

## Vibration Modeling of Railroad under Concentrated Moving Load Using New Moving Macro-Element

Hamid Reza Vaziri<sup>1</sup>, Mohammad Reza Mansoori<sup>2\*</sup>, Fereydon Arbabi<sup>3</sup>, Armin Aziminejad<sup>4</sup>

1- Ph.D. Student in Structural Engineering, Faculty of Civil Engineering, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran

2- Assistant Professor, Faculty of Civil Engineering, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran

3- Professor, Faculty of Civil Engineering, Michigan Technological University, Michigan, U.S.A.

4- Assistant Professor, Faculty of Civil Engineering, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran

### ABSTRACT

One of the important issues in the vibration analysis of rail structures is to investigate the effect of train movement and the variable location of the load. This research introduces a new model to provide the ability to investigate 3D stress during analyzing a linear model. This model includes 6 degrees of independent transitional and rotational freedom, and one dependent degree of freedom as Warping to analysis the effect of moving loads. So, the interaction of the independent degrees of freedom has been considered due to the asymmetry of the cross section, especially in the earthquake load conditions. Finally, using a numerical Mathcad programing model, some of the parameters that are effective in modelling and vibrational analysis of rails have been examined. One of the important achievements of this study is to prove the effect of rail vibration acceleration on the characteristics of the analysis model as well as the need to determine the length of the computational model based on the results of the rail vibrational acceleration and it's processing at the end of the rail. According to the formulation performed, stiffness and damping matrix are asymmetric, because of the velocity and acceleration vector effect of the load, however the mass matrix remains symmetrical. Also, by creating initial sinusoidal displacement conditions on the system, the conditions of corrugation phenomena can be expressed. The seismic acceleration applied to the model to evaluate the relevant freedom degrees and determinate the permanent deformation is considered in the model. It indicates the presence of permanent twisting and warping values in the rail-beam model, is about 40-50% of the maximum value. According to this investigation, the determination of the boundary conditions based on the damping of the acceleration at the end of the rail is very effective in calculating the results more accurately.

### ARTICLE INFO

**Receive Date:** 17 September 2022

**Revise Date:** 01 May 2023

**Accept Date:** 09 May 2023

### Keywords:

Vibration

Railroad

Macro-Element

Moving Coordinate

Warping

All rights reserved to Iranian Society of Structural Engineering.

doi: <https://doi.org/10.22065/jsce.2023.361555.2931>

\*Corresponding author: Mohammad Reza Mansoori

Email address: m.mansoori@srbiau.ac.ir

## مدلسازی ارتعاش تیر ریل راه آهن تحت اثر بار متحرک با کمک و معرفی مدل جدید ماکرو المان متحرک

حمیدرضا وزیری<sup>۱</sup>، محمدرضا منصوری<sup>۲\*</sup>، فریدون اربابی<sup>۳</sup>، آرمین عظیمی نژاد<sup>۴</sup>

۱- دانشجوی دکتری مهندسی سازه، دانشکده مهندسی عمران، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

۲- استادیار، دانشکده مهندسی عمران، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

۳- استاد، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی میسینگان، میسینگان، آمریکا

۴- استادیار، دانشکده مهندسی عمران، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

### چکیده

از مسائل مهم در آنالیز ارتعاش سازه های ریلی بررسی اثر حرکت قطار و متغیر بودن محل بار است که اثرات دینامیکی مهمی بر سازه ریل دارد. این پژوهش با معرفی یک مدل جدید ماکرو المان متحرک، قابلیت بررسی تنشهای سه بعدی را ضمن تحلیل یک مدل خطی فراهم می کند. مدل حاضر شامل تیر اولر-برنولی از المان خطی بر بستر الاستیک است که هر المان دارای دوگره انتهایی بوده و امکان محاسبه همزمان در ۶ درجه آزادی مستقل انتقالی و دورانی و یک درجه آزادی وابسته وارپینگ، در هر گره و به صورت مستقیم و همزمان فراهم می کند. به منظور تعیین فاکتورهای مهم مدلسازی و آنالیز ارتعاشی ریل، با استفاده از مدلسازی عددی در نرم افزار ریاضی Mathcad15.0 برخی از پارامترهای لازم در آنالیز سازه های ریلی، بررسی گردید. از دستاورد های مهم این تحقیق، اثبات تاثیر شتاب ارتعاشی ریل بر مشخصات مدل آنالیزی می باشد. و ثابت می شود، طول مدل محاسباتی براساس تغییرات شتاب ارتعاشی ریل در طول آن و روند میرا شدن شتاب در انتهای ریل قابل اندازه گیری است. به دلیل وجود شتاب ارتعاشی سیستم و روند میرایی آن در طول ریل، انتخاب طول مدل برحسب روند میرایی شتاب ارتعاشی ریل، منطقی تر است. از اینرو حداقل طول مدل ماکرو المان، برای هر سرعت بار ۵۰۰ متر پیشنهاد می گردد. به دلیل وجود سرعت و شتاب و اثرات برداری بار متحرک و نیروهای ناشی از آن، ماتریسهای میرایی و سختی نامتقارن می گردد در حالیکه ماتریس جرم متقارن است. این پژوهش با ایجاد شرایط تغییرمکان اولیه سینوسی در مدل تیر ریل، اثرات ناهموارهای ایجاد شده در ریل را مورد بررسی قرار داده و شرایط ایجاد پدیده همگامی در مدل ساده شده ماکرو المان را بررسی می کند. از ویژگی های مهم مدل حاضر، امکان مطالعه همزمان در درجات آزادی مستقل و در پاسخ به شتاب لرزه ای اعمال شده بر ریل در درجات آزادی دارای اندرکنش می باشد.

کلمات کلیدی: ارتعاش، ریل، ماکرو المان، مختصات متحرک، وارپینگ.

شناسه دیجیتال:		سابقه مقاله:				
doi:	<a href="https://doi.org/10.22065/jsce.2023.361555.2931">https://doi.org/10.22065/jsce.2023.361555.2931</a>	چاپ	انتشار آنلاین	پذیرش	بازنگری	دریافت
	<a href="https://doi.org/10.22065/jsce.2023.361555.2931">10.22065/jsce.2023.361555.2931</a>	۱۴۰۲/۱۱/۳۰	۱۴۰۲/۰۲/۱۹	۱۴۰۲/۰۲/۱۹	۱۴۰۲/۰۲/۱۱	۱۴۰۱/۰۹/۲۶
محمدرضا منصوری m.mansoori@srbiau.ac.ir					*نویسنده مسئول: پست الکترونیکی:	

## ۱- مقدمه

بررسی ارتعاشات سازه های ریلی تحت اثر نیروهای مختلف همواره یکی از موضوعات مورد توجه پژوهشگران مهندسی عمران بوده است. این ارتعاشات ناشی از حرکت قطار و یا در اثر نیروهایی مانند زلزله می باشد. روشهای مختلفی برای آنالیز ارتعاشات وجود دارد که از جمله مهمترین آنها، تحلیل ارتعاشات با کمک روش اجزا محدود است. پژوهش پیش رو، در حقیقت از برهم نهادن مدل ماکرو المان و اصول حاکم بر روش مختصات متحرک و براساس اصول حاکم بر روش اجزا محدود شکل گرفته است. در این روش، معادلات حاکم بر المانها ابتدا براساس محاسبه مینیمم انرژی پتانسیل تعیین گردیده و سپس با کمک معادلات گالرکین تغییر مختصات داده شده است. سه مزیت مهم استفاده از مختصات متحرک را می توان عدم نیاز به بروز رسانی ماتریسهای جرم، سختی و میرایی، عدم نیاز به تعریف شرایط مرزی خاص و همچنین سرعت بالای محاسبات بیان کرد. ضمن آنکه مهمترین مزیت استفاده از ماکرو المان، امکان بررسی همزمان درجات آزادی یک المان سه بعدی ضمن مدلسازی یک المان تک محوری تیر و با در نظر گرفتن حالت اندرکنشی درجات آزادی مستقل می باشد؛ که خود موجب افزایش دقت محاسبات در کنار کاهش چشمگیر زمان تحلیل نسبت به مدلسازی در نرم افزارهای تجاری است.

پژوهشهای متعددی در دامنه زمان و فرکانس در خصوص مدلسازی سازه ریل و آنالیز ارتعاشات در سازه های ریلی صورت گرفته اند. اولین مدل برای مطالعه خط آهن توسط وینکلر<sup>۱</sup> ارائه شد [۱]. در این مدل، از تیر بر بستر الاستیک استفاده گردید و برای محاسبه تنش های خمشی ریل، از تراورس های طولی تحت بار چرخ استفاده شد. از دیگر تحقیقات می توان به پژوهش تیموشنکو<sup>۲</sup> [۲] اشاره کرد. او با کمک مدلسازی یک المان تیر، تحت اثر بار متحرک و در دامنه زمان، تحقیقات خود را انجام داد و معادلات حرکت را به دست آورد. مطالعات ارزشمند گه<sup>۳</sup> و همکاران [۳] و مطالعات تران<sup>۴</sup> و همکارانش [۴] بر روی ارتعاشات سازه های ریلی در محیط مختصات متحرک قابل از جمله تحقیقات قابل توجه است. گه و همکارانش [۳] در مقاله خود نوعی از کاربرد روش مختصات متحرک را تحت عنوان روش المان متحرک به کار بستند. در این پروژه یک مدل بر مبنای مختصات متحرک جهت تحلیل دینامیکی سازه ریل ایجاد گردید. در این مدلسازی، المان های متحرکی در نظر گرفته شد که همراه با بار روی بستر ویسکوالاستیک حرکت می کرد. تران و همکارانش در مقاله ای [۴] مطالعه عددی را برای بررسی پاسخ دینامیکی حرکت غیر یکنواخت قطارهای سریع السیر با استفاده از روش المان متحرک انجام دادند. نوین و دوهمال<sup>۵</sup> [۵] روش عددی برای مطالعه پاسخ دینامیکی تیر نامحدود اوپلر- برنولی واقع بر بستر وینکلر و تحت بار هارمونیک متحرک را ارائه دادند. بایوت<sup>۶</sup> [۷] با انجام یک مطالعه دقیقتر بر روی دو نوع بستر تحت اثر بار سینوسی و با کمک رابطه فوریه، خمش یک تیر تحت اثر بار متحرک را بررسی نمود. ماتیسوس<sup>۷</sup> [۸] با کمک مختصات متحرک و با کمک تبدیل فوریه، مساله بار دینامیکی را بر روی یک تیر محدود بر بستر الاستیک مورد مطالعه قرار داد. از پژوهش های مهم انجام شده در این زمینه مطالعه فلورنس<sup>۸</sup> [۹] بر روی مدل تیموشنکو برای یک نیروی ثابت متحرک، با سرعت ثابت است که حل معادلات با کمک روش لاپلاس انجام شده است. فرویو<sup>۹</sup> و همکاران او [۱۰] به بررسی اثر سرعت بحرانی بر روی تیر های مستقر بر بستر الاستیک غیر خطی پرداختند. در مطالعه آنها تیر مدلسازی شده، تحت اثر بارهای متحرک هارمونیک قرار داشت. آنها برای مدلسازی، مشخصات و خصوصیات ریل قطار را مد نظر قرار دادند. از جمله پژوهش های قدیمی و اساسی در محاسبات مربوط به مختصات متحرک مقاله متریکین<sup>۱۰</sup> و همکاران [۱۱] است که به بررسی اثر جرم متمرکز بر روی یک تیر نامحدود اولر برنولی می پردازد. در تحقیق انجام شده توسط متریکین و همکاران، جرم با تیر در تماس ممتد و کامل است و با سرعت ثابت در حرکت می باشد. این مطالعه را می توان از ابتدایی ترین تحقیقات مربوط به مدل جرم متحرک دانست که تحت عنوان معادله (۱) بیان شده است.

