

تحلیل ناپایداری الاستیک و ارتعاش آزاد تیر تیموشنکو ساخته شده از مواد مدرج تابعی با مقطع متغیر

معصومه سلطانی^{۱*}، بهروز عسگریان^۲، وحید جعفری دلیگانی^۳

۱- استادیار گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران،

۲- استاد دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

۳- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی سازه، گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران.

چکیده

در این پژوهش، رفتار پایداری و ارتعاش آزاد تیر تیموشنکو غیرمنشوری ساخته شده از مصالح مدرج تابعی (FGM) مورد مطالعه قرار گرفته است. ترکیب خصوصیات اعضای غیرمنشوری و مصالح مدرج تابعی باعث استفاده بهینه از تمام ظرفیت مقطع، کاهش چشمگیر وزن سازه و در نهایت سبب ایجاد بهترین حالت طراحی برای سیستم‌های ارتجاعی می‌شود. همچنین، تعیین فرکانس طبیعی ارتعاش اعضای سازه‌ای در تحلیل مسائل دینامیکی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. از سوی دیگر مسئله پایداری یکی از معیارهای اصلی طراحی اعضا است. بنابراین، در این پژوهش با استفاده از روش تفاضل محدود پیش رو، مرکزی و پس رو با دقت مرتبه دو، فرکانس طبیعی ارتعاش و بار کمانش بحرانی تیر تیموشنکو غیرمنشوری ساخته شده از مصالح مدرج تابعی با در نظر گرفتن سه نوع شرایط مرزی: دو سر گیردار، یک سر گیردار- یک سر آزاد و دو سر مفصلی تعیین شده است. خصوصیات مصالح در راستای طولی به صورت پیوسته و براساس قانون توزیع توانی تغییر می‌کند. در حالی که، خواص مواد در راستای ضخامت تیر ثابت و بدون تغییر باقی می‌ماند. همچنین به علت تغییر اندک ضریب پواسون مصالح در طول تیر، مقدار آن ثابت در نظر گرفته شده است. در انتها با مقایسه نتایج حاصل با نتایج مقاله‌های معتبر و همچنین مقادیر حاصل از نرم افزار آباکوس، صحت و دقت روش مذکور تایید شده است. همچنین، تاثیر عوامل مختلفی مانند توان ماده مدرج تابعی، ضریب باریک شونده مقطع و نوع تکیه‌گاه بر بار کمانش بحرانی و فرکانس طبیعی ارتعاش تیر ماهیچه‌ای به تفصیل مورد مطالعه قرار گرفته است و نشان داده شد که توان ماده تابعی تاثیر عمده‌ای بر رفتار پایداری و ارتعاشی تیر ماهیچه‌ای می‌گذارد.

کلمات کلیدی: تیر تیموشنکو ماهیچه‌ای، مواد مدرج تابعی، فرکانس طبیعی ارتعاش، بار کمانش بحرانی، روش تفاضل محدود

شناسه دیجیتال:		سابقه مقاله:			
10.22065/JSCE.2019.143692.1627	چاپ	انتشار آنلاین	پذیرش	بازنگری	دریافت
doi: 10.22065/JSCE.2019.143692.1627	۱۳۹۹/۰۷/۰۱	۱۳۹۹/۰۷/۰۱	۱۳۹۷/۱۰/۲۲	۱۳۹۷/۱۰/۲۱	۱۳۹۷/۰۵/۱۷
معصومه سلطانی				*نویسنده مسئول:	
msoltani@kashanu.ac.ir				پست الکترونیکی:	

Elastic instability and free vibration analyses of axially functionally graded Timoshenko beams with variable cross-section

Masoumeh Soltani¹, Behrouz Asgarian², Vahid jafari Deligani³

¹ Department of civil engineering, Faculty of engineering, University of Kashan, Kashan, Iran

² Faculty of civil engineering, K.N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran

³ Department of civil engineering, Faculty of engineering, University of Kashan, Kashan, Iran

ABSTRACT

In this paper, the critical buckling loads and natural frequencies of axially functionally graded non-prismatic Timoshenko beam with different boundary conditions are acquired using the Finite Difference Method (FDM). In the recent years, the use of functionally graded materials (FGMs) has been increasing in different mechanical components due to their conspicuous characteristics such as high strength, thermal resistance and optimal distribution of weight. The designer can thus produce structures with favorable stability and manage the distribution of material properties. In this study, the material properties of non-prismatic Timoshenko beams such as Young's modulus of elasticity and density of material are described by a power-law formulation along the beam axis. Contemplating elastic behavior, the system of equilibrium equations of non-uniform Timoshenko beam and the related boundary conditions are coupled in terms of the vertical displacement and the bending rotation of the cross-section. Afterwards, the system of second-order differential equations with variable coefficients and end conditions are discretized by finite difference formulations with second-order accuracy. Finally, the system of finite difference equations culminates in a set of simultaneous and linear equations and the critical buckling loads and natural frequencies are calculated by solving an eigenvalue problem of the obtained algebraic system. In order to demonstrate the accuracy and reliability of this approach to calculate elastic buckling loads and natural frequencies of functionally graded (FG) Timoshenko beams, one comprehensive example including axially non-homogeneous and homogeneous members with non-uniform cross-section is expressed. The numerical results in clamped-clamped, simply supported and fixed-free boundary conditions are accomplished. Moreover, the effect of various parameters such as volume fraction index, end conditions and the section variation on the elastic buckling and free vibration behavior of AFG Timoshenko beam are investigated in detail.

ARTICLE INFO

Receive Date: 08 August 2018

Revise Date: 11 January 2019

Accept Date: 12 January 2019

Keywords:

Tapered Timoshenko Beam, Axially Functionally Graded Material, Natural Frequency, Critical buckling load, Finite difference method

All rights reserved to Iranian Society of Structural Engineering.

doi: 10.22065/JSCE.2019.143692.1627

*Corresponding author: Masoumeh Soltani

Email address: msoltani@kashanu.ac.ir

۱- مقدمه

تیرها از نظر نوع رفتار به دو دسته تقسیم بندی می شوند: (۱) تیرهای تیموشنکو که در آن‌ها ابعاد سطح مقطع در مقایسه با طول تیر قابل توجه است. (۲) تیرهای اویلر-برنولی که ابعاد سطح مقطع در قیاس با طول تیر کوچک است. در تیرهای تیموشنکو اثرات نیروی برشی و اینرسی دورانی چشمگیر و غیرقابل صرف نظر کردن است. ولی در تیرهای اویلر-برنولی از این دو اثر چشم‌پوشی می‌شود.

مواد ناهمگن در زمینه‌های مختلف مهندسی مانند سپرهای حرارتی فضاپیماها، لوله‌های مبدل حرارتی، صنایع کشتی‌سازی و اخیراً در مهندسی عمران مورد بررسی و استفاده قرار گرفته‌اند. مصالح مدرج تابعی^۱ (FGM) را می‌توان به‌عنوان یک نوع ماده کامپوزیت که خواص آن به‌طور تدریجی در یک یا چند جهت در حال تغییر است، در نظر گرفت. در مواد مدرج تابعی به تدریج خصوصیات ساختاری با یک شیب خاص از یک ماده به ماده دیگری تبدیل می‌شود. تیرهای ساخته شده از مصالح مدرج می‌توانند برای اهداف مختلف دارای شرایط غیرهمگن مانند خستگی ناشی از توزیع بارهای گسترده غیریکنواخت، گرادیان‌های حرارتی متفاوت و بارهای ضربه‌ای بسیار بزرگ در یک نقطه بکار گرفته شوند.

در زمینه پایداری و ارتعاش آزاد تیرهای تیموشنکو و اویلر-برنولی ساخته شده با مصالح همگن تحقیقات بسیاری صورت گرفته است که در این خصوص می‌توان به پژوهش انجام شده توسط اسماعیل‌زاده و اوحدی [۱] اشاره نمود. در این تحقیق، دستگاه معادله دیفرانسیل حاکم بر پایداری و ارتعاش آزاد تیر تیموشنکو غیرمنشوری به یک معادله دیفرانسیل مرتبه چهار تبدیل شده و مقادیر بار کمانشی و فرکانس طبیعی با استفاده از روش سری‌های توانی محاسبه شده‌اند. همچنین حسنی و همکاران [۲] بار کمانش بحرانی ستون‌های متکی بر بستر الاستیک را با استفاده از روش انرژی تعیین نمودند.

در خصوص تیر تیموشنکو ساخته شده از مصالح مدرج تابعی نیز تحقیقات گسترده‌ای صورت گرفته است. تانگ و تبرک^۲ [۳] تحلیل ارتعاش آزاد تیر تیموشنکو با مصالح مدرج تابعی که با قانون نمایی ساخته شده‌اند را انجام دادند. آیدوقدو و تسکین^۳ [۴] با استفاده از روش ناویه فرکانس طبیعی تیرهای ساخته شده از مصالح مدرج تابعی را با در نظر گرفتن جابه‌جایی محوری محاسبه نمودند. سیسمک و همکاران^۴ [۵] معادله حاکم بر ارتعاش آزاد حاکم بر تیرهای ساخته شده از مصالح مدرج تابعی را بر اساس تئوری تغییر شکل‌های برشی مرتبه اول و بالاتر با استفاده از معادلات لاگرانژ بدست آوردند. عطار نژاد و همکاران [۶] رفتار پایداری تیرهای ساخته شده با مصالح مدرج تابعی را براساس تئوری تیر تیموشنکو و با استفاده از یک روش مکانیکی جدید بررسی نمودند. شهبها و همکاران [۷] بار کمانش بحرانی و فرکانس طبیعی ارتعاش را برای تیر تیموشنکو با مقطع متغیر با توجه به شرایط مرزی کلاسیک و غیرکلاسیک با ارائه یک روش عددی جدید بر اساس روش اجزاء محدود محاسبه نمودند. آلشوربرگی و همکاران^۵ [۸] تجزیه و تحلیل فرکانس ارتعاش آزاد و رفتار دینامیکی تیرهای ساخته شده از مصالح مدرج تابعی را برای توزیع‌های مختلف مصالح با استفاده از روش اجزاء محدود انجام دادند. شهبها و راجاسکاران [۹] ارتعاش آزاد و پایداری خطی و ارتجاعی تیر اویلر-برنولی با مقطع متغیر ساخته شده از مصالح مدرج تابعی محوری را بررسی نمودند. هوآنگ و همکاران^۶ [۱۰] به تحقیق درباره رفتار ارتعاشی تیرهای ساخته شده از مصالح مدرج تابعی پرداختند. در بررسی‌هایی که توسط سو و همکاران^۷ [۱۱] بر روی انواع مختلف تیرهای ساخته شده با مصالح هدفمند صورت گرفته، نشان داده شده است که به دلیل تغییر مدول الاستیسیته و چگالی در مقطع، همگرایی فرکانس‌های ارتعاشی به نوع روش عددی انتخاب شده بستگی دارد. سرکار و همکاران^۸ [۱۲] ارتعاشات تیر تیموشنکو با سطح مقطع ثابت با شرایط تکیه‌گاهی دو سر گیردار را بررسی کردند. بامبیل و همکاران^۹ [۱۳] به تحلیل و بررسی تیرهای تیموشنکو با سطح مقطع و مصالح پلکانی پرداختند. پرادهان و چاکراورتی^{۱۰} [۱۴-۱۵] رفتار دینامیکی تیرهای ساخته شده

¹ Functionally Graded Materials

² Tong & Tabarrok

³ Aydogdu & Taskin

⁴ Shishmek & Kocaturk

⁵ Alshorbagy et al.

⁶ Huang et al.

⁷ Su et al.

⁸ Sarkar et al.

⁹ Bambill et al.

