری بر بار کمانشی در تحلیل پایداری خطی نخواهد داشت.

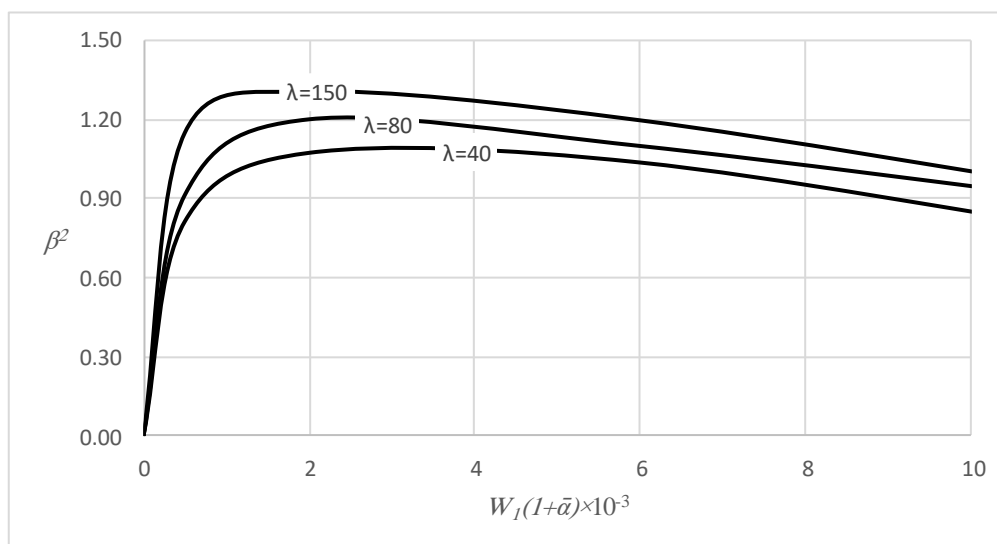
جدول ۴: بار بحرانی قاب فولادی منشوری با پیوند سخت و تکیه‌گاه‌های ساده ($\lambda_{1,m} = \lambda_2 = 80, \rho = r = 1, \bar{\alpha} = 10^7, \bar{C}_r = 0, \bar{C}_t = \bar{R} = \infty$)

-۰/۰۰۷۰۰۰	-۰/۰۰۵۰۰۰۰	-۰/۰۰۲۵۰۰۰	-۰/۰۰۱۳۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۴۷۲۸۸	\bar{e}
۱۲/۶۶۹۳	۱۲/۸۳۱۷	۱۳/۱۴۲۸	۱۳/۳۳۷۸	۱۳/۶۳۳۱	۱۳/۹۱۳۶	β_{cr}^2

• ۴-۵- اثر نسبت لاغری عضوها λ

برای بررسی اثر نسبت لاغری روی رفتار پیش‌کمانشی و پس‌کمانشی، قاب شکل ۱، با در نظر گرفتن و نسبت‌های متفاوت لاغری در شکل ۷ می‌آید. می‌توان دید که با افزایش لاغری، بار کمانشی سازه در تحلیل پایداری ناخطی افزایش خواهد یافت. به گونه‌ای که در نمونه بررسی شده، افزایش لاغری از $\lambda=40$ به $\lambda=150$ به طور تقریبی، سبب افزایش ۲۰ درصدی بار بحرانی قاب می‌شود. همچنین، بر پایه شکل ۷، برای یک مقدار مشخص از بار خارجی،

تغییر مکان جانبی نوک ستون، با افزایش لاغری، کاهش می‌یابد. یادآوری می‌کند، تغییر لاغری، تاثیری بر بار کمانشی در تحلیل پایداری خطی نخواهد داشت.



شکل ۷: نمودار مسیر ایستایی بار خارجی β^2 در برابر تغییر مکان جانبی $W_l(1+\bar{\alpha})$ قاب فولادی نامنشوری ($n=2$) برای لاغری‌های متفاوت و $(\bar{e} = 0, r = 0.5, \rho = \bar{\alpha} = 1, \bar{C}_r = \bar{C}_t = 0, \bar{R} = 1)$.

۶- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، تحلیل پایداری ناخطی یک قاب فولادی ساده با تکیه‌گاه‌های کشسان و پیوند نیمه‌سخت انجام پذیرفت. تیر سازه، منشوری، ولی ستون قاب، دارای مقطع I-شکل نامنشوری با ضریب‌های شکل متفاوت می‌باشد که زیر اثر بار برون محور قائم قرار دارد. باید افزود، سختی پیوندهای عضوی و تکیه‌گاهی با فنرهای خطی دورانی و انتقالی الگوسازی شدند. بر این پایه، نخست، با بهره‌جویی از نگره تیر اولر- برنولی، رابطه کارمایه نهفته کل سازه به دست آمد. در این راستا، کرنش‌ها کوچک پنداشته می‌شوند ولی تغییر مکان‌ها می‌توانند بزرگ باشند. سپس، با وارد نمودن شرط‌های مرزی طبیعی و هندسی، رابطه‌های تعادل ناخطی مسیر ایستایی پیش‌کمانشی و پس‌کمانشی قاب در دسترس قرار گرفتند. در ادامه، پس از صحت‌سنجی رابطه‌سازی پیشنهادی، به ارزیابی اثرهای ضریب شکل نامنشوری ستون، سختی تکیه-گاه‌های کشسان و پیوند نیمه‌سخت، برون محوری بار و نسبت لاغری عضوها، بر مسیر ایستایی و بار بحرانی قاب ساده پرداخته شد. با بررسی پاسخ‌های بدست آمده از نمونه‌های عددی، می‌توان به نتیجه‌های زیر دست یافت:

- ۱- افزایش ضریب شکل ستون نامنشوری، افزایش بار بحرانی سازه را در پی خواهد داشت. به گونه‌ای که در نمونه بررسی شده، افزایش ضریب شکل n از صفر به چهار، سبب افزایشی در حدود ۶۶ درصد، در بار کمانشی قاب، نسبت به حالت مشابه منشوری می‌گردد. از سوی دیگر، برای یک مقدار مشخص از بار خارجی، تغییر مکان جانبی نوک ستون، با افزایش ضریب شکل، کاهش می‌یابد.
- ۲- افزایش سختی پیوندهای تکیه‌گاهی (\bar{C}_r, \bar{C}_t) و عضوی (\bar{R}) ، سبب افزایش بار کمانشی سازه می‌شود، به گونه‌ای که این افزایش، برای نسبت‌های سختی پایین (کمتر از ۵)، بسیار چشم‌گیر، ولی برای نسبت‌های سختی بالا (بیشتر از ۵)، ناچیز است.

- ۳- در میان گونه‌های حدی بررسی شده، سختی انتقالی تکیه‌گاه جانبی، بیشترین اثر بر بار کمانشی سازه را دارد. به طوری که، افزایش عامل \bar{C}_r از صفر تا بی‌کران با در نظر گرفتن $(\lambda_{1,m} = \lambda_2 = 80, \bar{e} = 0, \rho = r = \bar{\alpha} = 1, \bar{R} = 0, \bar{C}_r = \infty)$ ، در بیشترین حالت، سبب افزایش ۱۳ برابری بار بحرانی قاب با ضریب شکل $n=3$ و افزایش ۸ برابری بار کمانشی قاب منشوری ($n=0$) می‌گردد.
- ۴- در میان نمونه‌های حدی بررسی شده، افزایش سختی دورانی پیوند تیر به ستون از صفر تا بی‌کران با در نظر گرفتن $(\lambda_{1,m} = \lambda_2 = 80, \bar{e} = 0, \rho = r = \bar{\alpha} = 1, \bar{C}_r = \bar{C}_t = \infty)$ و در کمترین حالت، به ترتیب، سبب افزایش ۲۵ درصدی و ۳۴ درصدی بار بحرانی قاب با ضریب شکل‌های $n=0$ و $n=3$ خواهد شد. از سوی دیگر، افزایش عامل \bar{R} از صفر تا بی‌کران با در نظر گرفتن $(\lambda_{1,m} = \lambda_2 = 80, \bar{e} = 0, \rho = r = \bar{\alpha} = 1, \bar{C}_r = \infty, \bar{C}_t = 0)$ در بیشترین حالت، سبب افزایش ۳ برابری بار کمانشی سازه با ضریب شکل $n=3$ و افزایش ۲/۵ برابری بار کمانشی قاب منشوری ($n=0$) می‌شود.
- ۵- افزایش سختی دورانی پیوند ستون به تکیه‌گاه از صفر ($\bar{C}_r = 0$) تا بی‌کران ($\bar{C}_r = \infty$)، در میان نمونه‌های بررسی شده با در نظر گرفتن $(\lambda_{1,m} = \lambda_2 = 80, \bar{e} = 0, \rho = r = \bar{\alpha} = 1, \bar{R} = \bar{C}_t = \infty)$ و برای ضریب شکل‌های متفاوت، در کمترین حالت، به طور تقریبی، سبب افزایش ۲ برابری بار بحرانی قاب می‌گردد. با وجود این، سنجش بار کمانشی گونه‌های حدی متفاوت نشان می‌دهد که با افزایش عامل \bar{C}_r از صفر تا بی‌کران با در نظر گرفتن $(\lambda_{1,m} = \lambda_2 = 80, \bar{e} = 0, \rho = r = \bar{\alpha} = 1, \bar{R} = \infty, \bar{C}_t = 0)$ و در بیشترین حالت، بار بحرانی قاب با ضریب شکل‌های $n=0$ و $n=3$ ، به ترتیب، ۲/۷ برابر و ۴ برابر می‌شود.
- ۶- ناخطی پنداشتن تحلیل پایداری، سبب کاهش بار بحرانی سازه می‌گردد. به طوری که، بار کمانشی نمونه بررسی شده، $(n=0, \lambda_{1,m} = \lambda_2 = 80, \bar{e} = 0, \rho = r = \bar{\alpha} = 1, \bar{R} = 0, \bar{C}_r = \infty, \bar{C}_t = 0)$ ، در حالت خطی، حدود ۴ درصد، بیشتر از بار بحرانی در حالت ناخطی است.
- ۷- افزایش برون محوری، سبب کاهش بار کمانشی ناخطی سازه می‌گردد. به گونه‌ای که افزایش برون محوری بار از $\bar{e}=0.000$ تا $\bar{e}=0.007$ در قاب بررسی شده، سبب کاهش مقدار بار بحرانی ناخطی در حدود ۷ درصد خواهد شد.
- ۸- با افزایش لاغری، بار کمانشی ناخطی سازه افزایش خواهد یافت. به طوری که در نمونه بررسی شده، $(n=2, \bar{e} = 0, r = 0.5, \rho = \bar{\alpha} = 1, \bar{C}_r = \bar{C}_t = 0, \bar{R} = 1)$ ، افزایش لاغری از $\lambda=40$ به $\lambda=150$ ، به طور تقریبی، سبب افزایش ۲۰ درصدی بار بحرانی قاب می‌شود. همچنین، برای یک مقدار مشخص از بار خارجی، تغییر مکان جانبی نوک ستون، با افزایش لاغری، کاهش می‌یابد.