1- Winkler

2- Timoshenko

3- Koh

4- Tran

5- Nguyen &amp; Duhamel

6- Biot

7- Mathews

8- Florence

9- Ferreira

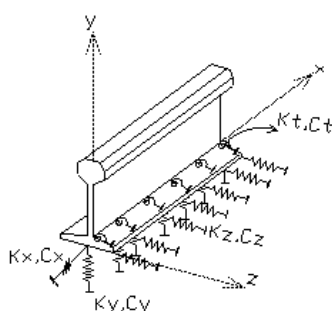
10- Metrikine

$$-\bar{m} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial v}{\partial t} + k_s v = -(m \frac{d^2 v^0}{dt^2} + q) \delta(x - Vt) \quad (1)$$

در معادله فوق،  $\bar{m}$  جرم واحد طول تیر،  $EI$  سختی خمشی تیر،  $\mu$  و  $k_s$  به ترتیب ضریب میرایی و ضریب سختی بستر فونداسیون و  $v^0(t) = v(x, t) = v(Vt, t)$  بیانگر تغییر مکان قائم ریل در هر نقطه و در زمانهای متفاوت آنالیز می‌باشد که وابسته به سرعت حرکت بار یعنی  $V$  است.

در خصوص ماکرو المان نیز تحقیقات مختلفی صورت پذیرفته است که عمده آنها به بررسی پایداری ریل پرداخته است. از جمله این تحقیقات، بررسی های انجام شده توسط اربابی و همکاران می‌باشد [۱۲-۱۷]. در مدل ارائه شده توسط این محققین یک المان تیر میله ای یک بعدی با شرایط بررسی و آنالیز سه بعدی در نظر گرفته شده است. (شکل ۱)

در این مدل سه بعدی در تمامی درجات آزادی از مدل فنرها و میراگرهای مجزا برای مدلسازی اثرات سختی و میرایی خارجی و از یک المان پیوسته طولی تیر جهت مدلسازی ریل استفاده شده است.



شکل ۱: تیر مدل ماکرو المان ریل راه آهن

در این مدل بررسی تغییر شکل‌ها و دوران‌ها در درجات آزادی مختلف به صورت همزمان امکانپذیر است. همچنین از مزایای مهم مدلسازی با ماکرو المان، می‌توان به بررسی اندرکنش درجات آزادی متفاوت با یکدیگر به دلیل خروج از مرکزیت های احتمالی در مدلسازی بار، سختی و یا میرایی و نیز محاسبه مستقیم وارپینگ اشاره کرد. در این حالت اعوجاج ناشی از عدم تقارن یا لاغری مقطع عضو و نیز تنشها و کرنشهای آن به صورت مستقیم قابل محاسبه بوده و نیاز به نوشتن معادلات مجزا جهت انجام محاسبات مربوط به اعوجاج مدل (وارپینگ مقطع مدل) نمی‌باشد.

از جمله تحقیقات موثر دیگر که در گذشته نزدیک در مدلسازی عددی ریل صورت گرفته است، تحقیقات ژانگ و همکاران [۱۸] می‌باشد که با کمک رویکردی مبتنی بر توابع گرین متحرک و درحوزه زمان، نیروهای چرخ و ریل را محاسبه نمودند آنان با در نظر گرفتن انعطاف پذیری ریل و نیز متحرک فرض نمودن چرخ با کمک ترکیب توابع گرین و انجام محاسبات درحوزه زمانی مدلسازی و آنالیز را انجام دادند و با در نظر گرفتن اثر یک یا چند چرخ، نیروهای چرخ-راه‌آهن را برای مجموعه ای از پارامترهای معمولی راه آهن و براساس پارامترهای خطوط ریلی پرسرعت چین محاسبه کردند. همچنین کایدنر و همکاران [۱۹] به بررسی اندرکنش ریل و قطار و مدلسازی آن تحت سه ساختار پرداختند. آنها در مطالعات خود سه روش حل، یعنی روش تبدیل انتگرال، روش حوزه زمانی و در نهایت روش ترکیبی را با هدف حل کارآمد مورد مقایسه قرار دادند. کایدنر و همکاران در این پژوهش نشان دادند که هر سه روش می‌توانند به سطوح دقت مشابهی برسند و در انجام این کار، روش حوزه زمان از نظر محاسباتی بیشترین کارایی را دارد. مدلسازی آنها در سه حالت یک، دو و سه بعدی بود. شان و همکاران [۲۰] در مقاله‌ای، به بررسی اثر اندر کنشی ریل و قطار و زمین زیر آن پرداختند. در روش آنها، تاریخچه بارگذاری بر روی بالاست و تاریخچه بارگذاری روی بستر و همچنین فعل و انفعالات وسیله نقلیه و مسیر در نظر گرفته شد. نتایج آنها نشان داد که بار محوری بحرانی وسیله نقلیه برای سیستم مورد بررسی حدود ۲۷ تن است. کانلی و همکاران [۲۱] یک روش جدید مدلسازی ترکیبی فرکانس- زمانی برای شبیه‌سازی تولید ارتعاش راه‌آهن و انتشار امواج ناشی از ارتعاشات ریل پیشنهاد دادند. همچنین کانلی و همکاران در مقاله ای دیگر [۲۲]

یک روش ساده شده برای ارزیابی لرزش ساختمان به دلیل تحریکات دلخواه پایه ناشی از ارتعاشات راه آهن ارائه دادند. آنها از طیف تحریک خاک در محل پایه ساختمان به عنوان ورودی استفاده کردند و میزان اثر پذیری پاسخ ساختمان در هر مکان دلخواه نسبت به ارتعاشات ریل را بررسی نمودند. آرسچ و همکاران [۲۳] در پژوه خود دریافتند که بسیاری از اندازه‌گیری‌های ارتعاشات زمین ناشی از حرکت قطار، در دامنه‌های بالایی و برای یک محدوده فرکانس متوسط می‌باشد. این جزء ارتعاش زمین را نمی‌توان به خوبی با بارهای دینامیکی قطار توضیح داد. آنها از یک حل عددی برای مدلسازی ارتعاشات زمین ناشی از راه‌آهن استفاده کردند و محاسبات را در حوزه فرکانس و به روش اجزای محدود انجام دادند. در بحث مدلسازی بستر نیز تحقیقات مشابهی انجام گرفته است از جمله یونسیان و همکاران [۲۴] در یک تحقیق جامع، مدل‌های مختلف پی الاستیک و ویسکوالاستیک را در سیستم‌های نوسانی ارائه کردند. آنها در این پژوهش یک پیش‌زمینه نظری دقیق و همچنین درک فیزیکی از انواع مختلف پایه‌ها با کاربرد در مکانیک سازه‌ها ارائه دادند. وبا کمک مدل شبیه سازی فنرهای خطی مستقل و نزدیک به هم خواص فونداسیون را مدلسازی نمودند.

در تمامی تحقیقات انجام شده پیشین بر روی ریل در استفاده از مختصات متحرک، مدلسازی و آنالیز تنها در یک جهت انجام شده است؛ درحالیکه در این پژوهش با کمک مدل ماکرو المان و استفاده از سیستم مختصات متحرک و نیز با در نظر گرفتن شرایط احتمالی خروج از مرکزیت، شرایط مدل سه بعدی تحت اثر بار متحرک به راحتی مدلسازی می‌گردد. این مهم با امکان سریع بررسی ارتعاشات دینامیکی سه بعدی و به صورت همزمان، زمان تحلیل را به مقدار قابل توجهی کاهش می‌دهد. همچنین از دیگر مزایای مدل معرفی شده تاکید بر اهمیت شتاب ارتعاشی ریل به عنوان مهمترین پارامتر تاثیرگذار در تعیین طول و ابعاد مدل محاسباتی است که در مطالعات پیشین مغفول و نادیده مانده است.

## ۱- مبانی محاسباتی (مبانی تئوریک مساله)

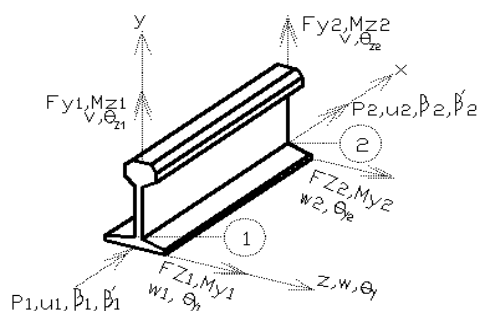
این پژوهش از دو قسمت تشکیل شده است. در گام نخست مدلسازی ماکرو المان مورد بررسی قرار گرفت و براساس اصل مینیمم انرژی پتانسیل، معادله حرکت حاکم بر سیستم در تمامی درجات آزادی محاسبه گردید. در ادامه، با کمک سیستم مختصات متحرک جهت بررسی اثرات بار متحرک، محاسبات به سیستم مختصات جدید انتقال یافت و سپس براساس معادلات ضعیف شده گالرکین<sup>۱۱</sup>، روابط مربوط به جرم، سختی و میرایی سیستم در تمامی درجات آزادی مستقل و وابسته تعیین گردید. در نهایت با کمک روش حل عددی صریح بتا- نیومارک آنالیز دینامیکی سیستم در گام زمانی  $\Delta t = 0.001 \text{ sec}$  و براساس شرایط اولیه سکون انجام گرفته است. در این محاسبات اثر قطار به صورت بار متمرکز در نظر گرفته شده است.

## ۱-۲- مبانی محاسباتی ماکرو المان

مطابق شکل ۲، یک مدل ماکرو المان خطی مبتنی بر تیر اولر- برنولی با دو گره در ابتدا و انتها و دارای ۷ درجه آزادی در هر گره نمایش داده شده است. در هر گره، ۶ درجه مربوط به درجات آزادی انتقالی و دورانی در سه راستای مجزای  $x$ ،  $y$  و  $z$  می‌باشد و درجه آزادی هفتم یک درجه آزادی وابسته به پیچش برای محاسبه مستقیم اثر وارپینگ می‌باشد. در این مدل وارپینگ به صورت مشتق اول زاویه پیچش تعریف شده است. اثر وارپینگ از این جهت مهم می‌باشد که به دلیل لاغر بودن جان ریل و نیز نامتقارن بودن آن احتمال رخداد کمانش پیچشی در ریل بسیار زیاد است. بنابراین بجای محاسبه مستقیم و انجام محاسبات بر روی نتایج ناشی از پیچش و نیروی محوری؛ اثر وارپینگ به صورت مستقیم و براساس مشتق اول پیچش بیان شده است. در این راستا با کمک از اصل مینیمم انرژی پتانسیل و اصل هامیلتون<sup>۱۲</sup> و در نهایت با کمک از معادلات گالرکین معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم تعیین و در نهایت ماتریس های مشخصه در درجات آزادی مختلف قابل محاسبه است.