¹⁰ Pradhan & Chakraverty

از مصالح مدرج تابعی را با استفاده از روش عددی رایلی-ریتر مطالعه نمودند. در پژوهشی دیگر، دنگ و چنگ¹¹ [۱۶] ماتریس سختی دینامیکی را برای تیرهای مدرج تابعی دو جهته با روش‌های کلاسیک محاسبه کردند. ترین و همکاران¹² [۱۷] فرکانس طبیعی ارتعاش و بار کمناشی تیرهای جدارنازک ساخته شده از مصالح هدفمند تحت بارهای دینامیکی و حرارتی را محاسبه نمودند. نگوین و همکاران¹³ [۱۸] پدیده ارتعاش آزاد تیرهای I شکل و قوطی ساخته شده از مصالح هدفمند یک جهته را بررسی کردند. همچنین، هواری و همکاران¹⁴ [۱۹] و تونسی و همکاران¹⁵ [۲۰] به تجزیه و تحلیل ارتعاشات ورق‌های مدرج تابعی با در نظر گرفتن تئوری مراتب بالای برش مبادرت نموده‌اند. پائول و داس¹⁶ [۲۱] ارتعاش آزاد تیرهای تیموشنکو پیش‌تنیده ساخته شده از مصالح مدرج تابعی را با استفاده از روش حساب تغییرات مورد بررسی قرار دادند. اخیراً، منظری و شهبان [۲۲] پاسخ دینامیکی غیرخطی هندسی صفحات ساخته شده از مواد مدرج تابعی متشکل از استاینلس استیل-سیلیکون نیتريد تحت بارهای انفجاری را به کمک نرم افزار اجزاء محدود آباکوس مطالعه نمودند. همچنین، براساس روش سری توانی ماتریس سختی جدیدی برای تیر تیموشنکو غیرمنشوری ساخته شده از مواد مدرج تابعی توسط سلطانی و عسگریان [۲۳] ارائه شد.

در این پژوهش فرکانس طبیعی ارتعاش و بار کمناش بحرانی برای تیر تیموشنکو ساخته شده از مصالح مدرج تابعی با استفاده از روش تفاضل محدود تعیین می‌شود. همان‌گونه که مشاهده شد، بررسی رفتار پایداری و ارتعاش آزاد اعضای مذکور با استفاده از روش تفاضل محدود تاکنون انجام نشده، بلکه از روش‌های دیگر همچون روش اجزاء محدود، مربعات دیفرانسیل، رایلی-ریتر و یا سری توانی استفاده شده است. دستگاه معادله دیفرانسیل مرتبه دو حاکم بر رفتار تیر تیموشنکو که شامل دو معادله وابسته به مولفه‌های تغییر شکل و با ضرایب متغیر است، با استفاده از روابط حاکم بر تفاضل محدود با دقت مرتبه دو حل می‌گردد. سپس، با توجه به شرایط مرزی مسئله و حل مقادیر ویژه، مقدار بار کمناش بحرانی و فرکانس ارتعاشی محاسبه می‌گردد. در پایان به منظور نشان دادن توانایی و صحت روش ارائه شده، چندین مثال عددی شامل تیر تیموشنکو با شرایط مرزی متفاوت ارائه شده است. در طی مسائل حل شده، اثر هم‌زمان تغییر ابعاد نیم‌رخ عضو، شرایط تکیه‌گاهی و خصوصیات مصالح بر رفتار پایداری و ارتعاش آزاد تیر تیموشنکو مطالعه شده است. با مقایسه نتایج بدست آمده از روش معرفی شده در این مطالعه با مقادیر ارائه شده توسط محققان دیگر و نتایج حاصل از نرم‌افزار آباکوس، توانایی و دقت روش تفاضل محدود در محاسبه مقادیر بار بحرانی و فرکانس طبیعی ارتعاش تیر تیموشنکو ناهمگن با سطح مقطع متغیر تایید شده است.

۲- الگو سازی مسأله

یک تیر تیموشنکو غیرمنشوری ساخته شده از مواد تابعی به طول L که تحت بار متمرکز فشاری P در انتهای خود قرار دارد، در نظر گرفته شده است. مصالح تیر در راستای طول آن از ترکیب فلز و سرامیک ساخته شده است. مطابق تئوری حاکم بر تیر تیموشنکو در حالتی که دستگاه مختصات بر روی مرکز سطح مقطع قرار گرفته باشد، جابه‌جایی محوری و عرضی به ترتیب توسط روابط زیر بیان می‌شوند:

$$U(x, y, z) = -z\theta(x) \quad (1)$$

$$W(x, y, z) = w(x) \quad (2)$$

که در آن x, y, z مولفه‌های مختصات هندسی در جهت طولی، جانبی و ضخامت هستند. همچنین θ و w به ترتیب برابر با دوران خمشی و جابه‌جایی عرضی است که در شکل (۱) نشان داده شده‌اند. دستگاه معادله دیفرانسیل حاکم بر تیر تیموشنکو ارتجاعی بر اساس میدان جابه‌جایی حاکم بر آن شامل تغییر مکان عرضی (w) و دوران سطح مقطع (θ) به صورت ذیل تعریف شده است [۶]:

$$(EI\theta') + kGA(w' - \theta) + \rho I \omega^2 \theta = 0 \quad (3)$$

¹¹ Deng & Cheng

¹² Trinh et al.

¹³ Nguyen et al.

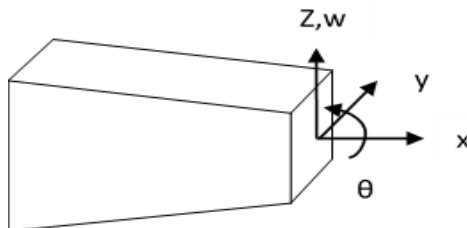
¹⁴ Houari et al.

¹⁵ Tounsi et al.

¹⁶ Paul & Das

$$(kGA(w' - \theta))' - (Pw)'' + \rho A \omega^2 w = 0 \quad (4)$$

که در روابط فوق، I ممان اینرسی نیمرخ تیر، k ضریب برش تیموشنکو و A مساحت مقطع در هر نقطه است. همچنین E و G به ترتیب معرف ضریب ارتجاعی یانگ و مدول برشی هر نقطه هستند. ω فرکانس طبیعی حاکم بر ارتعاش آزاد و P بار کمانش بحرانی است.



شکل ۱: میدان جابه‌جایی حاکم بر تیر تیموشنکو

همان‌گونه که توضیح داده شد، مواد تابعی دسته‌ای از مواد ناهمگن هستند و خواص، تابعی از کسر حجمی مواد تشکیل دهنده در هر نقطه است. به عبارت دیگر، در مصالح مدرج تابعی، ویژگی‌های مصالح هر نقطه از تیر توسط یک قانون اختلاط در نظر گرفته شده و به صورت تابعی از ویژگی‌های مواد تشکیل دهنده آن در هر نقطه تعریف می‌شود. در این پژوهش، تیر FG مورد نظر از دو جزء سرامیکی و فلزی تشکیل شده است. طوریکه خصوصیات ماده در راستای طولی تیر با مقطع متغیر به صورت پیوسته و تدریجی از خواص کاملاً سرامیکی (زیرکونیا) در انتهای سمت چپ، به خواص کاملاً فلزی (آلومینیوم) در سمت راست تغییر می‌کند. در حالی که، جنس مصالح تیر در راستای ضخامت ثابت در نظر گرفته شده است. در این مقاله، فرض شده است که توزیع خواص ماده در امتداد طول از قانون اختلاط خطی کسر حجمی مواد پیروی می‌کند، رابطه (۵) را خواهیم داشت [۲۴-۲۶]:

$$P(x) = P_Z V_Z(x) + P_A V_A(x) \quad (5)$$

زیرنویس‌های A و Z به ترتیب به خواص فلز (آلومینیوم) و سرامیک (اکسید زیرکونیوم) اشاره می‌کنند. در رابطه فوق، V_A و V_Z به ترتیب نشان دهنده کسر حجمی فلز و سرامیک در ابتدا و انتهای تیر هستند. P_A و P_Z بیانگر خواص فلزی و سرامیکی (ضریب یانگ، ضریب پواسون و ضریب انبساط حرارتی) هستند. با استفاده از قانون توزیع توانی، کسر حجمی جزء فلزی در هر نقطه در امتداد محور طولی تیر به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\begin{aligned} V_Z(x) + V_A(x) &= 1 \\ V_A(x) &= \left(\frac{x}{L}\right)^m \end{aligned} \quad (6)$$

در رابطه (۶)، پارامتر m شاخص کسر حجمی ماده تابعی است که چگونگی ترکیب کسر حجمی سرامیک و فلز را در راستای طولی مشخص می‌کند و یک عدد بزرگ‌تر و یا مساوی صفر است. لازم به ذکر است که مقادیر صفر و بی‌نهایت برای این پارامتر، به ترتیب معرف فلز خالص و سرامیک خالص است. در نتیجه، تغییرات جرم واحد حجم و ضریب ارتجاعی مصالح مصرفی در امتداد محور طولی تیر به ترتیب مطابق با رابطه‌های (۷) و (۸) در نظر گرفته شده‌اند:

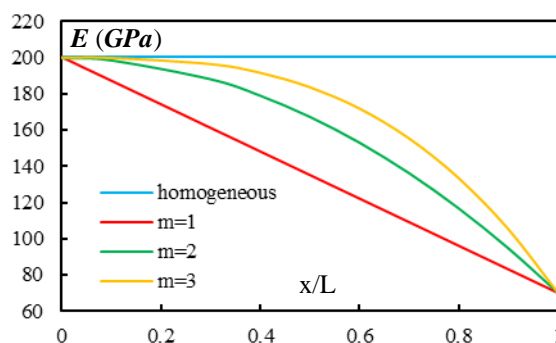
$$\rho(x) = \rho_Z + (\rho_A - \rho_Z) \left(\frac{x}{L}\right)^m \quad (7)$$

$$E(x) = E_Z + (E_A - E_Z) \left(\frac{x}{L}\right)^m \quad (8)$$

که مقادیر مرتبط با ضریب یانگ و چگالی اکسید زیرکونیوم و آلومینیوم به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} \text{ZrO}_2 : E_0 &= 200\text{GPa}; \quad \rho_0 = 5700\text{kg} / \text{m}^3 \\ \text{Al} : E_1 &= 70\text{GPa}; \quad \rho_1 = 2702\text{kg} / \text{m}^3 \end{aligned}$$

به علت تفاوت بسیار کم ضریب پوآسون مصالح سازنده تیر، مقدار آن در طول ثابت و برابر 0.3 در نظر گرفته شده است. در این مطالعه، m برابر با یک، دو و سه در نظر گرفته شده است. با توجه به روابط (۷) و (۸) مشخص است که با افزایش شاخص کسر حجمی (m) درصد حضور اکسید زیرکونیم در طرح اختلاط ماده تابعی افزایش می‌یابد و این منجر به افزایش وزن و سختی ماده سازنده تیر می‌شود. تغییرات مدول الاستیسیته در امتداد عضو برای مصالح همگن (زیرکونیا) و مدرج تابعی با توان‌های مختلف در طول عضو در نمودارهای شکل (۲) نشان داده شده‌اند.



شکل ۲: تغییرات ضریب الاستیسیته حاکم بر مصالح همگن و مدرج تابعی با شاخص کسر حجمی متفاوت در مختصات محلی عضو

با توجه به دستگاه معادله دیفرانسیل حاکم بر تیر تیموشنکو در صورت استفاده از مصالح مدرج تابعی حل معادله دیفرانسیل حاکم بر تیر تیموشنکو با استفاده از روش‌های معمول تقریباً غیرممکن است؛ به این دلیل باید از یکی از روش‌های عددی موجود استفاده کرد. یکی از کارآمدترین و مناسب‌ترین این روش‌ها، روش تفاضل محدود است. این روش هنگامی که معادلات دیفرانسیل خطی و با ضرایب متغیر باشند دارای دقت مناسب است و برای مسائل مهندسی قابل استفاده است.