مراجع

- [1] Kounadis, A.N., Giri, J. and Simitzes, G.J. (1977). Nonlinear stability analysis of an eccentrically loaded two-bar frame. *Journal of Applied Mechanics*. 44 (4), 701–706. DOI:https://doi.org/10.1115/1.3424160.
- [2] Simitzes, G.J. and Vlahinos, A.S. (1982). Stability analysis of a semi-rigidly connected simple frame. *Journal of Constructional Steel Research*. 2 (3), 29–32. DOI:https://doi.org/10.1016/0143-974X(82)90031-1.
- [3] Kounadis, A.N. and Ermopoulos, J.C. (1984). Postbuckling analysis of a simple frame with varying stiffness. *Acta Mechanica*. 54 (1–2), 95–105. DOI:https://doi.org/10.1007/BF01190599.
- [4] Avraam, T. and Kounadis, A. (1994). Elastica stability analysis of a simple frame under a follower force. *Engineering Structures*. 16 (4), 238–241. DOI:https://doi.org/10.1016/0141-0296(94)90062-0.
- [5] Kounadis, A.N. (2002). Dynamic buckling of simple two-bar frames using catastrophe theory. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 37 (7), 1249–1259. DOI:https://doi.org/10.1016/S0020-7462(01)00138-X.
- [6] Raftoyiannis, I.G. and Kounadis, A.N. (2009). Dynamic buckling of non-sway imperfect rectangular steel frames. *Engineering Transactions*. 57 (1), 3–15.
- [7] Ioannidis, G.I. and Raftoyiannis, I.G. (2005). A simplified nonlinear stability analysis of an imperfect rectangular two-bar frame. *Computational Mechanics*. 35 (2), 127–133. DOI:https://doi.org/10.1007/s00466-004-0608-7.
- [8] Avraam, T.P. and Raftoyiannis, I.G. (2010). Nonlinear buckling analysis of simple geometrically imperfect frames. *Archive of Applied Mechanics*. 80 (4), 441–450. DOI:https://doi.org/10.1007/s00419-009-0325-y.

[۹] رضایی پزند، م. و بمبائی چی، م. (۱۳۸۸)، تحلیل کشسان مرتبه دوم و پایداری قاب‌های فولادی با پیوندهای نیمه‌سخت. نشریه علمی و پژوهشی سازه و فولاد. ۵ (۶)، ۵۹-۸۱.

[۱۰] رضایی پزند، م.، شهبان، ف. و بمبائی چی، م. (۱۳۹۳)، تحلیل احتمالاتی پایداری قاب‌های فولادی ساده و دروازه‌ای با پیوندها و تکیه‌گاه‌های نرم. نشریه علمی و پژوهشی سازه و فولاد. ۱۰ (۱۶)، ۵۱-۷۹.

[11] Raftoyiannis, I.G. (2013). Nonlinear Stability Analysis of Simple Steel Frames with Load Imperfections. *Frontiers of Engineering Mechanics Research*. 2, 15–21.

[12] Avraam, T.P. and Fasoulakis, Z.C. (2013). Nonlinear postbuckling analysis of frames with varying cross-section columns. *Engineering Structures*. 56, 1–7. DOI:<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2013.04.010>.

[13] Fasoulakis, Z.C., Avraam, T.P. and Raftoyiannis, I.G. (2015). Dynamic buckling of partially-sway frames with varying stiffness using catastrophe theory. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 71, 116–126. DOI:<https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2014.10.002>.