<sup>11</sup> - Galerkin

<sup>12</sup> - Hamilton



شکل ۲: تعریف مختصات و درجات آزادی مربوط به مدل ماکرو المان

رابطه (۲)، به عنوان رابطه کلی هامیلتون جهت استخراج معادلات دیفرانسیل مورد استفاده واقع شد. در این رابطه،  $K$  انرژی جنبشی مدل،  $\Pi$  انرژی پتانسیل و  $\delta W$  بیانگر کار نیروهای غیر پایستار است. انرژی جنبشی حاصل تاثیر نیروی ناشی از جرم و انرژی پتانسیل، براساس سختی داخلی المان تیر، سختی فنرهای خارجی و کارنیروهای خارجی بیان شده است. در معادله هامیلتون کار نیروهای غیر پایستار نیز براساس میرایی سیستم تعریف شده است. برای محاسبات مربوط به درجات آزادی مختلف معادلات هامیلتون به صورت مجزا و با در نظر گرفتن شرایط اندرکنشی معادلات جداگانه قابل محاسبه می باشد.

$$\int_{t_1}^{t_2} d(K - \Pi) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0 \quad (2)$$

مطابق رابطه ۳ تا ۵ پارامترهای انرژی جنبشی، پتانسیل و کار نیروهای غیر پایستار قابل بیان است.

$$K = \frac{1}{2} \int_0^l (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dx + \frac{1}{2} \int_0^l \bar{J}_m \dot{\beta}^2 dx \quad (3)$$

$$\Pi_{axial} = \frac{1}{2} \int_0^l (EAu''^2 + EI_z v''^2 + EI_y w''^2 + GJ\beta''^2) dx + \frac{1}{2} \int_0^l (\bar{k}_x u^2 + \bar{k}_y v^2 + \bar{k}_z w^2 + \bar{k}_t \beta^2) dx - \frac{1}{2} (P.u + q_y.v + q_z.w + T.\beta) \quad (4)$$

$$\delta W_x = - \int_0^l (\bar{C}_x \dot{u} \delta u + \bar{C}_y \dot{v} \delta v + \bar{C}_z \dot{w} \delta w + \bar{C}_t \dot{\beta} \delta \beta) dx \quad (5)$$

در روابط فوق  $u, v, w$  و  $\theta$  به ترتیب تغییر مکان های در راستای درجات آزادی محوری  $x$ ، جانبی  $y$  و  $z$  و نیز دوران (پیچش) حول محور  $x$  می باشند. همچنین  $EA, EI$  و  $GJ$  بیانگر سختی های محوری و خمشی در راستاهای مختلف و نیز سختی پیچشی هستند. همچنین  $k$  معرف سختی فنرهای خارجی ( ناشی از عواملی مانند سختی بستر، تراورس ها و ... ) در مدل سازی بوده همچنانکه  $C$  بیانگر نماد میرایی و  $p, q$  و  $T$  هم نشان دهنده بار خارجی در راستای درجات آزادی مجزا است.

با برقراری اصل هامیلتون و براساس معادلات (۳ تا ۵) معادلات دیفرانسیل دینامیکی حرکت ماکرو المان تیر مدل ریل به صورت روابط (۶ تا ۹) حاصل می گردد:

$$\bar{m}\ddot{u} + \bar{C}_x \dot{u} - EAu'' + \bar{k}_x u - P.\delta(x-Vt) = 0 \quad (6)$$

$$\bar{m} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \bar{C}_y \frac{\partial v}{\partial t} + EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \bar{k}_y v - q_y \delta(x-Vt) = 0 \quad (7)$$

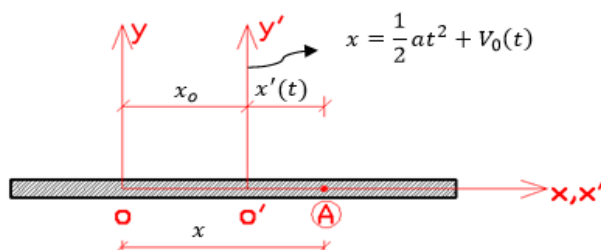
$$\bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \bar{C}_z \frac{\partial w}{\partial t} + EI_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \bar{k}_z (w - \beta h) - q_z \delta(x-Vt) = 0 \quad (8)$$

$$\bar{J}_m \ddot{\beta} + GJ\beta'' + (\bar{k}_t + \bar{k}_z h^2)\beta + E\Gamma\beta^{iv} - \bar{C}_t \dot{\beta} + 2\bar{k}_z h w - T\delta(x-Vt) = 0 \quad (9)$$

در درجه آزادی  $w$  مربوط به انتقال جانبی در هر گره، با توجه به فاصله محل اثر تراورس ها و مرکز برش به مقدار  $h$  اندرکنش بین درجات آزادی انتقال جانبی و پیچش ناگزیر است. همین شرایط برای درجه آزادی پیچشی نیز حاکم می باشد. همچنین به دلیل اینکه میرایی جانبی در اثر مجموع شرایط حاکم بر میرایی ریل، بالاست و تراورس است، بنابراین خروج از مرکزیت برای آن منظور نشده است. لذا با در نظر گرفتن شرایط فوق در روابط (۸ و ۹) اثر اندرکنشی درجات آزادی جانبی و پیچشی قابل مشاهده است.

## ۲-۲- مدلسازی بار متحرک در سیستم ماکرو المان

برای مدلسازی بار متحرک، روشهای متفاوتی در اجزا محدود وجود دارد. از جمله آنها می توان به روش جابجایی بار در هر گام زمانی، تکنیک بریدن و چسباندن و مختصات متحرک اشاره داشت. در روش جابجایی بار، باید موقعیت و محل اثر بار تغییر یابد که این امر مستلزم اصلاح بردار بار در هر گام زمانی می باشد. همچنین در صورت مدلسازی وسیله نقلیه به صورت جرم و فنر ماتریسهای مشخصه مدل، در هر گام زمانی باید اصلاح و به روز رسانی شود. از دیگر روشهای مدلسازی بار متحرک، تکنیک بریدن و چسباندن المان می باشد به این صورت که در ابتدا باید طول ریل بسیار بلند در نظر گرفته شود؛ سپس با شروع حرکت وسیله نقلیه، بار بر روی یک المان خاص قرار می گیرد و ثابت می ماند و در هر گام زمانی یک المان از ابتدای ریل جدا شده به انتهای ریل انتقال می یابد. در این حالت شرایط حرکت بار تامین می گردد ضمن آنکه موقعیت بار از نظر تشکیل معادلات ثابت بوده و دیگر نیازی به بروزرسانی بردار بار و ماتریس های مشخصه نیست اما این روش مستلزم برابر بودن طول تمامی المانها و اصلاح شماره گره ها در هر گام زمانی می باشد. روش سوم استفاده از سیستم مختصات متحرک است. در این حالت بار بر روی مرکز مختصات و بر روی المانی دلخواه قرار می گیرد که این المان، همراه با بار متحرک است و فرمول سازی براساس حرکت دو دستگاه مختصات جدید (متحرک) و قدیم نسبت به هم انجام می پذیرد و در نتیجه سیستم مختصات وابسته به بار متحرک است. از جمله مزایای این روش می توان به عدم نزدیک شدن وسیله نقلیه به شرایط مرزی انتهایی و اطمینان از صحت پاسخ، به خصوص در محاسبات مربوط به تغییر مکان ریل در این محدوده، عدم نیاز به اصلاح و بروزرسانی بردار بار و ماتریس های مشخصه و در نهایت زمان مناسب تحلیل اشاره داشت. همچنین نیازی به در نظر گرفتن المانهای با طول یکسان نمی باشد. با قرار دادن بار متحرک بر سیستم مختصات جدید  $(x', y')$  و حرکت آنها نسبت به دستگاه مختصات ثابت  $(x, y)$  و اعمال نمودن رابطه بین تغییرات حرکتی بار در سیستم مختصات های قدیم و مختصات تعمیم یافته جدید، مطابق با شکل ۳ و اصلاح روابط (۶ تا ۹) بر اساس فرمولاسیون گالرکین، معادلات ماکرو- المان در درجه آزادی های مستقل به صورت روابط (۱۰ تا ۱۳) قابل بیان خواهد بود.



شکل ۳: مدلسازی دستگاه مختصات ثابت و متحرک و رابطه بین آنها

$$\bar{m} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a \frac{\partial u}{\partial r} - 2B \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial t} + B^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) + \bar{C}_x \left( \frac{\partial u}{\partial t} - B \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \bar{k}_x u - EA \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - P \delta(r + x_0) = 0 \quad (10)$$

$$\bar{m} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a \frac{\partial v}{\partial r} - 2B \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial t} + B^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right) + \bar{C}_y \left( \frac{\partial v}{\partial t} - B \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \bar{k}_y v - EI_z \frac{\partial^4 v}{\partial r^4} - q_y \delta(r + x_0) = 0 \quad (11)$$

$$\bar{m} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a \frac{\partial w}{\partial r} - 2B \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial t} + B^2 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) + \bar{C}_z \left( \frac{\partial w}{\partial t} - B \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \bar{k}_y (w - h\beta) - EI_y \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} - q_z \delta(r - Vt) = 0 \quad (12)$$

$$\bar{J}_m \left( \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} - a \frac{\partial \beta}{\partial r} - 2B \frac{\partial^2 \beta}{\partial r \partial t} + B^2 \frac{\partial^2 \beta}{\partial r^2} \right) + GJ \frac{\partial^2 \beta}{\partial r^2} + (\bar{k}_t + \bar{k}_z h^2) \beta + \bar{C}_t \left( \frac{\partial \beta}{\partial t} - B \frac{\partial \beta}{\partial r} \right) + \bar{k}_y (w - h\beta) - E\Gamma \frac{\partial^4 \beta}{\partial r^4} - 2\bar{k}_z h w - T_x \delta(r - x_0) = 0 \quad (13)$$

در روابط فوق  $\delta$  بیانگر تابع دلتای دیراک می باشد. همچنین  $\Gamma$  ثابت پیچشی وارپینگ<sup>۱۳</sup> است.

جهت بهره گیری از مدل اجزا محدود به منظور تحلیل مدل، تابع شکل به فرم کلی رابطه (۱۴) قابل تعریف می باشد.

$$X = \sum NS \quad (14)$$

<sup>13</sup> -Warping

که در رابطه فوق  $X$  نماد کلی بردار تغییر مکان در هر درجه آزادی است.  $N$  تابع شکل و  $S$  بردار وابسته به زمان است. بردار تابع شکل به صورت یک ماتریس  $14 \times 1$  برای درجات آزادی مختلف به صورت زیر قابل بیان بوده و اندیس زیر نمایه  $N$  بیانگر درجه آزادی مربوطه می‌باشد. در رابطه (۱۵) مقادیر تابع شکل محوری نشان داده شده است.

$$Nu_{1,1} = \frac{x}{l}, Nu_{1,8} = 1 - \frac{x}{l} \quad (15)$$

برای توابع شکل خمشی و پیچشی روابط (۱۶ تا ۲۰) استفاده شده است. با توجه به اینکه چرخش نیز مانند تغییر مکان در گره دو درجه آزادی دارد؛ برای تابع شکل آنها در راستای قائم و جانبی از تابع شکل درجه سه مطابق روابط (۱۷) تا (۲۰) استفاده شده است.

$$N = [N1 \quad N2 \quad N3 \quad N4] \quad (16)$$

$$N1 = \frac{2x^3}{l^3} - \frac{2x^2}{l} + 1 \quad (17)$$

$$N2 = \frac{x^3}{l^2} - \frac{2x^2}{l^2} + x \quad (18)$$

$$N3 = -\frac{2x^3}{l^3} + \frac{3x^2}{l^2} \quad (19)$$

$$N4 = \frac{x^3}{l^2} - \frac{x^2}{l} \quad (20)$$

براساس محاسبات انجام شده، ماتریس جرم براساس رابطه (۲۱) قابل بیان است.