۳- روش عددی

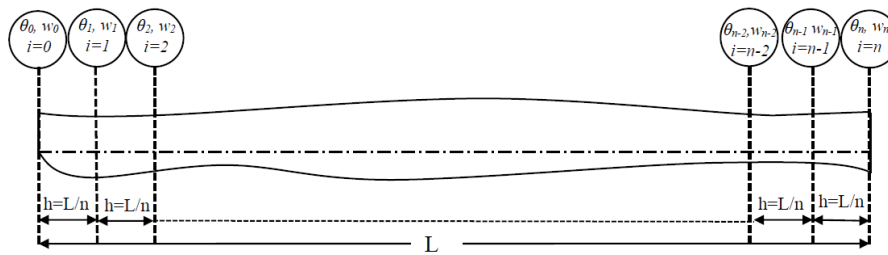
روش تفاضل محدود^{۱۷} (FDM) یکی از قدرتمندترین روش‌های تقریبی برای حل معادلات دیفرانسیل با ضرایب متغیر با توجه به شرایط مرزی حاکم بر مسئله می‌باشد. اساس این روش بر این استوار است که مشتقات مراتب مختلف تابع مجهول در یک نقطه را می‌توان با عبارات جبری حاصل شده از بسط تیلور جایگزین نمود. این روش عددی مسئله را به یک دستگاه چند معادله چند مجهول جبری تبدیل می‌کند.

تیر غیرمنشوری با طول L طبق فرضیات حاکم بر روش تفاضل محدود مرکزی به n قسمت تقسیم می‌گردد و در نتیجه طول هر قسمت برابر $h=L/n$ در نظر گرفته می‌شود. شیوه‌ی تقسیم‌بندی و شماره‌گذاری نقاط بر اساس روابط تفاضل محدود در شکل (۳) نشان داده شده است. با توجه به تعاریف تفاضل محدود مرکزی با خطای مرتبه دو، مشتقات مرتبه اول و دوم تغییر شکل تیر تیموشنکو به قرار زیر می‌باشند:

$$\frac{d(\theta, w)}{dx} = \frac{(\theta_{i+1}, w_{i+1}) - (\theta_{i-1}, w_{i-1})}{2h} \quad (9)$$

$$\frac{d^2(\theta, w)}{dx^2} = \frac{(\theta_{i+1}, w_{i+1}) - 2(\theta_i, w_i) + (\theta_{i-1}, w_{i-1})}{h^2}$$

¹⁷ Finite Difference Method (FDM)



شکل ۳: تقسیم‌بندی طول تیر به المان‌های یکسان بر اساس روش تفاضل محدود

معادلات حاکم بر پایداری ارتجاعی تیر تیموشنکو با نیم‌رخ متغیر و ساخته شده از مواد مدرج تابعی به صورت ذیل ساده می‌گردند:

$$E \frac{dI}{dx} \frac{d\theta}{dx} + I \frac{dE}{dx} \frac{d\theta}{dx} + EI \frac{d^2\theta}{dx^2} + kGA \frac{dw}{dx} - kGA \theta(x) + \rho I \omega^2 \theta(x) = 0 \quad (10)$$

$$kG \frac{dA}{dx} \frac{dw}{dx} + kA \frac{dG}{dx} \frac{dw}{dx} - kG \frac{dA}{dx} \theta(x) - kA \frac{dG}{dx} \theta(x) + kAG \frac{d^2w}{dx^2} - kAG \frac{d\theta}{dx} \quad (11)$$

$$-P \frac{d^2w}{dx^2} + A \rho w(x) \omega^2 = 0$$

سپس، روابط حاکم بر روش تفاضل محدود مرکزی را در معادلات فوق جایگذاری می‌کنیم:

$$E_i I_i' \left[\frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2h} \right] + E_i' I_i \left[\frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2h} \right] + E_i I_i \left[\frac{\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}}{h^2} \right] \quad (12)$$

$$+ kG_i A_i \left[\frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h} \right] - kG_i A_i \theta_i + \omega^2 \rho_i I_i \theta_i = 0$$

$$kG_i A_i' \left[\frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h} \right] + kA_i G_i' \left[\frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h} \right] \quad (13)$$

$$- kG_i A_i' \theta_i - kA_i G_i' \theta_i + kG_i A_i \left[\frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2} \right]$$

$$- kG_i A_i \left[\frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2h} \right] - P \left[\frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2} \right] + \omega^2 \rho_i A_i w_i = 0$$

مرتب شده روابط (۱۲) و (۱۳) در روابط (۱۴) و (۱۵) نشان داده شده است:

$$\theta_{i-1} \left[\frac{-1}{2h} I_i E_i' - \frac{1}{2h} E_i I_i' + \frac{1}{h^2} E_i I_i \right] + \theta_i \left[\frac{-2}{h^2} E_i I_i - kG_i A_i + \omega^2 \rho_i I_i \right] \quad (14)$$

$$+ \theta_{i+1} \left[\frac{1}{2h} I_i E_i' + \frac{1}{2h} E_i I_i' + \frac{1}{h^2} E_i I_i \right] + w_{i-1} \left[\frac{-k}{2h} G_i A_i \right] + w_{i+1} \left[\frac{k}{2h} G_i A_i \right] = 0$$

$$\theta_{i-1} \left[\frac{k}{2h} G_i A_i \right] + \theta_i \left[-kA_i G_i' - kG_i A_i' \right] + \theta_{i+1} \left[\frac{-k}{2h} G_i A_i \right]$$

$$+ w_{i-1} \left[\frac{-P}{h^2} + \frac{k}{h^2} G_i A_i - \frac{k}{2h} A_i G_i' - \frac{k}{2h} G_i A_i' \right] + w_i \left[\frac{2P}{h^2} - \frac{2k}{h^2} G_i A_i + \omega^2 \rho_i A_i \right] \quad (15)$$

$$+ w_{i+1} \left[-\frac{P}{h^2} + \frac{k}{2h} A_i G_i' + \frac{k}{2h} G_i A_i' + \frac{k}{h^2} G_i A_i \right] = 0$$

در صورتی که عضو به n قسمت مساوی تقسیم شود، روابط فوق را بایستی برای تمامی نقاط $i=1, 2, 3, \dots, n-1$ نوشت و در نتیجه، $2(n-1)$ معادله وابسته حاصل می‌گردد.

همواره برای حل دستگاه معادله دیفرانسیل به شرایط مرزی نیاز است. در این پژوهش سه تیر با شرایط مرزی دو سر مفصل، دو سر گیردار و یک سر گیردار - یک سر آزاد در نظر گرفته شده‌اند. بر اساس فرضیات حاکم بر تیر تیموشنکو، شرایط مرزی برای هر دو انتهای اعضای تحلیل شده مطابق روابط زیر در نظر گرفته شده‌اند:

$$\frac{d\theta}{dx} = 0 \quad w = 0 \quad \text{انتهای مفصلی: (۱۶)}$$

$$\theta = 0 \quad w = 0 \quad \text{انتهای گیردار: (۱۷)}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = 0 \quad kGA \left(\frac{dw}{dx} - \theta \right) - P \frac{dw}{dx} = 0 \quad \text{انتهای آزاد: (۱۸)}$$

در این پژوهش جهت افزایش دقت و جلوگیری از تشکیل نقاط مجازی در ابتدا و انتهای تیر، معادلات حاکم بر شرایط مرزی با استفاده از روابط تفاضلات پیشین و پسین با خطای مرتبه دو گسسته شده‌اند:

$$\frac{d(w, \theta)}{dx} = \frac{-3(w_i, \theta_i) + 4(w_{i+1}, \theta_{i+1}) - (w_{i+2}, \theta_{i+2})}{2h} \quad (۱۹)$$

$$\frac{d(w, \theta)}{dx} = \frac{3(w_i, \theta_i) - 4(w_{i-1}, \theta_{i-1}) + (w_{i-2}, \theta_{i-2})}{2h}$$

در ادامه، با جایگذاری روابط حاکم بر تفاضلات محدود پیش‌رو و پس‌رو در شرایط مرزی ابتدا و انتهای تیر، شرایط تکیه‌گاهی به صورت زیر ساده می‌گردند:

$$x = 0 \rightarrow i = 0 \Rightarrow \begin{cases} -3\theta_0 + 4\theta_1 - \theta_2 = 0 \\ w_0 = 0 \end{cases} \quad \text{انتهای مفصلی: (۲۰)}$$

$$x = L \rightarrow i = n \Rightarrow \begin{cases} 3\theta_n - 4\theta_{n-1} + \theta_{n-2} = 0 \\ w_n = 0 \end{cases}$$

$$x = 0 \rightarrow i = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta_0 = 0 \\ w_0 = 0 \end{cases} \quad \text{انتهای گیردار: (۲۱)}$$

$$x = L \rightarrow i = n \Rightarrow \begin{cases} \theta_n = 0 \\ w_n = 0 \end{cases}$$

$$x = 0 \rightarrow i = 0 \Rightarrow \begin{cases} -3\theta_0 + 4\theta_1 - \theta_2 = 0 \\ (kA(x=0)G(x=0) - P) \frac{-3w_0 + 4w_1 - w_2}{2h} - kA(x=0)G(x=0)\theta_0 = 0 \end{cases} \quad \text{انتهای آزاد: (۲۲)}$$

$$x = L \rightarrow i = n \Rightarrow \begin{cases} 3\theta_n - 4\theta_{n-1} + \theta_{n-2} = 0 \\ (kA(x=L)G(x=L) - P) \frac{3w_n - 4w_{n-1} + w_{n-2}}{2h} - kA(x=L)G(x=L)\theta_n = 0 \end{cases}$$

$2(n-1)$ معادله تفاضلات محدود بدست آمده در نقاط حاصل از تقسیم‌بندی و دو شرط مرزی اضافی در هر انتها منجر به یک دستگاه معادله خطی همگن به ابعاد $2(n+1)$ می‌گردد. در پایان، روابط حاصل شده را می‌توان به فرم ماتریسی ذیل نوشت:

$$([R] + P[R^*] + \omega^2[R^{**}])_{2(n+1) \times 2(n+1)} \times \{A\}_{2(n+1) \times 1} = \{0\}_{2(n+1) \times 1} \quad (۲۳)$$

به طوری که:

$$\{A\}^T = \{\theta_0 \ \theta_1 \ \dots \ \theta_{n-1} \ \theta_n \ w_0 \ w_1 \ \dots \ w_{n-1} \ w_n\} \quad (24)$$

همچنین در رابطه (۲۰)، ماتریس ضرایب $[R]$ به ابعاد $2(n+1) * 2(n+1)$ می باشد که شامل جملات مربوط به خصوصیات هندسی و مصالح (صلبیت خمشی و برشی) است. درایه های ماتریس مذکور مطابق با روابط ۲۵ تا ۳۵ محاسبه می شوند.

$$R_{2i-1,i} = -\frac{1}{2h}E\left(i\frac{L}{n}\right)I'\left(i\frac{L}{n}\right) - \frac{1}{2h}I\left(i\frac{L}{n}\right)E'\left(i\frac{L}{n}\right) + \frac{1}{h^2}E\left(i\frac{L}{n}\right)I\left(i\frac{L}{n}\right) \quad (25)$$

$$R_{2i-1,i+1} = \frac{-2}{h^2}E\left(i\frac{L}{n}\right)I\left(i\frac{L}{n}\right) - kG\left(i\frac{L}{n}\right)A\left(i\frac{L}{n}\right) \quad (26)$$

$$R_{2i-1,i+2} = \frac{1}{2h}E\left(i\frac{L}{n}\right)I'\left(i\frac{L}{n}\right) + \frac{1}{2h}I\left(i\frac{L}{n}\right)E'\left(i\frac{L}{n}\right) + \frac{1}{h^2}E\left(i\frac{L}{n}\right)I\left(i\frac{L}{n}\right) \quad (27)$$

$$R_{2i-1,(n+1)+i} = \frac{-k}{2h}G\left(i\frac{L}{n}\right)A\left(i\frac{L}{n}\right) \quad (28)$$

$$R_{2i-1,(n+1)+(i+2)} = \frac{k}{2h}G\left(i\frac{L}{n}\right)A\left(i\frac{L}{n}\right) \quad (29)$$

$$R_{2i,i} = \frac{k}{2h}G\left(i\frac{L}{n}\right)A\left(i\frac{L}{n}\right) \quad (30)$$

$$R_{2i,i+1} = -kA\left(i\frac{L}{n}\right)G'\left(i\frac{L}{n}\right) - kG\left(i\frac{L}{n}\right)A'\left(i\frac{L}{n}\right) \quad (31)$$

$$R_{2i,i+2} = \frac{-k}{2h}G\left(i\frac{L}{n}\right)A\left(i\frac{L}{n}\right) \quad (32)$$

$$R_{2i,(n+1)+i} = \frac{k}{h^2}G\left(i\frac{L}{n}\right)A\left(i\frac{L}{n}\right) - \frac{k}{2h}A\left(i\frac{L}{n}\right)G'\left(i\frac{L}{n}\right) - \frac{k}{2h}G\left(i\frac{L}{n}\right)A'\left(i\frac{L}{n}\right) \quad (33)$$

$$R_{2i,(n+1)+(i+1)} = -\frac{2k}{h^2}G\left(i\frac{L}{n}\right)A\left(i\frac{L}{n}\right) \quad (34)$$

$$R_{2i,(n+1)+(i+2)} = \frac{k}{2h}A\left(i\frac{L}{n}\right)G'\left(i\frac{L}{n}\right) + \frac{k}{2h}G\left(i\frac{L}{n}\right)A'\left(i\frac{L}{n}\right) + \frac{k}{h^2}G\left(i\frac{L}{n}\right)A\left(i\frac{L}{n}\right) \quad (35)$$

درایه های ماتریس R^* به صورت زیر تعریف می گردند:

$$R^*_{2i,(n+1)+i} = \frac{-1}{h^2} \quad (36)$$

$$R^*_{2i,(n+1)+(i+1)} = \frac{2}{h^2} \quad (37)$$

$$R^*_{2i,(n+1)+(i+2)} = -\frac{1}{h^2} \quad (38)$$

عناصر R^{**} را جملات مربوط به جرم تیر تشکیل می دهند:

$$R^{**}_{2i-1,i+1} = \rho\left(i\frac{L}{n}\right)I\left(i\frac{L}{n}\right) \quad (39)$$

$$R^{**}_{2i,(n+1)+(i+1)} = \rho\left(i\frac{L}{n}\right)A\left(i\frac{L}{n}\right) \quad (40)$$

در جملات فوق i معرف شماره گره است، که در بازه ۱ تا $n-1$ تغییر می‌کند. باقی درایه‌های ماتریس‌های مربعی ضرایب (R و R^*) را عبارات مربوط به شرایط مرزی دو سر تیر تشکیل می‌دهند، که با توجه به نوع تکیه‌گاه و براساس روابط (۲۰) تا (۲۲) به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$R_{2n-1,1} = -3, \quad R_{2n-1,2} = 4, \quad R_{2n-1,3} = -1, \quad R_{2n,n+2} = 1$$

$$R_{2n+1,n-1} = 1, \quad R_{2n+1,n} = -4, \quad R_{2n+1,n+1} = 3, \quad R_{2n+2,2n+2} = 1$$

تیردوسر مفصل (۴۱):

$$R_{2n-1,1} = 1, \quad R_{2n,n+2} = 1$$

$$R_{2n+1,n+1} = 1, \quad R_{2n+2,2n+2} = 1$$

تیردوسر گیردار: (۴۲)

$$R_{2n-1,1} = -3, \quad R_{2n,n+2} = 1, \quad R_{2n+1,n-1} = 1, \quad R_{2n+1,n} = -4,$$

$$R_{2n+1,n+1} = 3 - kA(L)G(L), \quad R_{2n+2,2n} = \frac{kA(L)G(L)}{2h},$$

$$R_{2n+2,2n+1} = -4 \frac{kA(L)G(L)}{2h}, \quad R_{2n+2,2n+2} = 3 \frac{kA(L)G(L)}{2h},$$

تیریک سر گیردار - یک سر آزاد: (۴۳)

$$R_{2n+2,2n}^* = -\frac{1}{2h}, \quad R_{2n+2,2n+1}^* = \frac{2}{h}, \quad R_{2n+2,2n}^* = -\frac{3}{2h}$$

لازم به ذکر است که در تحلیل پایداری مقدار فرکانس ارتعاشی (ω) و در تحلیل ارتعاش آزاد مقدار بار محوری (P) در رابطه (۲۳) را بایستی مساوی صفر قرار داد. سپس با استفاده از روش حل مقادیر ویژه، بار کمانش بحرانی و یا فرکانس طبیعی ارتعاش براساس نوع تحلیل مدنظر تعیین می‌گردد.

۴- نتایج عددی

در این قسمت، به منظور بررسی صحت روش عددی معرفی شده یک نمونه مثال عددی جامع که شامل تحلیل پایداری و ارتعاشی تیر تیموشنکو غیرمنشوری ناهمگن با شرایط مرزی مختلف ارائه شده است. کلیه مراحل محاسباتی مطابق با روش عددی پیشنهادی به منظور تعیین بار کمانشی و فرکانس ارتعاشی در نرم‌افزار *MATLAB* [۲۷] بسط داده شده است. همچنین، برای بررسی میزان دقت و کارایی روش تفاضل محدود مقادیر بدست آمده با نتایج حاصل از نرم‌افزار آباکوس [۲۸] و دیگر روش‌های عددی و تحلیلی موجود مقایسه گردیده‌اند. لازم به ذکر است که المان مورد استفاده برای مدل‌سازی در نرم‌افزار آباکوس دوبعدی و از نوع سیمی (*Wire*) انتخاب شده است. برای تعریف سطح مقطع در مدل‌سازی‌های مقاطع همگن از سطح مقطع ثابت و برای مقاطع متغیر از سطح مقطع‌های متغیر *Tapered* استفاده شده است. برای مش بندی نوع خانواده المان یاد شده از گروه تیر و به دلیل آنکه تیر مورد بحث از نوع تیر تیموشنکو می‌باشد نوع گروه تیر، انعطاف‌پذیر برشی استفاده شده است. تعداد درجه آزادی هر المان ۶ درجه است. در نهایت المان *B31H* انتخاب شده است. ابعاد مش بندی در مقاطع همگن برابر با ۰/۰۵ و مقاطع مدرج تابعی با توجه به اهمیت بیشتر موضوع و نیاز به دقت بالاتر برابر با ۰/۰۲ در نظر گرفته شده است. در این پژوهش، ارتعاش آزاد و پایداری ارتجاعی دو عضو غیرمنشوری متفاوت به طول واحد و مقطع مستطیلی مورد بررسی قرار گرفته است. به منظور سهولت در مدل‌سازی و ارائه نتایج، ابعاد نیم‌رخ توپر تیرهای تحلیل شده به صورتی در نظر گرفته شده‌اند که نسبت $I_0/A_0 = 0.01$ برقرار گردد. I_0 و A_0 به ترتیب ممان اینرسی حول محور ضعیف و مساحت مقطع بزرگ‌تر در ابتدای عضو غیرمنشوری هستند. توابع حاکم بر تغییرات مساحت و ممان اینرسی تیر نسبت به محور ضعیف به صورت تابع توانی و به فرم زیر در نظر گرفته شده‌اند:

$$I(x) = I_0 \left(1 - \beta \frac{x}{L}\right)^3; A(x) = A_0 \left(1 - \beta \frac{x}{L}\right) \quad \text{مورد اول: (۱-۴۴)}$$

$$I(x) = I_0 \left(1 - \beta \frac{x}{L}\right)^4; A(x) = A_0 \left(1 - \beta \frac{x}{L}\right)^2 \quad \text{مورد دوم: (۲-۴۴)}$$

عبارات در نظر گرفته شده برای ممان اینرسی و مساحت مقطع در مورد اول از عضو غیرمنشوری مدنظر، نظیر حالتی است که عرض مقطع مستطیلی به صورت خطی در امتداد عضو با شیب ثابت β کاهش یافته؛ درحالی که طول نیم‌رخ ثابت می‌ماند. در مورد سوم، طول و عرض مقطع مستطیل شکل

عضو ارتعاشی مدنظر به صورت همزمان در راستای عضو و با شیب β کاهش می‌یابند. در این پژوهش، ضریب کاهش ابعاد نیم‌رخ عضو در بازه ۰ تا ۰/۹ تغییر می‌کند. همچنین در این مثال، سه نوع ستون بر اساس شرایط مرزی (دو سر مفصل، دو سر گیردار و طره) در نظر گرفته شده است. در مرحله نخست، مقدار شیب تغییرات مقطع (β) برابر صفر در نظر گرفته شده که منطبق بر حالتی می‌باشد که عضو دارای مقطع ثابت در طول خود است. در این قسمت سعی بر آن است که تعداد تقریبی تقسیم‌بندی‌های لازم در طول المان برای دستیابی به جواب دقیق مطابق با روش عددی ارائه شده در محاسبه فرکانس ارتعاشی و بار کمانش بحرانی تیر منشوری ساخته شده از مصالح همگن از جنس زیرکونیا مشخص گردد. مقادیر فرکانس طبیعی ارتعاش و بار کمانشی بدست آمده از روش تفاضل محدود که مطابق با رابطه (۴۵) بی‌بعد گشته‌اند؛ به همراه اثر تعداد تقسیم‌بندی‌های استفاده شده به ترتیب در جدول ۱ نمایش داده شده‌اند.

$$P_{nor} = P_{cr} \times \frac{1}{E_Z I_0}; \quad \omega_{nor} = \omega \times \sqrt{\frac{\rho_Z A_0}{E_Z I_0}} \quad (45)$$

جدول ۱- روند همگرایی بار کمانشی و فرکانس ارتعاشی بی‌بعد حاصل از روش عددی ارائه شده برای عضو منشوری همگن به مقادیر بدست آمده از نرم افزار آباکوس

شرایط مرزی	مود	تعداد تقسیم‌بندی اعمال شده مطابق روش تفاضل محدود در راستای طول تیر (m)									
		۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۴۰	۵۰	مرجع آباکوس	
دو سر مفصل	فرکانس	۱	۹/۶۶	۸/۶۹	۸/۵۲	۸/۴۶	۸/۴۳	۸/۴۲	۸/۴۱	۸/۳۹	۸/۳۹
	ارتعاشی	۲	۲۸/۲۲	۲۶/۰۵	۲۵/۶۴	۲۵/۵۰	۲۵/۴۴	۲۵/۴۱	۲۵/۳۸	۲۵/۳۷	۲۵/۲۹
	بار	۱	۱۰/۲۴	۸/۱۶	۷/۸۱	۷/۶۹	۷/۶۴	۷/۶۱	۷/۵۸	۷/۵۷	۷/۶۴
	کمانشی	۲	۲۳/۹۲	۱۹/۱۱	۱۸/۲۹	۱۸/۰۲	۱۷/۸۹	۱۷/۸۳	۱۷/۷۷	۱۷/۷۴	۱۸/۲
یک سر گیردار-یک سر آزاد	فرکانس	۱	۶/۳۴	۴/۱۲	۳/۷۴	۳/۵۸	۳/۴۹	۳/۴۶	۳/۳۸	۳/۳۵	۳/۲۲
	ارتعاشی	۲	۱۸/۹۷	۱۶/۲۷	۱۵/۴۹	۱۵/۱۷	۱۴/۹۹	۱۴/۹۲	۱۴/۷۷	۱۴/۷	۱۴/۳۹
	بار	۱	۵/۹۶	۳/۲۹	۲/۸۱	۲/۶۳	۲/۵۴	۲/۴۹	۲/۴۳	۲/۳۹	۲/۳
	کمانشی	۲	۲۰/۵۸	۱۵/۴۴	۱۴/۴۶	۱۴/۰۶	۱۳/۸۴	۱۳/۷۰	۱۳/۵۴	۱۳/۴۵	۱۳/۴
دو سر گیردار	فرکانس	۱	۱۴/۸۱	۱۴/۱۲	۱۳/۹۷	۱۳/۹۱	۱۳/۸۸	۱۳/۸۷	۱۳/۸۵	۱۳/۸۵	۱۳/۹۰
	ارتعاشی	۲	۲۹/۱۹	۲۸/۷۹	۲۸/۶۵	۲۸/۵۹	۲۸/۵۷	۲۸/۵۵	۲۸/۵۴	۲۸/۵۳	۲۸/۴۸
	بار	۱	۲۱/۹۶	۱۸/۸۲	۱۸/۲	۱۷/۹۸	۱۷/۸۷	۱۷/۸۲	۱۷/۷۶	۱۷/۷۴	۱۸/۲
	کمانشی	۲	۲۸/۷۵	۲۵/۱۰	۲۲/۱۳	۲۱/۸۹	۲۱/۷۹	۲۱/۷۳	۲۱/۶۷	۲۱/۶۴	۲۲/۳