$$M_e = \bar{m} \left( \int_0^l (N_u^T N_u + N_v^T N_v + N_w^T N_w) dr \right) + \bar{J}_m \int_0^l N_\beta^T N_\beta dr \quad (21)$$

همچنین ماتریس سختی به صورت روابط (۲۲ تا ۲۶) برای درجات آزادی مستقل بیان می‌گردد.

$$K_u = k_x \int_0^l N_u^T N_u dr - EA \int_0^l \frac{\partial N_u^T}{\partial r} \frac{\partial N_u}{\partial r} dr - \bar{m} a \int_0^l N_u^T \frac{\partial N_u}{\partial r} dr - \bar{m} B^2 \int_0^l \frac{\partial N_u^T}{\partial r} N_u dr - \bar{B} \bar{C}_x \int_0^l N_u^T \frac{\partial N_u}{\partial r} dr \quad (22)$$

$$K_v = \bar{k}_y \int_0^l N_v^T N_v dr - EI_z \int_0^l \frac{\partial^2 N_v^T}{\partial r^2} \frac{\partial^2 N_v}{\partial r^2} dr - \bar{m} a \int_0^l N_v^T \frac{\partial N_v}{\partial r} dr + \bar{m} B^2 \int_0^l N_v^T \frac{\partial^2 N_v}{\partial r^2} dr - \bar{B} \bar{C}_y \int_0^l N_v^T \frac{\partial N_v}{\partial r} dr \quad (23)$$

$$K_w = \bar{k}_z \int_0^l N_w^T N_w dr - EI_y \int_0^l \frac{\partial^2 N_w^T}{\partial r^2} \frac{\partial^2 N_w}{\partial r^2} dr - (\bar{m} a + \bar{B} \bar{C}_z) \int_0^l N_w^T \frac{\partial N_w}{\partial r} dr + \bar{m} B^2 \int_0^l N_w^T \frac{\partial^2 N_w}{\partial r^2} dr - \quad (24)$$

$$h \bar{k}_z \int_0^l N_w^T N_\beta dr$$

$$K_\beta = EI \int_0^l \frac{\partial^2 N_\beta^T}{\partial r^2} \frac{\partial^2 N_\beta}{\partial r^2} dr + (GJ + B^2 \bar{J}_m) \int_0^l N_\beta^T \frac{\partial^2 N_\beta}{\partial r^2} dr - (a \bar{J}_m + \bar{B} \bar{C}_t) \int_0^l N_\beta^T \frac{\partial N_\beta}{\partial r} dr + \quad (25)$$

$$(\bar{k}_t + \bar{k}_z h^2) \int_0^l N_\beta^T N_\beta dr - 2 \bar{k}_z h \int_0^l N_\beta^T N_w dr$$

$$K_e = K_u + K_v + K_w + K_\beta \quad (26)$$

و ماتریس میرایی به صورت رابطه (۲۷) خواهد شد.

$$C_e = \int_0^l (\bar{C}_x N_u^T N_u + \bar{C}_y N_v^T N_v + \bar{C}_z N_w^T N_w + \bar{C}_t N_\beta^T N_\beta) dr - 2 \bar{m} B \int_0^l (N_u^T \frac{\partial N_u}{\partial r} + N_v^T \frac{\partial N_v}{\partial r} + N_w^T \frac{\partial N_w}{\partial r}) dr \quad (27)$$

$$- 2 \bar{J}_m B \int_0^l N_\beta^T \frac{\partial N_\beta}{\partial r} dr$$

براساس روابط ارائه شده فوق، ماتریس سختی و میرایی به دلیل وجود بردار سرعت و نیز شتاب غیر متقارن می‌باشد. در حالیکه به دلیل پیوسته بودن جرم، سرعت و شتاب حرکت بار، در تقارن ماتریس جرم بی‌اثر است. همچنین اثر اندرکنش درجات آزادی انتقالی جانبی در راستای  $Z$  و درجات آزادی پیچشی و وارپینگ در ماتریس سختی به وضوح و به دلیل عبارت  $\int_0^l N_w^T N_\beta dr$  قابل مشاهده است.

### ۳-۲- مدلسازی و حل در حوزه فرکانس

در گذشته روش حل در حوزه فرکانس (حل فوریه یا حل سریع فوریه) به منظور تحلیل ارتعاش تیر بر بستر الاستیک تحت اثر بارهای متحرک مورد استفاده واقع شده است. در بخش، تحلیل در حوزه فرکانس و در راستای درجه آزادی قائم به منظور ارزیابی نتایج



استفاده شده است. در روش حل درحوزه فرکانس، از تبدیل فوریه گسسته استفاده شد. این تحریک عمومی متناوب به صورت مجموعی از فرمولاسیون هارمونیک تابع زمان و برای فرکانس های مختلف بیان می شود. بنابراین پاسخ دینامیکی را می توان با استفاده از تبدیل سریع فوریه (FFT) به دست آورد. به همین منظور، با کمک رابطه نمایی هارمونیک به صورت  $e^{i\omega t}$ ، که در آن فرکانس تحریک است. معادله حرکت تعیین و پاسخ محاسبه می گردد. این نمونه حل در مقالات مختلف نظیر مطالعات گه [۳] و نیز تران [۴] و اربابی [۱۳ و ۱۲] دیده می شود.

براین اساس معادله (۷) براساس حل در حوزه فرکانس و پس از انجام محاسبات و ساده سازی، به صورت معادله (۲۸) قابل بیان است

$$\frac{\partial^4 s}{\partial s^4} + 4\alpha^2 \frac{\partial^2 v(s)}{\partial s^2} + 8\alpha\beta \frac{\partial v(s)}{\partial s} + 4v(s) - 8\delta(s) = 0 \quad (28)$$

در رابطه (۲۸) پارامترهای  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\lambda$  به صورت به ترتیب روابط (۲۹) تا (۳۱) قابل تعریف هستند. با کمک حل سریع فوریه در حوزه فرکانس رابطه (۳۲) جهت آنالیز قابل استفاده خواهد بود و با رابطه نویسی در نرم افزار ریاضی  $Mathcad15.0$ <sup>۱۴</sup> می توان نمودارهای مربوطه را به دست آورد.

$$\alpha = \frac{V}{2\lambda} \sqrt{\frac{m}{EI}} \quad (29)$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (30)$$

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} \quad (31)$$

$$v(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{8\left(\frac{p\lambda}{2k}\right)e^{isq}}{q^4 + 4\alpha^2 q^2 + 8\alpha\beta iq + 4} dq \quad (32)$$

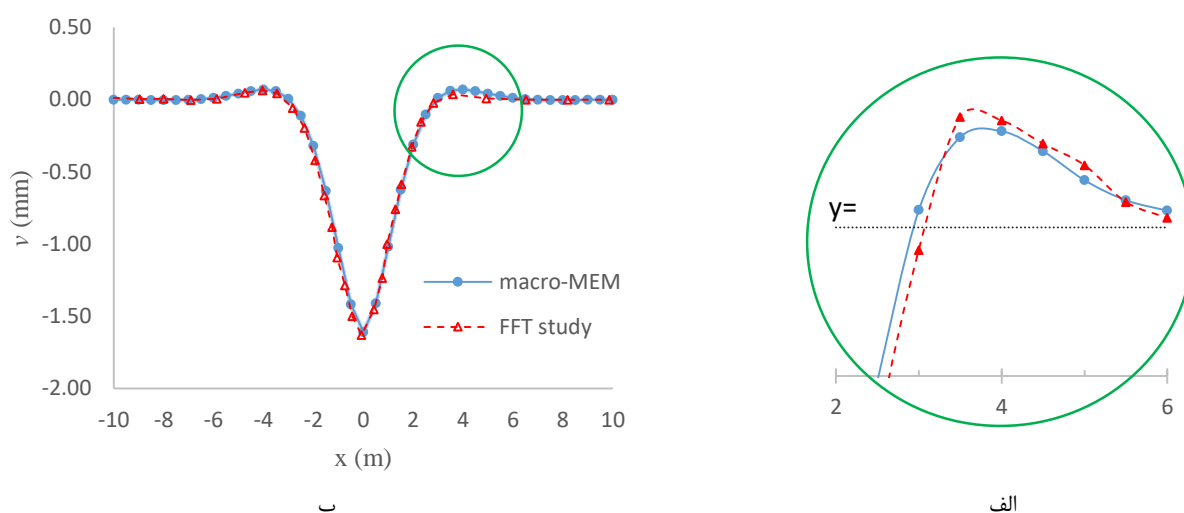
در روابط فوق S متغیر محاسباتی در حوزه فرکانس است

## ۳- بررسی نتایج عددی

### ۳-۱- راستی آزمایی

به منظور کنترل نتیجه محاسبات نمودار تغییر مکان ریل تحت اثر یک بار شبه دینامیکی متمرکز مورد بررسی قرار گرفت و با نتایج فرمول بندی و حل در حوزه فرکانس و بر مبنای محاسبات مبتنی بر تبدیل فوریه مورد بررسی و مقایسه گردید که نتایج حاکی از دقت بالای مدل سازی و اختلاف کمتر از ۱٪ در نتایج محاسبات است. در مدل سازی عددی از کد نویسی در نرم افزار  $MathCad 15.0$  و براساس روش تحلیل دینامیکی عددی بتا- نیومارک نموی استفاده شده است. شکل ۴-الف، تغییر مکان ریل تحت اثر بار متمرکز دینامیکی را نشان می دهد. محاسبات در گام زمانی  $\Delta t = 0.001 \text{ sec}$ ، و تحت اثر بار متحرک  $P = 4.022 \times 10^4 \text{ N}$ ، انجام گرفته و نتایج حاکی از میراشدن تغییر مکان در فاصله کوتاهی از محل اثر بار است. در فاصله حدود ۴ متری از محل اثر با یک برخاست در ریل مشاهده شد (شکل ۴-ب) که هر چند مقدار آن ناچیز است اما نشان دهنده امکان جدایی ریل از تراورس و یا تراورس از بالاست می باشد که نیاز مند بررسی ساختار زیر ریل در این ناحیه و به صورت مجزا است.

<sup>۱۴</sup> یک نرم افزار محاسباتی-ریاضیاتی است که قابلیت بسیار بالایی جهت برنامه نویسی، مدل سازی و فرمول نویسی دارد. این نرم افزار دارای بانک جامع توابع و معادلات می باشد. از مزایای مهم آن قابلیت نگارش و محاسبات با کمک علائم ریاضیاتی است.



شکل ۴: تغییرات تغییر مکان ریل صحت سنجی با محاسبات حل در حوزه فرکانس

### ۲-۳- مشخصات مدل مورد بررسی

جهت بررسی بهتر نتایج مدل‌سازی ماکرو-المان تیر ریل راه آهن تحت اثر بار متمرکز متحرک، برخی از نتایج به صورت نمودارهایی مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

در جدول ۱، مشخصات مقطع ریل و خصوصیات هندسی و استاتیکی آن و در جدول شماره ۲، خصوصیات مدل دینامیکی نظیر سختی و میرایی در درجات آزادی متفاوت بررسی گردید.