با توجه به جدول ۱ و مقایسه بین نتایج ارائه شده، می‌توان نتیجه‌گیری نمود که نتایج حاصل از روش تفاضل محدود ارائه شده در مقایسه با مقادیر بدست آمده از نرم‌افزار آباکوس، از تطابق و دقت قابل قبولی برخوردار است. همچنین، بر اساس جدول مذکور می‌توان استنباط نمود که با افزایش تعداد تقسیم‌بندی در امتداد طولی عضو به ۳۰ قسمت، جواب‌ها به سرعت به مقادیر بدست از نرم‌افزار المان محدود آباکوس برای مدهای اول و دوم کمانش و یا ارتعاش آزاد همگرا شده‌اند. بنابراین، در تمام مسائل بعدی، در جهت اطمینان تعداد المان به کار برده شده در روش تفاضل محدود به منظور تعیین مقدار بار کمانشی و فرکانس ارتعاشی با دقت قابل قبول برابر با ۴۰ در نظر گرفته خواهد شد.

به‌منظور بررسی توانایی و دقت روش تفاضل محدود (FDM) در تحلیل پایداری و ارتعاش آزاد تیر تیموشنکو غیرمنشوری ساخته‌شده از مصالح مدرج تابعی، یک مطالعه مقایسه‌ای در شرایطی که شاخص کسر حجمی اختلاط مواد (m) برابر ۲ است، صورت گرفته است. بدین ترتیب که، مقادیر بدون بعد بار کمانشی مود اول و فرکانس ارتعاشی مود اول و دوم محاسبه شده با استفاده از روش عددی معرفی شده (FDM) به همراه نتایج ارائه شده توسط شهبها و همکاران [۷] در جداول ۲ و ۳ نشان داده شده‌اند.

جدول ۲: مقدار بدون بعد بار کمانشی برای اعضای ماهیچه‌ای هدفمند به ازای $m=2$

β	مورد اول						مورد دوم					
	دو سر مفصل		دو سر گیردار		یک سر گیردار		دو سر مفصل		دو سر گیردار		یک سر گیردار	
	نتایج جدید	مرجع [۷]	نتایج جدید	مرجع [۷]	نتایج جدید	مرجع [۷]	نتایج جدید	مرجع [۷]	نتایج جدید	مرجع [۷]	نتایج جدید	مرجع [۷]
۰/۱	۴/۸	۴/۷۶	۱۰/۱۵	۱۰/۱۶	۱/۸۳۲	۱/۷۸	۴/۴۹	۴/۴۵	۹/۲۱	۹/۲۵	۱/۷۵	۱/۷۱
۰/۲	۴/۰۵	۴/۰۲	۸/۹۵	۸/۹۴	۱/۶۲۴	۱/۵۹	۳/۴۹	۳/۴۷	۷/۳۰	۷/۳۴	۱/۴۷	۱/۴۵
۰/۳	۳/۴۱	۳/۳۱	۷/۷۱	۷/۶۹	۱/۴۱۷	۱/۳۹	۲/۶۳	۲/۶۱	۵/۶۱	۵/۶۴	۱/۲۰	۱/۱۹
۰/۴	۲/۶۷	۲/۶۴	۶/۴۴	۶/۴۲	۱/۲۰۹	۱/۱۹	۱/۸۸	۱/۸۷	۱۵۴/۱	۴/۱۶	-۰/۹۴	-۰/۹۳
۰/۵	۲/۰۵	۲/۰۲۸	۵/۱۸	۵/۱۶	۱/۰۰۲	-۰/۹۸	۱/۲۶	۱/۲۶	۲/۸۸	۲/۹۰	-۰/۷۰	-۰/۷۰
۰/۶	۱/۴۹	۱/۴۷	۳/۹۴	۳/۹۲	-۰/۷۹۵	-۰/۷۸	-۰/۷۷	-۰/۷۷	۱/۸۵	۱/۸۶	-۰/۴۸	-۰/۴۸
۰/۷	-۰/۹۹	-۰/۹۷	۲/۷۴	۲/۷۴	-۰/۵۸۹	-۰/۵۷	-۰/۴۱	-۰/۴۱	۱/۰۵	۱/۰۵	-۰/۲۹	-۰/۲۸
۰/۸	-۰/۵۶	-۰/۵۵	۱/۶۷	۱/۶۴	-۰/۳۸۸	-۰/۳۷	-۰/۱۷	-۰/۱۷	-۰/۴۷	-۰/۴۶	-۰/۱۳	-۰/۱۳
۰/۹	-۰/۲۲	-۰/۲۲	-۰/۷۴	-۰/۶۹	-۰/۱۹۳	-۰/۱۷	-۰/۰۴	-۰/۰۴	-۰/۱۳	-۰/۱۲	-۰/۰۳	-۰/۰۳

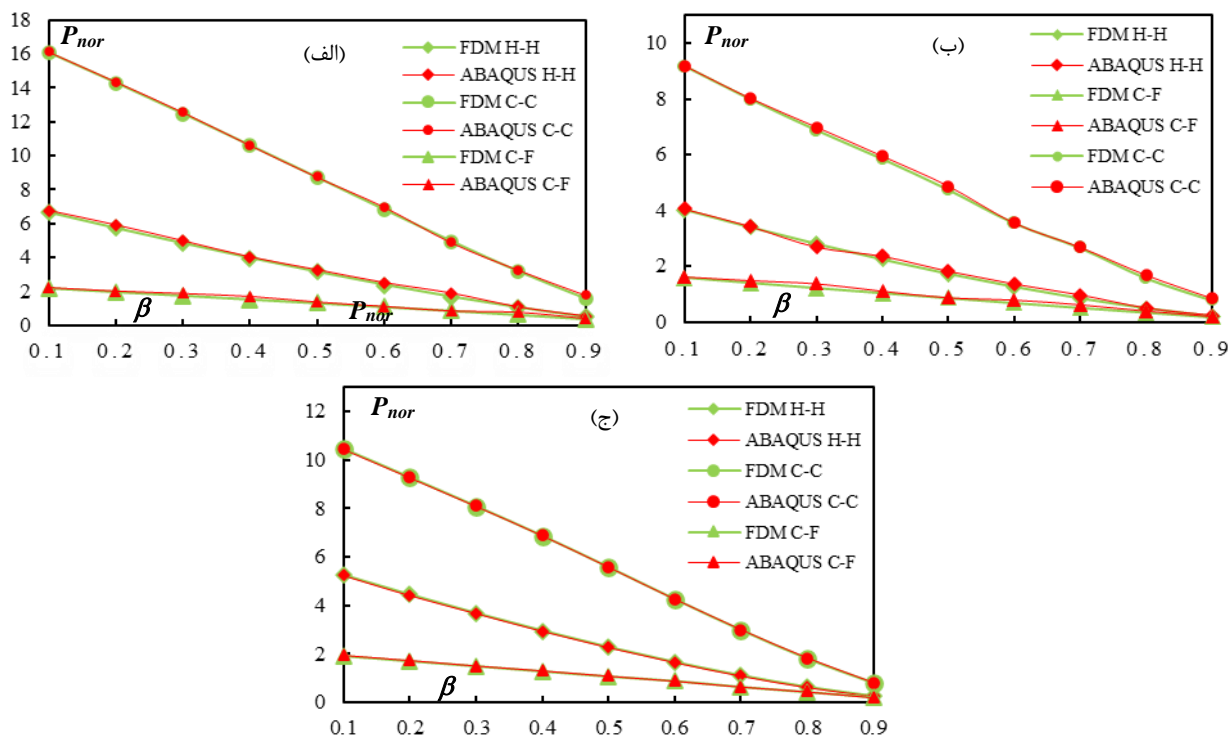
جدول ۳: مقدار فرکانس ارتعاش آزاد بی‌بعد شده برای تیر تیموشنکو ماهیچه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی به ازای $m=2$

β	مود	مورد اول						مورد دوم					
		دو سر مفصل		دو سر گیردار		یک سر گیردار		دو سر مفصل		دو سر گیردار		یک سر گیردار	
		نتایج جدید	مرجع [۷]	نتایج جدید	مرجع [۷]	نتایج جدید	مرجع [۷]	نتایج جدید	مرجع [۷]	نتایج جدید	مرجع [۷]	نتایج جدید	مرجع [۷]
۰/۱	۱	۷/۶۷	۷/۶۵	۱۲/۴۸	۱۲/۴۷	۴/۰۷	۳/۹۴	۷/۶۴	۷/۶۳	۱۲/۴۹	۱۲/۴۸	۴/۱۹	۴/۰۵
	۲	۲۳/۷۴	۲۳/۷۴	۲۶/۴۰	۲۶/۴۲	۱۵/۴۱	۱۵/۱۶	۲۳/۷۴	۲۳/۷۸	۲۶/۴۲	۲۶/۴۴	۱۵/۵۷	۱۵/۳۱
۰/۲	۱	۷/۳۱	۷/۲۹	۱۲/۲۲	۱۲/۲۱	۴/۱۳	۴/۰۰	۷/۲۴	۷/۲۲	۱۲/۳۴	۱۲/۲۴	۴/۴۱	۴/۲۴
	۲	۲۳/۱۵	۲۳/۱۳	۲۶/۰۹	۲۶/۱۰	۱۵/۲۹	۱۵/۰۲	۲۳/۱۵	۲۳/۱۴	۲۶/۲۵	۲۶/۱۵	۱۵/۶۹	۱۵/۳۴
۰/۳	۱	۷/۲۶	۶/۷۰	۱۱/۹۳	۱۱/۹۲	۴/۱۹	۴/۰۶	۶/۷۹	۶/۷۸	۱۱/۸۹	۱۱/۹۷	۴/۵۹	۴/۴۶
	۲	۲۳/۴۲	۲۲/۴۶	۲۵/۷۲	۲۵/۷۲	۱۵/۱۳	۱۴/۸۶	۲۲/۴۹	۲۲/۴۸	۲۵/۷۹	۲۵/۵۱	۱۵/۶۳	۱۵/۳۶
۰/۴	۱	۶/۴۸	۶/۴۶	۱۱/۵۹	۱۱/۵۷	۴/۲۷	۴/۱۴	۶/۳۰	۶/۲۸	۱۱/۶۸	۱۱/۶۷	۴/۸۴	۴/۷۱
	۲	۲۱/۷۲	۲۱/۷۰	۲۵/۲۶	۲۵/۲۶	۱۴/۹۳	۱۴/۶۶	۲۱/۸۲	۲۱/۷۴	۲۵/۳۸	۲۵/۳۹	۱۵/۶۳	۱۵/۳۶
۰/۵	۱	۶/۰۰	۵/۹۹	۱۱/۱۹	۱۱/۱۷	۴/۳۶	۴/۲۴	۵/۷۲	۵/۷۱	۱۱/۳۳	۱۱/۳۲	۵/۱۴	۵/۰۲
	۲	۲۰/۸۶	۲۰/۸۳	۲۴/۶۹	۲۴/۶۸	۱۴/۷۰	۱۴/۴۲	۲۰/۹۳	۲۰/۹۲	۲۴/۸۷	۲۴/۸۷	۱۵/۶۲	۱۵/۳۵
۰/۶	۱	۵/۴۷	۵/۴۵	۱۰/۷۱	۱۰/۶۹	۴/۴۷	۴/۳۶	۵/۰۷	۵/۰۷	۱۰/۹۳	۱۰/۹۲	۵/۵۱	۵/۳۹
	۲	۱۹/۸۷	۱۹/۸۴	۲۳/۹۶	۲۳/۹۴	۱۴/۴۲	۱۴/۱۵	۲۰/۰۰	۱۹/۹۹	۲۴/۲۲	۲۴/۲۳	۱۵/۶۱	۱۵/۳۵
۰/۷	۱	۴/۸۵	۴/۸۴	۱۰/۱۳	۱۰/۱۰	۴/۶۱	۴/۵۱	۴/۳۲	۴/۳۳	۱۰/۴۵	۱۰/۴۶	۵/۹۸	۵/۸۷
	۲	۱۸/۷۱	۱۸/۶۶	۲۳/۰۱	۲۲/۹۸	۱۴/۰۹	۱۳/۸۳	۱۸/۹۴	۱۸/۹۴	۲۳/۳۹	۲۳/۳۰	۱۵/۶۴	۱۵/۳۸
۰/۸	۱	۴/۱۳	۴/۱۲	۹/۴۰	۹/۳۶	۴/۸۱	۴/۷۲	۳/۴۱	۳/۴۴	۹/۹۲	۹/۹۲	۶/۶۱	۶/۵۰
	۲	۱۷/۲۹	۱۷/۲۴	۲۱/۷۲	۲۱/۶۶	۱۳/۷۳	۱۳/۴۸	۱۷/۶۹	۱۷/۷۲	۲۲/۳۰	۲۲/۳۰	۱۵/۷۸	۱۵/۵۶
۰/۹	۱	۳/۱۷	۳/۲۰	۸/۴۳	۸/۳۶	۵/۱۳	۵/۰۴	۲/۱۷	۲/۳۲	۹/۲۷	۹/۳۰	۷/۵۰	۷/۳۸
	۲	۱۵/۴۲	۱۵/۳۸	۱۹/۸۵	۱۹/۶۹	۱۳/۳۸	۱۳/۱۷	۱۶/۱۳	۱۶/۳۰	۲۰/۷۴	۲۰/۷۸	۱۶/۳۰	۱۶/۱۶

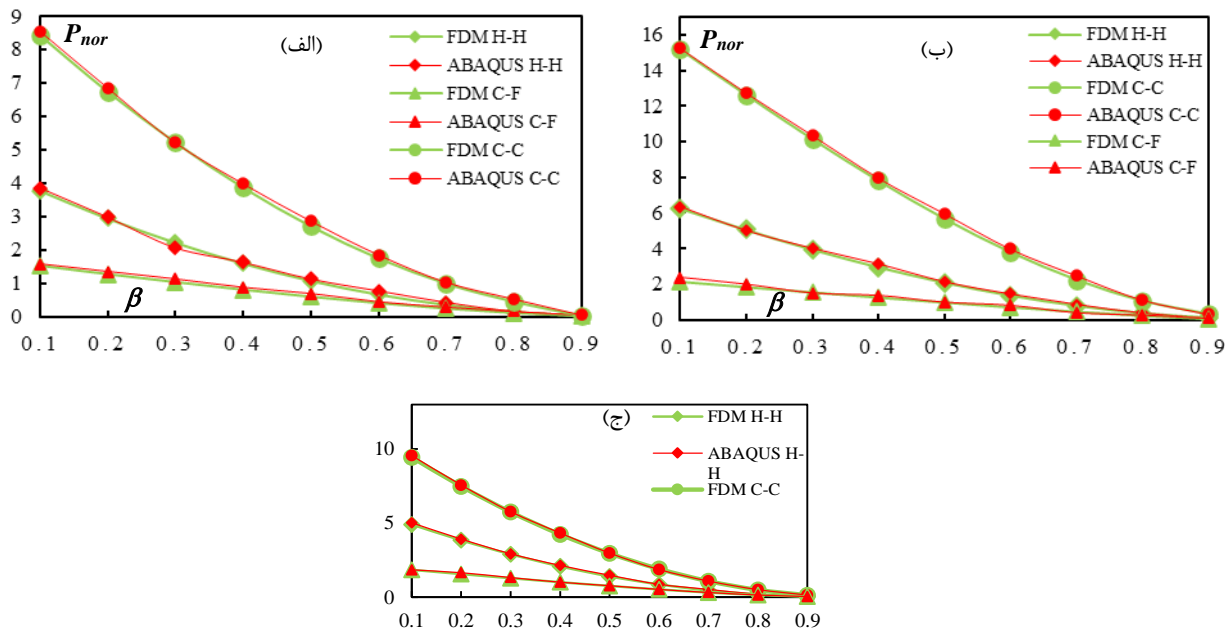
با توجه به دو جدول مذکور و قیاس بین نتایج ارائه شده، می‌توان نتیجه‌گیری نمود که مقادیر حاصل از تفاضل محدود و نتایج بدست آمده از روش عددی شهبها و همکاران [۷]، از تطابق و دقت قابل قبولی برخوردار هستند. بنابراین می‌توان با اطمینان از این روش جهت تحلیل پایداری و ارتعاشی اعضای غیرمنشوری ناهمگن نیز استفاده نمود.

در این مرحله، تغییرات بار کمانشی نرمال شده نسبت به شیب تغییر ابعاد مقطع (β) برای تیر تیموشنکو ماهیچه‌ای با شرایط مرزی متفاوت در نظر گرفته شده در این تحقیق برای مصالح همگن و مدرج تابعی با توان ۱ و ۳ برای هر دو مورد اول و دوم از تغییرات سطح مقطع به

ترتیب در شکل‌های ۴ و ۵ نشان داده شده‌اند. در تمامی نمودارها نتایج نرم‌افزار آباکوس با رنگ قرمز و روش تفاضل محدود (FDM) با سبز مشخص شده است. نتایج تیرهای دو سرگیردار با علامت دایره، دو سر مفصل با علامت لوزی و نتایج مربوط به تیرهای طره با علامت مثلث نشان شده است. با توجه به نمودارهای ارائه شده در شکل‌های ۴ و ۵ می‌توان نتیجه‌گیری نمود که با افزایش مقدار شاخص کسر حجمی اختلاط مواد (m)، بار کمانشی و در نتیجه پایداری عضو به علت افزایش ضریب ارتجاعی و سختی سیستم افزایش می‌یابد.



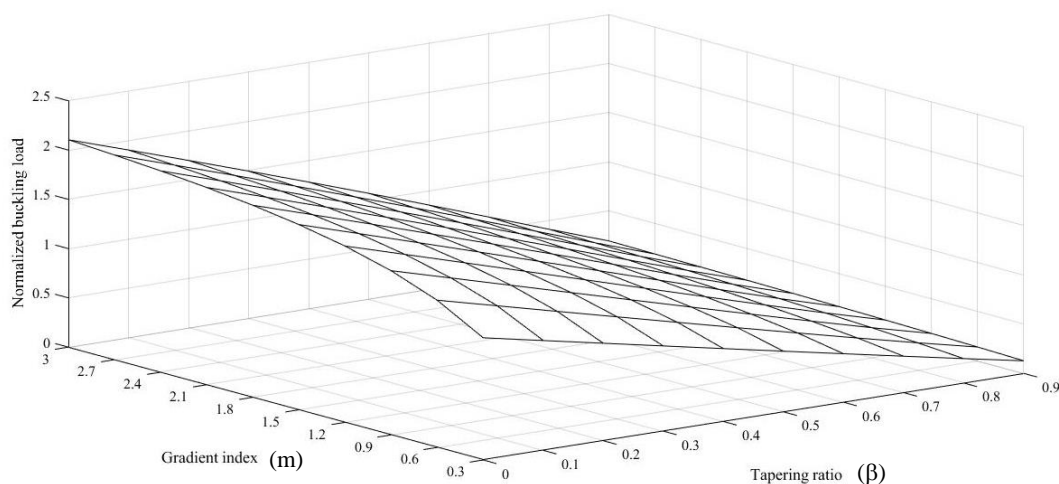
شکل ۴: تغییرات بار کمانشی نرمال شده (P_{nor}) تیر نمونه اول بر حسب مقادیر متفاوت (β) و با شرایط مرزی متفاوت، الف: مصالح همگن (زیرکونیم)، ب: مواد مدرج تابعی $m=1$ ، ج: مواد مدرج تابعی $m=3$



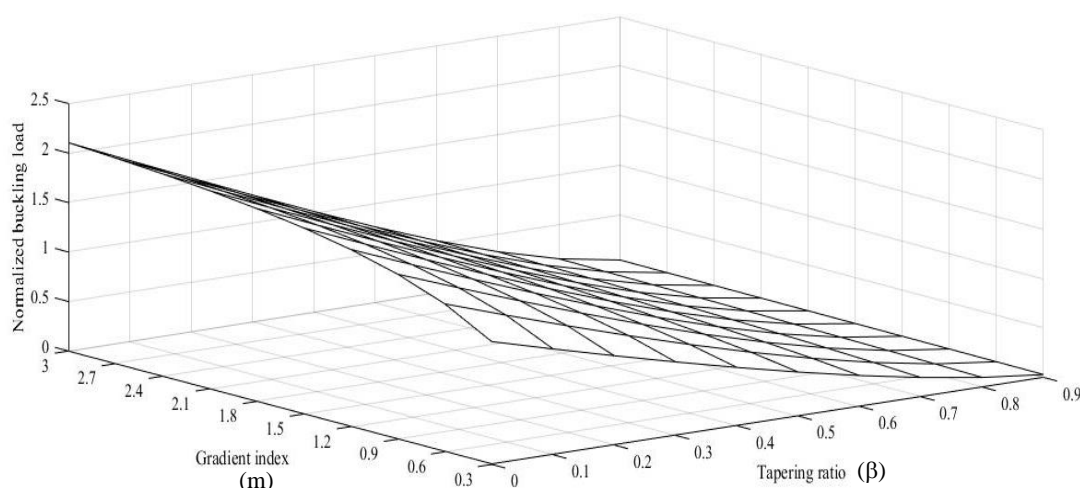
شکل ۵: تغییرات بار کمانشی نرمال شده (P_{nor}) تیر نمونه دو بر حسب مقادیر متفاوت (β) و با شرایط مرزی متفاوت، الف: مصالح همگن (زیرکونیم)، ب: مواد مدرج تابعی $m=1$ ، ج: مواد مدرج تابعی $m=3$

مطابق آنچه در نمودارهای مذکور نشان داده شده کاملاً مشخص است که تغییر ابعاد نیمرخ مستطیل شکل تیر تأثیر قابل توجهی بر نتایج دارد. بدین صورت که افزایش مقدار ضریب β منجر به کاهش سطح مقطع و صلبیت خمشی در طول و به خصوص در انتهای دیگر عضو می شود و در نتیجه ناپایداری افزایش می یابد. همچنین با ثابت ماندن شیب تغییرات مقطع، افزایش شرایط گیرداری و به تبع آن افزایش درجات نامعینی ستون، بار کمانش بحرانی و پایداری افزایش می یابد. در شرایطی که طول و عرض سطح مقطع تیر به صورت هم زمان دچار تغییر شوند (مورد دوم)، ناپایداری به علت کاهش شدیدتر سطح مقطع انتهایی عضو، با شدت بیشتری افزایش می یابد. همچنین، مقدار بار کمانش بحرانی با افزایش توان طرح اختلاط ماده هدفمند بعلافت افزایش سهم سرامیک در ترکیب کلی مصالح و زیاد شدن ضریب ارتجاعی عضو، افزایش می یابد. علاوه بر این موارد، مقایسه مقادیر بار کمانشی محاسبه شده با استفاده از روش عددی ارائه شده (FDM) با نتایج حاصل شده از نرم افزار آباکوس نشان دهنده تطابق بسیار خوب با خطای ناچیز می باشد.