جدول ۱: مشخصات مقطع ریل

مقدار	نماد	مشخصات
$6034 \text{ kg/m}$	$\bar{W}$	وزن واحد طول ریل
$7587 \text{ mm}^2$	$A$	مساحت مقطع ریل
$30.55 \times 10^6 \text{ mm}^4$	$I_z$	لنگر دوم سطح حول محور Z
$5.13 \times 10^6 \text{ mm}^4$	$I_y$	لنگر دوم سطح حول محور Y
$2 \times 10^5 \text{ MPa}$	$E$	مدول الاستیسیته مقطع
$7.85 \text{ ton/m}^3$	$\gamma$	دانسیته مقطع ریل
$3.79 \times 10^{10} \text{ mm}^6$	$\Gamma$	ضریب وارپینگ

جدول ۲: پارامترهای موثر در مدلسازی ریل

مشخصات	نماد	مقدار
مقدار بار متمرکز	$P$	$4.022 \times 10^4 N$
سختی بستر	$\bar{k}_y$	$1.00 \times 10^7 N/m$
سختی معادل تراورس	$\bar{k}_z$	$1.67 \times 10^6 N/m$
سختی پیچشی	$\bar{k}_t$	$4.58 \times 10^4 N \cdot m/m$
میرایی در راستای Y	$\bar{c}_y$	$4900(N \cdot s) / m$
میرایی در راستای Z	$\bar{c}_z$	$2500(N \cdot s) / m$

در جدول ۱، پارامتر  $\Gamma$ ، عبارتست از ضریب ثابت پیچشی مربوط به اثر وارپینگ بر اساس مفاهیم تئوری الاستیسیته [۲۵] که مطابق رابطه (۳۳) تعیین می‌شود. همچنین میرایی  $\bar{c}_y$  به ترتیب براساس نتایج میدانی و مطالعه بر روی بستر زیر ریل مطابق تحقیقات که [۳] تعیین و  $\bar{c}_z$  براساس نتایج میرایی رایلی [۲۶] و براساس فرمول (۳۴)، براساس مشخصات جرمی و سختی تراورس و با فرض نسبت میرایی ۵ درصد محاسبه شده است.

$$\Gamma = \frac{I_y d^2}{4} \quad (33)$$

$$C_z = \alpha m_{travers} + \beta k_{travers} \quad (34)$$

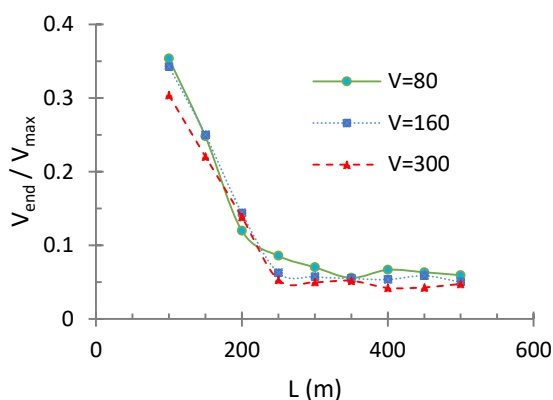
در رابطه (۳۴)، مقادیر  $\alpha$  و  $\beta$  براساس نتایج تحقیق اربابی و بنی مهد [۲۷] انتخاب شده است.

اولین گام در بررسی مدل تعیین طول مناسب جهت بررسی و آنالیز مدل است. در این راستا مدل های با طول ۱۰۰ تا ۵۰۰ متر تحت اثر بار متمرکز متحرک قرار گرفت.

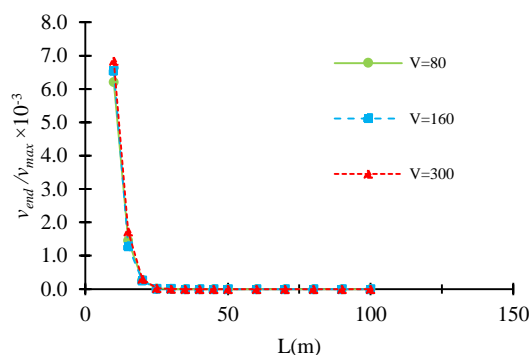
### ۳-۳- نتایج عددی تحلیل

شکل ۵، به بررسی اثر طول مدل بر دقت پاسخ ها می پردازد. محور افقی در این نمودارها طول مدل بوده و محور قائم بیانگر نسبت پارامترهای مورد بررسی تغییر مکان، سرعت و شتاب ارتعاشی در انتهای ریل به مقدار ماکزیمم متناظر آنها و براساس طول های مختلف است. در حالت الف، اثر طول ریل بر پاسخ تغییر مکان مورد ارزیابی قرار گرفته و همانطور که در نمودار نیز مشهود است؛ در صورتیکه ارزیابی تغییر مکان به تنهایی مد نظر باشد. طول مدل انتخابی تاثیری در دقت پاسخ تغییر مکان مدل ندارد و تیر مدل ریل را با هر طولی می توان مدلسازی نمود. مطابق شکل ۵- الف، از طول حدود ۲۰ متر، مقدار نسبت تغییر مکان در انتهای مدل به مقدار تغییر مکان ماکزیمم در راستای محور قائم نمودار ثابت گردیده و به صفر متمایل می گردد؛ درحالیکه مطابق اشکال ۵- ب و ج به ترتیب تا طول های ۳۰۰ متر و ۵۰۰ متر مقادیر محور قائم (سرعت و شتاب) متفاوت بوده و پس از آن ثابت می شود. براساس مطالعه این نمودارها می توان گفت که شتاب ارتعاشی ایجاد شده در سازه ریل، بهترین پارامتر تعیین کننده طول مدل است. در طول بالای ۵۰۰ متر شتاب ارتعاشی ریل به طور کامل مستهلک می گردد و نسبت شتاب ارتعاشی در انتهای ریل به مقدار ماکزیمم به مقدار کمتر از ۰,۰۱ کاهش می یابد. این مطلب در سرعت های مختلف مطابق نمودارهای نشان داده شده در شکل ۵، قابل تایید می باشد و مطابق نمودارها هرچند که روند میرا شدن پارامترهای محاسباتی تغییر مکان، سرعت و شتاب در انتهای ریل برای سرعت های بالای قطار، کندتر روند کاهشی می یابد؛ اما در طولهای بالای ۵۰۰

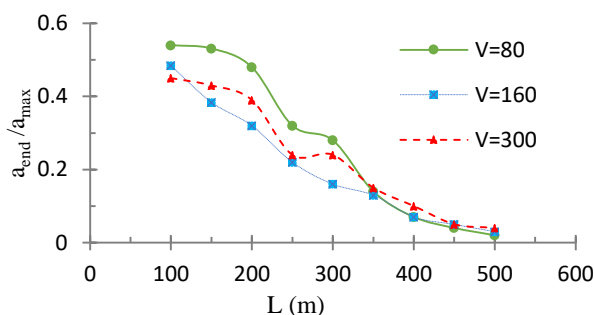
متر نسبت شتاب ارتعاشی در انتهای ریل به مقدار ماکزیمم به مقدار کمتر از ۰,۰۱ برای تمامی سرعت های حرکت قطار قابل مشاهده است.



ب- تغییرات سرعت



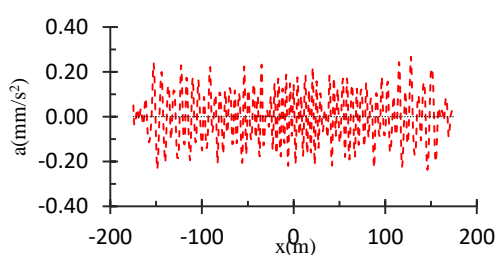
الف- تغییرات تغییر مکان



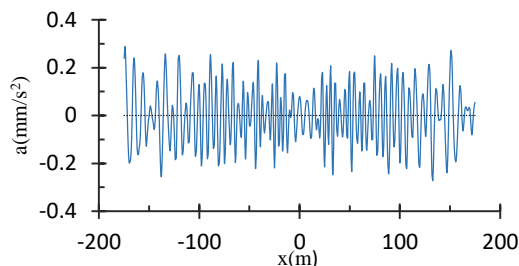
ج- تغییرات شتاب

شکل ۵: نمودارهای اثر طول مدل بر پارامترهای تغییر مکان، سرعت و شتاب

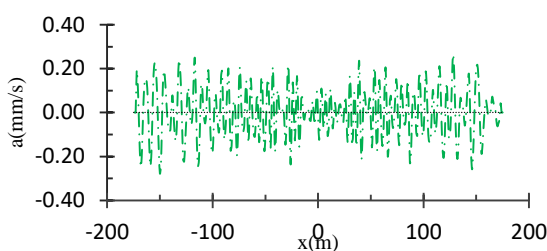
از دیگر پارامترهای کلیدی در مدلسازی ماکروالمان، بیان و تعریف شرایط انتهایی است. هرچند که در تمامی تحقیقات بر این امر تاکید شده است که مدلسازی در مختصات متحرک نیاز به تعریف شرایط خاص ندارد و محاسبات تئوریک و بررسی نمودارهای تغییر مکان نیز موید این مطلب است، اما بررسی نمودارهای شتاب ارتعاشی ریل روایتی دیگر از تعریف شرایط انتهایی را بیان می‌کند. شکل ۶، به بررسی تاثیر چگونگی تعریف شرایط انتهایی در پاسخ تغییر مکان و شتاب ارتعاشی ریل و برای سه حالت متفاوت مدلسازی شرایط انتهایی می‌باشد. در حالت اول هیچگونه شرایط انتهایی برای دو انتهای مدل در نظر گرفته نشده است (شکل ۶-الف). مطابق این شکل شتاب در انتهای مسیر میرا نمی‌شود و نسبت مقدار شتاب انتهایی به مقدار اکستریم آن در طول ریل در حدود ۰,۱۸ باقی می‌ماند. در حالت دوم در مدل ساخته شده در نرم افزار *mathcad15.0* شرایط انتهایی گیردار فرض شده است. در این حالت در المانهای انتهایی یک افزایش نسبی در شتاب دیده می‌شود که حکایت از وجود نویز و برگشت موج ارتعاشی شتاب و اختلال امواج شتاب را دارد با این وجود نسبت مقدار شتاب انتهایی به مقدار اکستریم آن در طول ریل در حدود ۰,۰۲۵ است. در حالت سوم با افزایش سختی به مقدار بیش از صد برابر در دو المان انتهایی شتاب ارتعاشی ریل میرا گردیده و مانع از برگشت موج ارتعاشی ریل می‌شود. و نسبت شتاب ارتعاشی به مقدار اکستریم به کمتر از ۰,۱ درصد کاهش می‌یابد. تداخل امواج، به خصوص در قسمت شتاب ارتعاشی دلیل اصلی عدم میرایی در دو انتهای مدل است. با معرفی المان با سختی بالا امکان برگشت موج و تداخل آن ناممکن شده و شتاب میرا می‌شود.



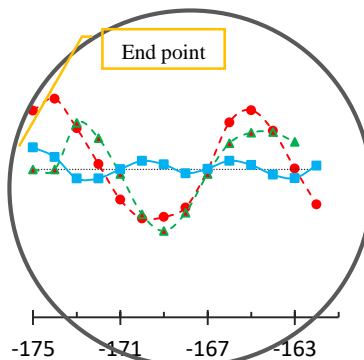
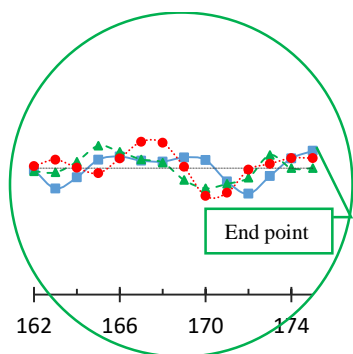
ب- شرایط انتهایی گیردار



الف- شرایط انتهایی آزاد



ج- تعریف شرایط انتهایی با افزایش سختی المانها

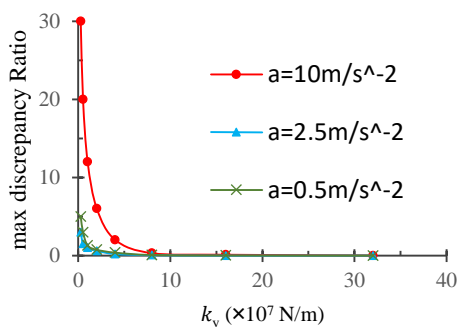


د- مقایسه شتاب در شرایط انتهایی

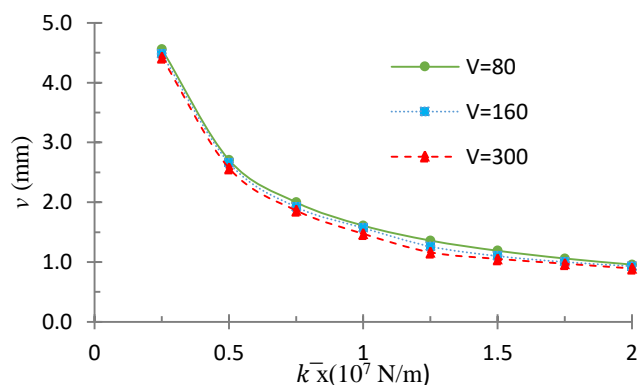
شکل ۶: مقایسه نمودار های شتاب ارتعاشی ریل بر اساس نوع تعریف شرایط انتهایی

از دیگر نکات مهم در مدلسازی ریل وضعیت تعریف بستر زیر ریل و شرایط حاکم بر آن می باشد. در این حالت مقدار سختی بستر از مقدار  $\bar{k} = 0.25 \times 10^7 \text{ N/m}$  برای مدلسازی سست ترین حالت خاک بستر تا مقدار  $\bar{k} = 2.0 \times 10^7 \text{ N/m}$  به عنوان سخت ترین مقدار سختی خاک بستر متغیر در نظر گرفته شده است. در شکل ۷، تاثیر پاسخ شتاب حرکتی بار بر پاسخ تغییر مکان ریل برای ضرایب مختلف سختی بستر نشان داده شده است. در این نمودار نسبت تغییر مکان بستر در حالت بار با شتاب های متفاوت  $a = 0.5 \text{ m/s}^2$ ،  $a = 2.5 \text{ m/s}^2$  و  $a = 10 \text{ m/s}^2$  نسبت به حالت بار با سرعت ثابت یعنی برای حالت شتاب  $a = 0$  بررسی شد و نتایج، مطابق نمودار شکل ۷، موید این مطلب است که در حالت جنس بستر های مختلف و برای شتاب های بالای حرکت بار، مقدار تغییر مکان به خصوص در حالت بستر سست، نمود بیشتری پیدا می کند. این به معنای آنست که امکان وقوع تشدید در شتاب های بالا و در زمین های سست بیشتر است. همچنین مطابق نمودار شکل ۸، همانطور که انتظار می رود تغییرات سختی بستر بر پاسخ تغییر مکان تیر ریل اثر داشته و با افزایش مقدار سختی بستر مقدار تغییر مکان، کاهش شدید می یابد. تاثیر سختی بستر تا مقدار  $\bar{k} = 1.25 \times 10^7 \text{ N/m}$  بر روی تغییر مکان وسط دهانه تیر مدل ریل قابل توجه بوده در حالیکه برای مقادیر  $\bar{k} \geq 1.25 \times 10^7 \text{ N/m}$  این روند ثابت شده و تغییرات سختی اثر قابل ملاحظه ای بر پاسخ نخواهد داشت. به عبارت ساده تر با افزایش سختی بستر به مقدار بیش از  $\bar{k} \geq 1.25 \times 10^7 \text{ N/m}$  مقدار تغییر مکان ماکزیمم ریل در

جهت قائم به مقدار کمتر از ۱ میلیمتر کاهش می یابد و روند ثابتی را خواهد داشت. در حالیکه در زمینهای سست تاثیر مقدار سختی بستر بر تشدید مقدار تغییر مکان قائم ریل به وضوح قابل مشاهده است.

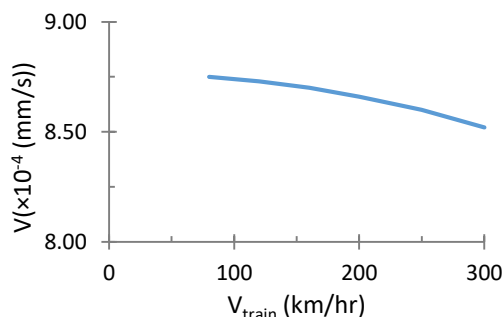


شکل ۷: نمودار نسبت تغییر مکان بستر در حالت بار با شتاب های متفاوت نسبت به حالت بار با سرعت ثابت برای جنس بستر های مختلف

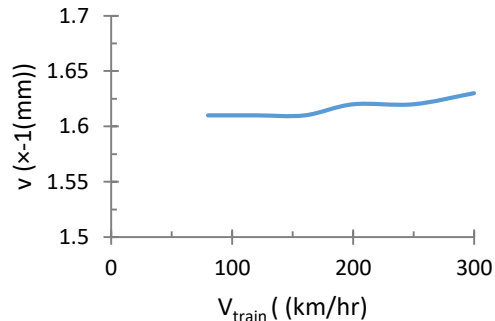


شکل ۸: بررسی تغییر مکان در نقطه میانی تیر برای سختی های بستر متفاوت

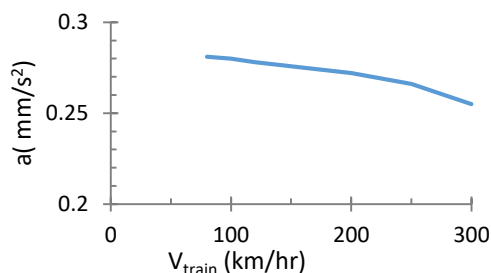
یکی از پارامترهای مهم و تاثیرگذار در پاسخ ریل سرعت حرکت بار می باشد. شکل ۹، به بررسی اثر تغییرات سرعت بار بر سه پاسخ ارتعاشی ریل یعنی مقدار تغییر مکان، سرعت و شتاب ارتعاشی ریل می پردازد. مطابق شکل، پاسخ های سرعت و شتاب ارتعاشی ریل به ترتیب، حساسیت بیشتری را به سرعت حرکت بار از خود نشان می دهند. در حالیکه تغییرات سرعت بار بر ماکزیمم تغییر مکان ریل تاثیر چندانی ندارد (شکل ۹-ب). در بررسی نمودار های شکل ۹، ماکزیمم مقدار پارامترهای تغییر مکان، سرعت و شتاب در ریل در طول مدت زمان ارتعاش برای سرعت های متفاوت حرکتی بار، مورد ارزیابی قرار گرفته است.



الف - بیشینه مقدار تغییر مکان ارتعاشی



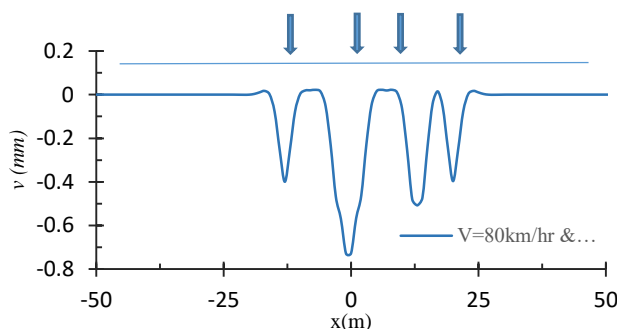
ب - بیشینه مقدار سرعت ارتعاشی



ج- بیشینه مقدار شتاب ارتعاشی

شکل ۹: تغییرات ماکزیمم پاسخ های ارتعاشی ریل در برابر تغییرات سرعت حرکت بار

شکل ۱۰، اثر همزمان چهار بار متمرکز، هر کدام به مقدار  $P = 2.011 \times 10^4 N$  را بر روی تیر مدل ریل نشان می‌دهد که بیانگر اثر محورهای دو بوژی یعنی یک واگن می‌باشند. بارها نیز بر اساس فاصله محورهای موجود در سیستم بوژی قطارهای ایرانی در نظر گرفته شده است. آنچه که در شکل مشهود است، مقایسه محل اثر بارها در قیاس با محل پیک تغییر مکان‌ها است که به دلیل تداخل امواج ایجاد شده ناشی از چند بار نه تنها مقادیر بیشینه تغییر مکان در زیر هیچکدام از بارها رخ نمی‌دهد بلکه در محل وسط بارها نیز که محل برآیند آنها محسوب می‌شود، نیز اتفاق نمی‌افتد. همچنین با وجود اینکه مدل و شرایط بارگذار نسبت به مرکز تیر متقارن در نظر گرفته شده است؛ هیچگونه تقارنی، به دلیل برداری بودن سرعت حرکت بار و حرکت آن به سمت راست و ملاحظه این امر در فرمولبندی و مدلسازی، در شکل تغییر مکانهای ایجاد شده و مقدار آنها نمی‌توان یافت. قابل ذکر است که جهت مقایسه با حالت تک بار متمرکز محل اثر ماکزیمم مطلق تغییر مکان در وسط دهانه فرض شده است و بر اساس آن و موقعیت بارها، محل بارها اصطلاح گردیده است.

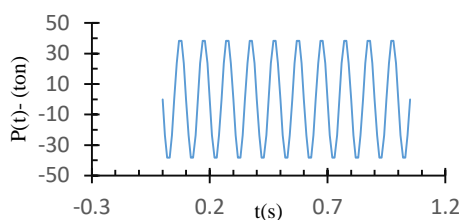


شکل ۱۰: پاسخ تغییر مکان ریل برای مدلسازی حالت دو واگن

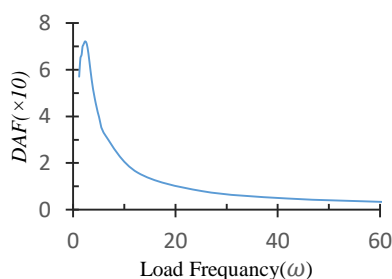
بررسی مدل تحت اثر بار متمرکز هارمونیک سینوسی مطابق معادله (۳۵) و شکل ۱۱، از موارد دیگر مورد بررسی در این تحقیق است. مقدار فرکانس بار بین مقادیر  $0.1 \text{ rad/sec}$  تا  $60 \text{ rad/sec}$  متغیر در نظر گرفته شده است. این مدلسازی برای بررسی واقعی‌تر بارهای هارمونیک اعمالی از سوی چرخهای قطار می‌باشد.

$$P = P_0 \sin(\omega t) \quad (35)$$

برای بار تناوبی رابطه ۳۵، مناسب ترین پارامتر مورد بررسی، ضریب بزرگ نمایی دینامیکی<sup>۱۵</sup> ( $DAF$ ) پیشنهاد می‌شود و همانطور که در شکل ۱۲، نشان داده شده است؛ ضریب بزرگنمایی دینامیکی برای حالت فرکانس بار  $\omega = 2.5$  دارای بیشینه مقدار می‌باشد. که می‌تواند در اثر وجود پدیده همگامی در ارتعاش تیر مدل ریل ایجاد شده باشد. همچنین برای فرکانسهای بالای  $\omega > 30$  در مقدار ضریب بزرگنمایی دینامیکی تغییرات محسوسی مشاهده نمی‌شود. این مطلب موید آنست که در فرکانسهای بالای بار، پدیده تشدید برای سازه های با طول بلند کمتر رخ می‌دهد.