اثر تغییرات همزمان توان ماده هدفمند و ضریب باریک شونده سطح مقطع بر بار کمانشی عضو طره ماهیچه ای در شکل ۶ نشان داده شده است. با توجه به شکل می توان مجدداً نتیجه گیری نمود که تغییر دو پارامتر مذکور تأثیر قابل توجهی بر پایداری عضو دارد. همچنین با افزایش توان اختلاط در بازه $0/3$ تا $1/2$ بار بحرانی با شدت بیشتری نسبت به بازه $1/2$ تا $3/0$ افزایش می یابد.



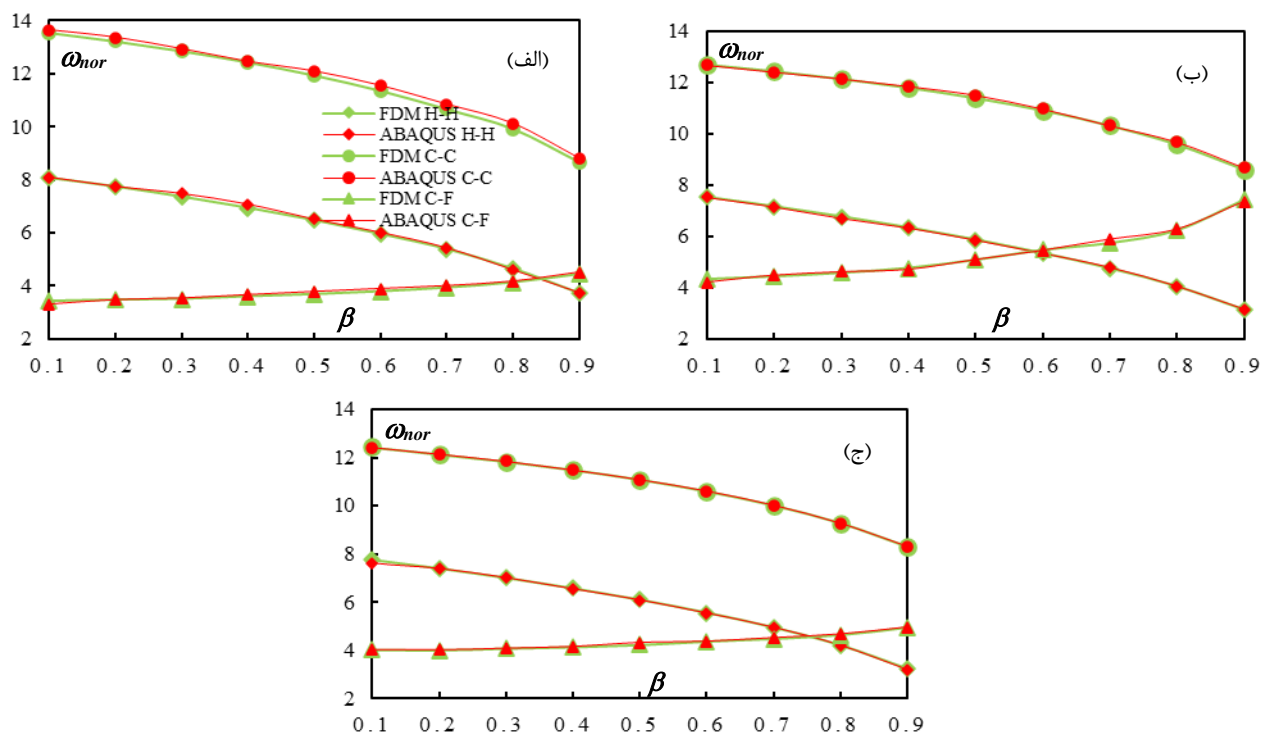
(الف)



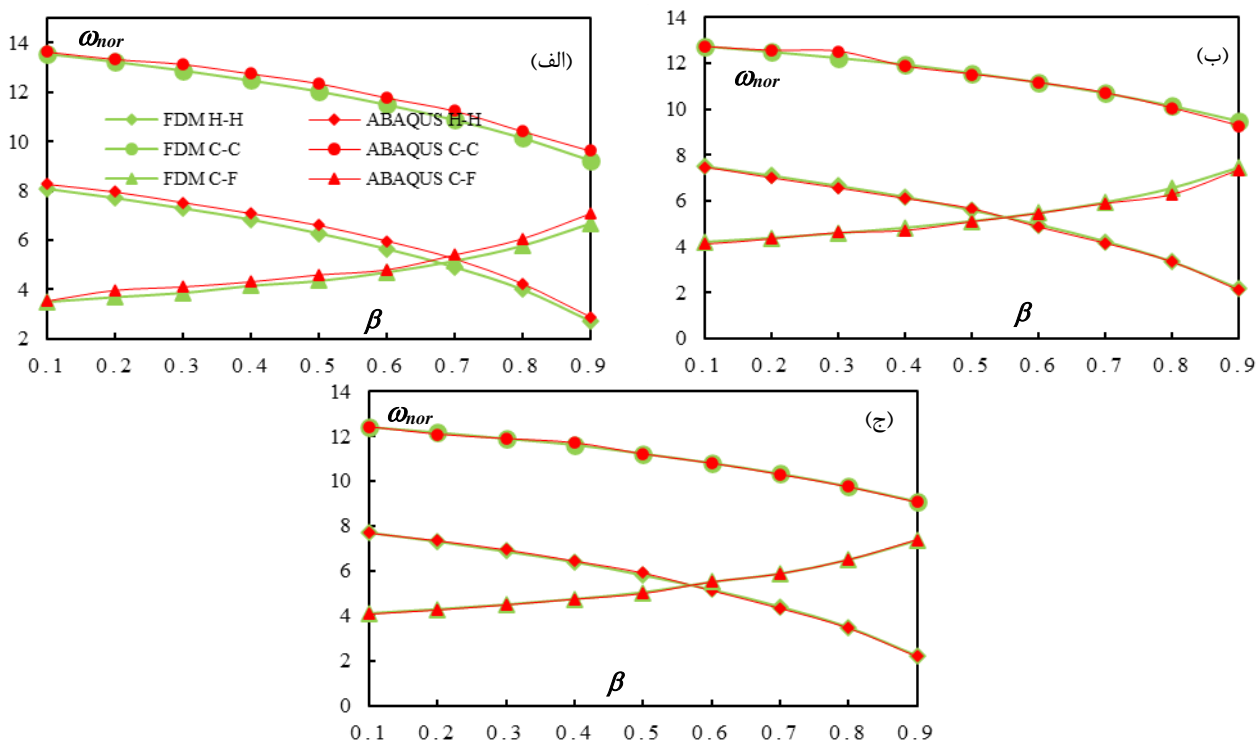
(ب)

شکل ۶: تغییرات بار کمانشی نرمال شده تیر کنسول بر حسب مقادیر متفاوت (β) و توان طرح اختلاط (m)، الف: مورد اول، ب: مورد دوم

در ادامه، تأثیر تغییرات توان ماده تابعی و ضریب باریک شونده نیمرخ تیر بر رفتار ارتعاشی تیر تیموشنکو مدنظر با شرایط تکیه گاهی متفاوت مورد مطالعه قرار گرفته است. همچنین، کفایت و دقت روش پیشنهاد شده (FDM) نسبت به جواب های به دست آمده از روش المان محدود با استفاده از نرم افزار آباکوس در اشکال ۷ و ۸ نشان داده شده اند.



شکل ۷: تغییرات فرکانس ارتعاش آزاد نرمال شده (ω_{nor}) تیر نمونه اول بر حسب مقادیر متفاوت (β) و با شرایط مرزی متفاوت، الف: مصالح همگن (زیرکونیم)، ب: مواد مدرج تابعی $m=1$ ، ج: مدرج تابعی $m=3$.

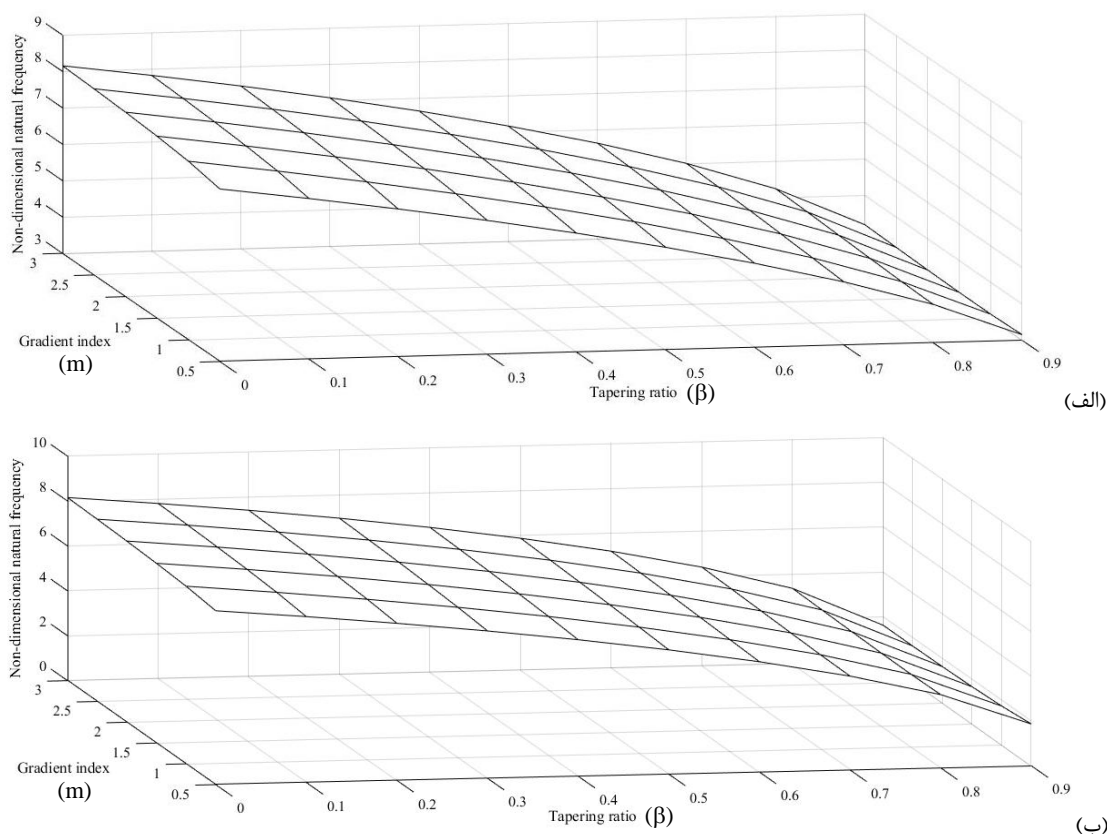


شکل ۸: تغییرات فرکانس ارتعاش آزاد نرمال شده (ω_{nor}) تیر نمونه اول بر حسب مقادیر متفاوت (β) و با شرایط مرزی متفاوت، الف: مصالح همگن (زیرکونیم)، ب: مواد مدرج تابعی $m=1$ ، ج: مدرج تابعی $m=3$.

با توجه به دو شکل (۷) و (۸) می‌توان نتیجه‌گیری نمود که تطابق بسیار خوبی میان روش تفاضل محدود (FDM) و روش المان محدود به

کار برده شده در نرم افزار آباکوس در تعیین فرکانس ارتعاش آزاد تیر ماهیچه‌ای ساخته شده از مواد مدرج تابعی وجود دارد. همچنین، فرکانس ارتعاشی محاسبه شده با استفاده از روش عددی ارائه شده برای هر دو عضو غیرمنشوری (مورد اول و دوم) اندکی کوچک‌تر از مقادیر بدست آمده از نرم‌افزار آباکوس است. برخلاف آنچه در نمودارهای مرتبط با تحلیل پایداری مشاهده شد، رفتار ارتعاشی عضو و مقدار فرکانس طبیعی سیستم با افزایش مقدار توان ماده تابعی و ضریب باریک شونده‌گی مقطع قابل پیش‌بینی نیست. چون فرکانس ارتعاشی به صورت هم‌زمان به هر سه پارامتر ممان اینرسی، جرم و ضریب یانگ وابسته است. ولی به صورت کلی می‌توان نتیجه گیری نمود که فرکانس ارتعاشی تیر دو سر مفصل و دو سر گیردار با افزایش ضریب باریک شونده‌گی مقطع (β)، به شدت کاهش می‌یابد و این امر ناشی از کاهش سختی عضو است که راحت‌تر دچار حرکت نوسانی می‌شود. در حالی که، فرکانس تیرهای کنسول با کاهش هرچه بیشتر سطح مقطع عضو افزایش می‌یابد.

در پایان، اثر تغییرات هم‌زمان توان ماده هدفمند و ضریب باریک شونده‌گی سطح مقطع بر فرکانس طبیعی ارتعاش عضو دوسر مفصل ماهیچه‌ای در شکل ۹ نشان داده شده است. با توجه به شکل می‌توان مجدداً نتیجه گیری نمود که تغییر دو پارامتر مذکور تاثیر قابل توجهی بر رفتار ارتعاشی عضو دارد. به طوری که با افزایش شیب تغییرات سطح مقطع (β) فرکانس به شدت کاهش می‌یابد، یعنی عضو راحت‌تر شروع به ارتعاش می‌کند. همچنین با افزایش مقدار توان طرح اختلاط، بعلاوه زیاد شدن هم‌زمان جرم و ضریب ارتجاعی عضو، مقدار فرکانس ارتعاشی افزایش می‌یابد. در واقع می‌توان نتیجه گیری نمود که افزایش توان ماده هدفمند، مقدار ضریب الاستیسیته را با شدت بیشتری نسبت به جرم افزایش می‌دهد.



شکل ۹: تغییرات فرکانس ارتعاشی نرمال شده تیر دوسر مفصل بر حسب مقادیر متفاوت (β) و توان طرح اختلاط (m). الف: مورد اول، ب: مورد دوم

۵- نتیجه گیری

در این پژوهش، مسئله ارتعاش آزاد و پایداری تیر تیموشنکو غیرمنشوری ساخته شده از مصالح مدرج تابعی مورد مطالعه قرار گرفته است. بدین منظور، دستگاه معادله دیفرانسیل وابسته حاکم بر تیر تیموشنکو با استفاده از روش عددی تفاضل محدود حل شد. سپس دستگاه معادلات جبری بدست آمده از گسسته سازی معادلات دیفرانسیل ارتعاش آزاد و پایداری حاکم بر تیر تیموشنکو به کمک روش عددی

تفاضل محدود در محیط متلب برنامه‌نویسی شده است. در پایان، فرکانس‌های ارتعاشی و بار کمانشی سیستم بر اساس روش حل مقادیر ویژه برای تیرهای ناهمگن با شرایط مرزی دو سر گیردار، دو سر مفصل و یک سر گیردار-یک سر آزاد محاسبه شدند. در نهایت به منظور صحت سنجی و ارزیابی توانایی و دقت روش عددی استفاده شده در این مطالعه، چند نمونه مثال با استفاده از روش تفاضل محدود حل شده است. همچنین، تاثیر پارامترهای مختلف همچون ضریب باریک شونده‌گی سطح مقطع، توان ماده تابعی و نوع تکیه‌گاه روی مقدار بار کمانش بحرانی و فرکانس ارتعاشی تیر تیموشنکو ماهیچه‌ای مورد بررسی قرار گرفت. نتایج حاصل از این تحقیق را می‌توان به صورت زیر جمع بندی کرد:

- با توجه به مثال‌های ارائه شده مشاهده می‌شود که تطابق قابل قبولی میان نتایج محاسبه شده برای بارهای کمانشی بحرانی و فرکانس طبیعی ارتعاش با استفاده از روش ارائه شده و روش‌های عددی و تحلیلی دیگر وجود دارد. همچنین، مقادیر بار کمانش بحرانی اعضای ماهیچه‌ای ساخته شده از مصالح هدفمند را می‌توان با میزان خطای کمتر از ۷٪ به دست آورد. در صورتی که، عضو تنها به ۴۰ قطعه در طول خود تقسیم شود.
- نتایج حاصل از این تحقیق نشان می‌دهد که با افزایش شیب تغییرات سطح مقطع، مقدار بار کمانش بحرانی بدلیل کاهش سختی عضو به شدت کاهش می‌یابد.
- در نتایج مشاهده می‌شود که با افزایش شاخص کسر حجمی، سهم سرامیک در ترکیب کلی مصالح افزایش می‌یابد و چون ضریب ارتجاعی سرامیک (اکسید زیرکونیوم) از ضریب ارتجاعی فلز (آلومینیوم) بیشتر است، پایداری عضو افزایش می‌یابد.
- با افزایش توان طرح اختلاط در بازه ۰/۳ تا ۱/۲ بار بحرانی با شدت بیشتری نسبت به بازه ۱/۲ تا ۳/۰ افزایش می‌یابد.
- با بررسی نتایج مشاهده می‌شود که ضریب باریک شونده‌گی مقطع نسبت به توان ماده مدرج تابعی روی پایداری تیر تاثیر بیشتری دارد.
- نتایج تحقیق نشان می‌دهد که شرایط مرزی تاثیر قابل توجهی بر رفتار کمانشی و ارتعاشی تیر ساخته شده با مواد مدرج تابعی و مقطع متغیر دارد.
- نتایج بدست آمده نشان دادند که رفتار ارتعاشی تیر تیموشنکو تحت تاثیر تغییرات ابعاد مقطع و یا توان ماده مدرج، بعلا آنکه مقدار فرکانس طبیعی عضو با سختی سیستم رابطه مستقیم و با جرم آن رابطه عکس دارد، قابل پیش‌بینی نیست.
- به صورت کلی می‌توان نتیجه گیری نمود که فرکانس ارتعاشی تیر دو سر مفصل و دو سر گیردار با افزایش ضریب باریک شونده‌گی مقطع به شدت کاهش می‌یابد و این امر ناشی از کاهش سختی عضو است که راحت‌تر دچار حرکت نوسانی می‌شود. در حالی که، فرکانس تیر کنسول با کاهش هرچه بیشتر سطح مقطع عضو افزایش می‌یابد.
- در خصوص تیرهای دو سر مفصل، نتایج نشان داد که افزایش ضریب باریک شونده‌گی مقطع به تبع آن کاهش جرم عضو نسبت به تغییرات ضریب ارتجاعی تاثیر بیشتری روی رفتار ارتعاشی تیر دارد.

منابع و مراجع

- [1] Esmailzadeh E; Ohadi A.R. "Vibration and stability analysis of non-uniform Timoshenko beams under axial and distributed tangential loads", Journal of Sound and Vibration, 236 (3), 2000, pp 443-456.
- [2] Hasani S. M. R., Mahmoudabadi M., Danaei R. (2017) Investigating effect of boundary conditions on columns' buckling. Journal of Structural and Constructional Engineering. Vol. 5, No. 1, pp: 143-156. (In Persian)
- [3] Tong X, Tabarrok B. "Vibration analysis of Timoshenko beams with non-homogeneity and varying cross-section". Journal of Sound and Vibration, 18, 1995, pp 821-835.
- [4] Aydogdu M, Taskin V. "Free vibration analysis of functionally graded beams with simply supported edges". Mater Design 2007; 28:1651-1656.
- [5] Shishmek M. and Kocaturk. "Free and Forced Vibration of Functionally Graded Beam Subjected to a Concentrated Moving Harmonic load". Composite Structures. 90 (4), 2009, pp 465-473.

- [6] Attarnejad R, Shahba A, Semnani SJ. "Analysis of non-prismatic Timoshenko beams using basic displacement functions". *Adv Struct Eng* 2011; pp 524-535.
- [7] Shahba A, Attarnejad R, Tavanaie Marvi M, Hajilar S. "Free vibration and stability analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beams with classical and non-classical boundary conditions ". *Composites: Part B*, **42**, 2011. pp 801-808.
- [8] Alshorbagy AE, Eltahir MA, Mahmoud FF. "Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method". *Appl Math Model* 2011; 35: 412-425.
- [9] Shahba A, Rajasekaran S. "Free vibration and stability of tapered Euler-Bernoulli beams made of axially functionally graded materials ". *Applied Mathematical Modelling*, 36, 2012. pp 3094-3111.
- [10] Huang Y, Yang LE, Luo QZ. "Free vibration of axially functionally graded Timoshenko beams with non-uniform cross-section". *Compos Part B-Eng* 2013; 45: 1493-1498.
- [11] Su H, Banerjee JR, Cheung CW. "Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of functionally graded beams". *Compos Struct* 2013; 106: 854-862
- [12] Sarkar K, Ganguli R. "Closed-form solutions for axially functionally graded Timoshenko beams having uniform cross-section and fixed-fixed boundary condition". *Compos Part B-Eng* 2014; 58: 361-370.
- [13] Bambill DV, Rossit CA, Felix DH. "Free vibrations of stepped axially functionally graded Timoshenko beams". *Mecc* . 2015; 50: 1073-1087.
- [14] Pradhan KK, Chakraverty S. "Free vibration of Euler and Timoshenko functionally graded beams by Rayleigh-Ritz method". *Compos Part B-Eng* 2013 .Pp 175-184.
- [15] Pradhan KK, Chakraverty S. "Generalized power-law exponent based shear deformation theory for free vibration of functionally graded beams". *Appl Math Comput* 2015; 268: 1240-1258.
- [16] Deng H, Cheng W. "Dynamic characteristics analysis of bi-directional functionally graded Timoshenko beams". *Compos Struct* 2016; 141: 253-263.
- [17] Trinh LC, Vo TP, Thai HT, Nguyen TK. "An analytical method for the vibration and buckling of functionally graded beams under mechanical and thermal loads". *Compos Part B-Eng* 2016; 100:152-163.
- [18] Nguyen TT, Kim NI, Lee JH. "Free vibration of thin-walled functionally graded open section beams". *Compos Part B-Eng* 2016; 95: 105-116.
- [19] Houari MSA, Tounsi A, Bessaim A, Mahmoud SR. "A new simple three-unknown sinusoidal shear deformation theory for functionally graded plates". *Steel Compos Struct* 2016; 22:257-276.
- [20] Tounsi A, Houari MSA, Bessaim A. "A new 3-unknowns non-polynomial plate theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate". *Struct Eng Mech* 2016; 60:547-565.
- [21] Paul A, Das D. "Free vibration analysis of pre-stressed FGM Timoshenko beams under large transverse deflection by a variational method". *Engineering Science and Technology, an International Journal*, 19(2), 2016. pp 1003-1017.
- [22] Manzari R. J., Shahabian F. The Geometrically Nonlinear Dynamic Response of Metal-Ceramic FGM Plates under the Blast Loading. *Journal of Structural and Constructional Engineering*. DOI: 10.22065/JSCE.2018.120873.1482. (In Persian)
- [23] Soltani M., Asgarian B. "Finite element formulation for linear stability analysis of axially functionally graded non-prismatic Timoshenko beam". *International Journal of Structural Stability and dynamics*, doi.org/10.1142/S0219455419500020.
- [24] Yung Y.Y., Munz D. Stress analysis in a two materials joint with a functionally graded material. In: Shiota, T., Miyamoto, M.Y. (Eds.), *Functionally Graded Material*, pp. 41-46 (1996).
- [25] Jin Z. H., Paulino G.H. Transient thermal stress analysis of an edge crack in a functionally graded material. *International Journal of Fracture* 107, 73-98 (2001).
- [26] Delale F, Erdogan F. The crack problem for a nonhomogeneous plane. *ASME J Appl Mech* 50: 609-614 (1983).
- [27] MATLAB Version 7.6. MathWorks Inc. USA. 2008.
- [28] ABAQUS standard user's manual. Version 16, vol. I-III. Pawtucket (America): Hibbitt, Karlsson & Sorensen, 2016.