شکل ۱۱- نمودار بار هارمونیک سینوسی

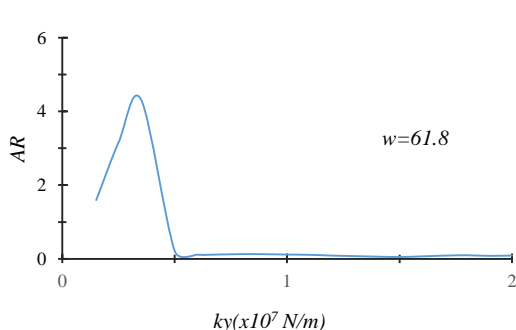


شکل ۱۲: تغییرات ضریب بزرگنمایی ریل در برابر فرکانس های مختلف بار هارمونیک

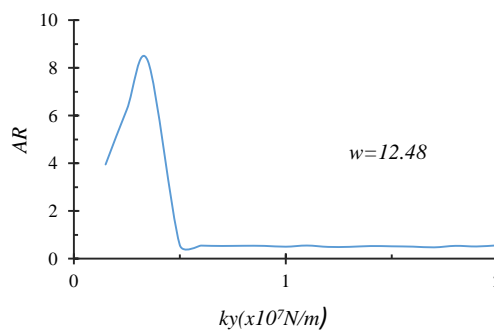
همچنین به منظور بررسی اثر سختی بستر بر ضریب بزرگنمایی (DAF) دینامیکی در سیستم سازه های ریلی تحت اثر بارگذاری دینامیکی هارمونیک، ایندکس  $AR$  مطابق رابطه (۳۶) تعریف می شود. مطابق این تعریف ضریب  $AR$  برابر است با نسبت تفاضل ضریب بزرگنمایی دینامیکی برای مقادیر متفاوت سختی بستر و مقدار ضریب بزرگنمایی دینامیکی سختی بستر پایه به سختی بستر پایه. در این رابطه  $DAF_{ky}$  ضریب بزرگنمایی معادل سختی  $\bar{k}_y$  و  $DAF_{ky=1 \times 10^7}$  ضریب بزرگنمایی معادل  $\bar{k}_y = 1.0 \times 10^7 \text{ N/m}$  است که در مطالعات گذشته [۳] و نیز در این پژوهش به عنوان مقدار پایه سختی بستر در نظر گرفته می شود.

شکل ۱۳ تغییرات ایندکس  $AR$  را نسبت به سختی بستر در سه حالت فرکانس بار هارمونیک نشان می دهد همانطور که دیده می شود. حداکثر مقدار پارامتر  $AR$ ، برای ضریب سختی بستر  $\bar{k}_y = 0.35 \times 10^7 \text{ N/m}$  رخ می دهد که می تواند بیانگر حالت همگامی باشد. برای سایر حالات سختی بستر مقدار ضریب  $AR$  نزدیک به صفر می باشد و موید عدم تاثیرگذاری قابل توجه سختی بستر بر پاسخ تشدید یافته در سختی های بستر غیر از مقدار  $\bar{k}_y = 0.35 \times 10^7 \text{ N/m}$  است و همچنین فرکانس ارتعاشی بار در قیاس با سختی بستر تاثیر کمتری بر تشدید و ضریب بزرگنمایی دینامیکی دارد.

$$AR = \left| \frac{DAF_{ky} - DAF_{ky=1}}{DAF_{ky=1}} \times 100 \right| \quad (36)$$

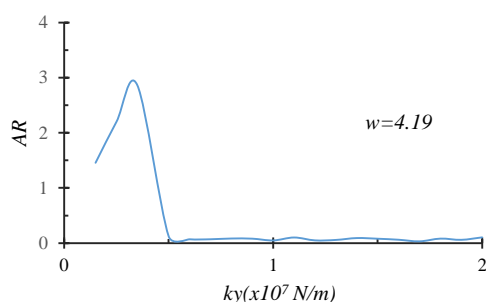


ب



الف





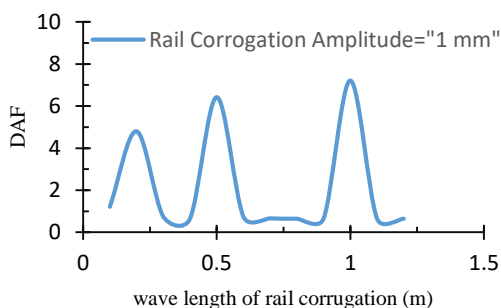
ج

شکل ۱۳: نمودار تغییرات پارامتر AR در برابر تغییرات سختی بستر برای فرکانس های مختلف بار

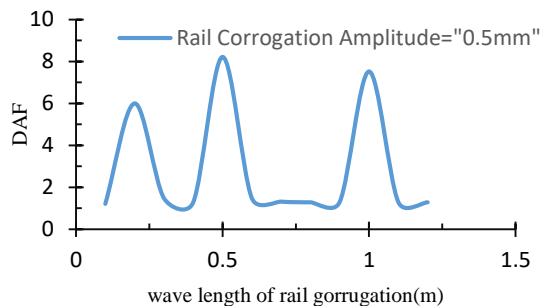
برای بررسی اثر ناهمواری های احتمالی در سطح ریل (کروگیشن)، که در اثر ساییدگی سطح ریل و به دلیل عبور مکرر قطار صورت می گیرد؛ یک حالت ساده مدلسازی این ناهمواری ها، ایجاد تغییر مکان اولیه در ریل است. که مطابق رابطه (۳۷) و به صورت یک موج سینوسی تعریف شده است.

$$y(x) = y_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x\right) \quad (37)$$

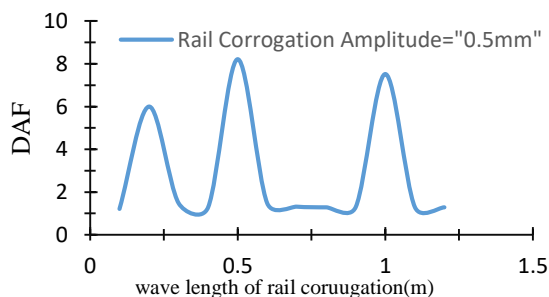
در رابطه فوق  $y_0$  دامنه موج و  $\lambda$  طول موج کروگیشن در تیر مدل ریل می باشد. در شکل ۱۴، پاسخ ارتعاشات ریل براساس تغییرات ضریب بزرگ نمایی دینامیکی نسبت به طول موج نوسانات سطح ریل (کروگیشن) مورد ارزیابی قرار گرفته است. این محاسبات برای موج به سه دامنه نوسانی مختلف و در طول موج های متفاوت ارزیابی شده است. مطابق نمودارهای شکل ۱۴، در تمامی دامنه نوسانات کروگیشن و برای یک سرعت حرکت بار سه نقطه اکسترمم در نمودار دیده می گردد که بیانگر ایجاد همگامی در ارتعاشات ریل در طول موج های مورد نظر یعنی 0.25m، 0.5m و 1m است که در این حالت طول موج ها، مضربی از عدد 0.5m می باشند.



ب



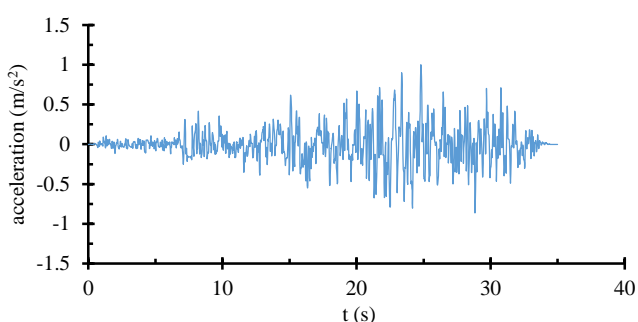
الف



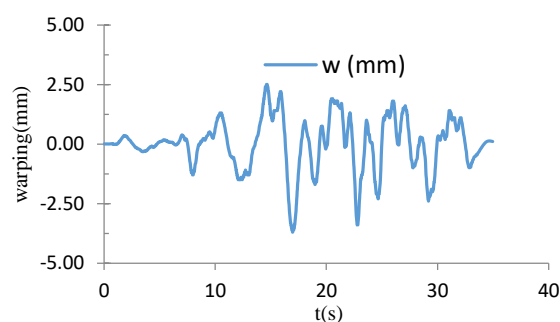
ج

شکل ۱۴: نمودار بررسی تاثیر کروگیشن ریل بر ضریب بزرگنمایی دینامیکی

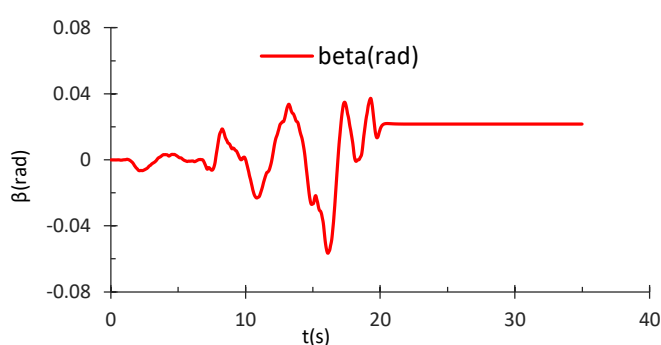
یکی از پارامترهای اساسی در تحلیل تیر مدل ماکرو المان ریل، بررسی اثرات مربوط به بارهای جانبی و پاسخ جانبی ریل و نیز پاسخ اندرکنشی درجه آزادی مستقل پیچشی و همچنین درجه آزادی وابسته اعوجاج درمدلسازی است. از مهمترین بارهای جانبی که تاثیر قابل ملاحظه ای در پاسخ جانبی ریل دارد، پاسخ به بارهای جانبی مانند بارگذاری زلزله است. در این نوشتار پاسخ نقطه میانی ریل در طول مدت زمان تداوم زلزله به عنوان نمونه‌ای از پاسخ‌های ایجاد شده در درجات آزادی جانبی، پیچشی و وارپینگ در پاسخ به یکی از شتاب‌های افقی اعمالی زلزله طیس مورد بررسی قرار گرفته تا قابلیت، گستردگی و کارایی مدل در محاسبات اندرکنشی و بخصوص در قابلیت محاسبه وارپینگ به عنوان یک درجه آزادی وابسته بهتر نشان داده شود. شکل ۱۵، به بررسی پاسخ تیر ماکرو المان مدل ریل تحت شتاب نگاشت طیس می‌پردازد. مطابق شکل ۱۵-الف، تغییر مکان جانبی نقطه میانی ریل در حدود ثانیه ۱۷ بیشترین مقدار خود را خواهد داشت که حدود ۲٫۵ میلی‌متر بوده و همانطور که مشخص است از نظر زمانی با زمان اوج شتاب زلزله فاصله دارد و حاکی از اثر دو پارامتر تداخل امواج و اثرات سختی درگیر ناشی از درجات آزادی پیچشی است. همچنین در انتهای مدت تداوم زلزله تغییر مکان جانبی ریل مطابق نمودار شکل ۱۵-الف، صفر می‌گردد در حالیکه مطابق اشکال ۱۵-ب و ج همچنان زاویه پیچش ماندگار و تغییر شکل محوری ماندگار، ناشی از اعوجاج مقطع، در سیستم مشهود است. میزان تغییر شکل پیچشی و وارپینگ مطابق اشکال ۱۵-ب و ج، به ترتیب حدود ۰٫۰۴ رادیان و ۰٫۰۳ سانتیمتر که نسبت به میزان متناظر ماکزیمم در طول ارتعاش ریل تقریباً حدود ۴۰ تا ۵۰ درصد می‌باشد. و هرچند این مقدار ناچیز است، اما در کاهش کاربری ریل می‌تواند تاثیرگذار باشد.



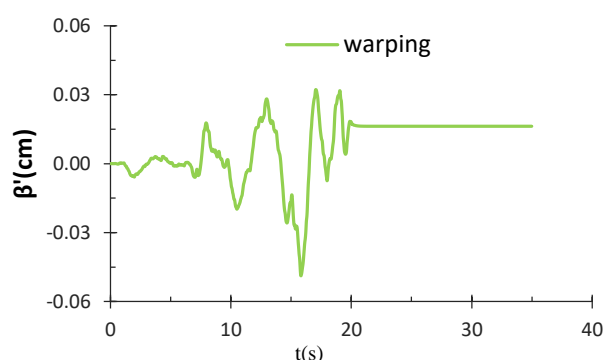
ب- شتاب‌نگاشت افقی زلزله طیس



الف- پاسخ تغییر مکان جانبی نقطه میانی ریل



د- پاسخ زاویه پیچشی نقطه میانی ریل



ج- پاسخ وارپینگ نقطه میانی ریل

شکل ۱۵: پاسخ تغییر مکان جانبی، پیچشی و وارپینگ نقطه میانی ریل نسبت به زمان تحت اثر شتاب‌نگاشت افقی زلزله طیس با توجه به قابلیت بالای مدل ماکرو المان متحرک در مدلسازی ریل امکان توسعه این پژوهش برای زمینه‌های مختلفی از جمله بررسی اثرات تغییر شکل‌های بزرگ و کنترل پایداری ریل در اثر بار محوری فشاری در ضمن تحلیل‌های خطی و غیر خطی میسر است همچنین

بررسی دقیق اثرات اندرکنشی قطار و ریل ضمن مدلسازی مدل کامل قطار و در اثر ناهمواری ریل (کروگیشن) از قابلیت های دیگر این مدل است. مدلسازی ریل ها در قوس از دیگر پژوهشهای مهم و کارا بوده که امکان بررسی آن با اصلاح فرمولاسیون و استفاده از ماتریس های تبدیل در محاسبات اجزا محدود امکانپذیر است. همچنین با تعریف سطح تسلیم مناسب، اندرکنش ریل و خاک زیر آن، ضمن یک تحلیل غیرخطی مقدور می باشد.

#### ۴- نتیجه گیری

۱. هدف اصلی پژوهش پیش رو معرفی و گسترش یک مدل ماکرو المان جهت آنالیز سازه های تحت اثر بار متحرک و با تکیه بر سازه های ریلی است. در این راستا با کمک المان متحرک پاسخ سازه ریلی مورد مطالعه قرار گرفت و فرمولسازی بر اساس می نیمم انرژی پتانسیل و روش گالرکین تهیه گردید و ماتریس های سختی، جرم و میرایی برای ماکرو المان متحرک بر این اساس شکل گرفت.
۲. برخی از ماتریس ها به دلیل وجود سرعت حرکت بار متمرکز (قطار) به صورت نامتقارن درآمد. از روش عددی بتا-نیومارک در حالت شتاب متوسط برای آنالیز نتایج استفاده گردید. پارامترهای مورد بررسی در این راستا آنالیز طول مدل مطالعاتی و همچنین اثر سرعت حرکت قطار و نیز پاسخ موردی به نیروی زلزله جهت بررسی قابلیت مدل می باشد. همچنین در این مطالعه سرعت های مختلف قطار برای در نظر گرفتن اثر حرکت سیستم های مختلف سرعتی قطارها بر اساس شرایط حاکم بر سیستم ریلی ایران در نظر گرفته شده است.
۳. دستاورد بسیار مهم این پژوهش، ارتباط مستقیم طول و همچنین وضعیت شرایط مرزی مدل محاسباتی به شتاب ارتعاشی مدل تیر است. زیرا در نقاط انتهایی که تغییر مکان صفر است؛ همچنان شتاب ارتعاشی در ریل باقی می ماند. بنابراین طول مدل محاسباتی براساس وضعیت شتاب نقطه انتهایی مدل باید تعیین گردد و نه براساس تغییر مکان این نقطه.
۴. پاسخ های ارتعاشی ریل از جمله تغییر مکان، سرعت و شتاب ارتعاشی وابسته به شرایط محیطی حاکم بر مدل، مانند شرایط بستر مشخصات مصالح مصرفی و مشخصات مقطع ریل است.
۵. از یافته های دیگر پژوهش حاضر، اندرکنش درجه آزادی انتقالی جانبی و درجه آزادی پیچشی و به تبع آن وارپینگ می باشد. که در مطالعه لرزه ای ریل بسیار حائز اهمیت است و حکایت از ایجاد تغییر شکل های ماندگار پیچشی و طولی ناشی از اعوجاج در مدل دارد.
۶. به دلیل امکان بررسی همزمان تمامی درجات آزادی در مدل ماکرو المان ضمن کاهش زمان، انجام محاسبات با دقت بالا مقدور است.
۷. مهمترین پارامترهای تاثیرگذار در ارتعاش مدل حاضر شرایط سختی خارجی (سختی بستر برای ارتعاش جهت قائم و سختی تراورس ها جهت ارتعاشات جانبی و پیچشی ریل) است. همچنین مقدار و شرایط بار وارده و در نهایت سرعت بار متحرک (با تاثیر کمتر) در پاسخ های ارتعاش ریل اثرگذار می باشد.
۸. یکی از پارامترهای قابل بررسی در این مدل بررسی اثر بارهای هارمونیک و تغییر مکان های اولیه در مدل تیر پیوسته بر بستر الاستیک بوده که در آنالیز کروگیشن ریل تاثیر گذار است. تاثیر پارامترهای دامنه و طول موج ناهمواری های سطح تیر مدل ریل از پارامترهای تاثیرگذار است که تحت اثر فاکتور بزرگنمایی دینامیکی تعریف شده است.

#### مراجع مورد استفاده

- [1] Trochanis, A. Chelliah R. Bielak J. (1987). *Unified approach for beams on elastic foundations under moving loads*. Journal of Geotechnical engineering. 13(8) 879-895.
- [2] Timoshenko, S. and Young, DH. and Weaver, Jr.W. (1955). *Vibration Problems in Engineering* (4<sup>th</sup> ed). New York: John Wiley.
- [3] Koh, C. Ong, J.S.Y. Chua, D.K.H. Feng, J. (2003) *Moving element method for train-track dynamics*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 56(11)1549-1567.
- [4] Tran, T.M. Ang, K.K. Loung, V.H. (2014) *Vertical dynamic response of non-uniform motion of high-speed rails*. Journal of Sound and Vibration. (333)5427-5442.
- [5] Nguyen, V. Duhamel, D. (2006). "Finite Element Procedures for Nonlinear Structures in Moving Coordinates. Part I: Infinite Bar under Moving Axial Loads", Journal of Computers and Structures, (84)1368-1380
- [6] Nguyen, V. Duhamel, D. (2006). *Finite element procedures for nonlinear structures in moving coordinates. Part II: Infinite beam under moving harmonic loads*. Journal of Computers and Structures. (84)2056-2063.

- [7] Biot, M.A. (1937) *Bending of an Infinite Beam on an Elastic Foundation*. Reprinted from Journal of Applied Mechanics. No 203
- [8] Mathews, P.M. (1958). *Vibration of a beam on elastic foundation*. ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 38(3-4)105-115.
- [9] Florence, A. (1965). *Traveling Force on Timoshenko beam*, Journal of Applied Mechanics, 32(2)351-358.
- [10] Ferreira, P.A. Lopez, P. (2015). *Numerical modelling of high-speed train/track system for the reduction of vibration levels and maintenance needs of railway tracks*. Contents lists available at ScienceDirect Construction and Building Materials. 79 14-21.
- [11] Metrikine, A.V. Dieterman, H.A. (1997). *Instability of vibrations of a mass moving uniformly along an axially compressed beam on a viscoelastic foundation*. Journal of Sound and Vibration. 201(5)567-576.
- [12] Arbabi, F. Looi, E. (1987). *Stability and dynamic response of railroad tracks under stochastic loads*, Vol. II, Dynamic response. M.S. Thesis, Department of Civil Engineering Michigan Technological University.
- [13] Arbabi, F. Li, F. (1987) *Stability and dynamic response of railroad tracks under stochastic loads*, Vol. I, nonlinear formulation and stability. M.s. Thesis, Department of Civil Engineering Michigan Technological University.
- [14] Arbabi, F. Loh, C.U. (1991) *Reliability analysis of railroad tracks*. ASCE Journal of the Structural Division.
- [15] Khalighi, M. Arbabi, F. (2010) *Stability of Railroad Tracks under the Effects of Temperature Change and Earthquake*. JSEE' International Journal of Earthquake Engineering. Vol. 12, No. 3
- [16] Arbabi, F. (1977) *Variational Formulation of Rail Overturning, Part 4, Structural dynamics, systems identification*. computer amplifications. Shock and Vibration Bulletin. 47<sup>th</sup>:149-154
- [17] Arbabi, F. Ghazaly, E.L. Sherbourne, H.A. (1991) *Strength and deflection of railway tracks -I: probabilistic finite element analysis*. Journal of Computers and Structures. (39):9-21.
- [18] Zhang, S. Cheng, G. Sheng, X. Thompson, DJ. (2020) *Dynamic wheel-rail interaction at high speed based on time-domain moving Green's functions*. J Sound Vib (488):115632.
- [19] Faragau, AB. Keijdener, C. de Oliveira Barbosa, JM. Metrikine, A.V. van Dalenm, KN.(2021) *Transition radiation in a nonlinear and infinite one-dimensional structure: a comparison of solution methods*. Nonlinear Dyn.
- [20] Shan, Y. Zhou, S., Wang, B. Ho, CL. *Differential Settlement Prediction of Ballasted Tracks in Bridge-Embankment Transition Zones*. J Geotech Geoenvironmental. (146):04020075
- [21] Connolly, DP. Galvín, P. Olivier, B. Romero, A. Kouroussis, G. A.(2019) *2.5D time-frequency domain model for railway induced soil-building vibration due to railway defects*. Soil Dyn Earthq Eng(120):332-44
- [22] Lopez-Mendoza, D. Connolly, DP. Romero, A. Kouroussis, G. Galvín, P. (2020) *A transfer function method to predict building vibration and its application to railway defects*. Constr Build Mater (232):1-16.
- [23] Auersch, L. (2021) *Train-induced ground vibration due to the irregularities of the soil*. Soil Dyn Earthq Eng (140):106438.
- [24] Younesian, D. Hosseinkhani, A. Askari, H. Esmailzadeh, E. (2019) *Elastic and viscoelastic foundations: a review on linear and nonlinear vibration modeling and applications*. Nonlinear Dyn (97):853-95.
- [25] McGuire, W. Gallagher, R. Ziemian, R. (2000). *Matrix structural Analysis*. John Wiley & Sons. Inc. New York.
- [26] Chopra, A.K. (1995). *Dynamics of Structures Theory and Applications to Earthquake Engineering*, (4th ed) San Francisco.
- [27] Banimahd, A. Arbabi, F. (2013) *Seismic Vulnerability Assessment and Development of Analytical Fragility Curves for Railroads*, Journal of Seismology and Earthquake Engineering. (14):251-262.