

Developing and Investigation the Numerical Efficiency of Modified Energy Method in Solid Mechanics With Geometric Nonlinearity and Bifurcation Points

A. Razaghi¹, J. Asgari Marnani^{2*}, M.S. Rohanimanesh²

1- Ph.D. student, Department of Civil Engineering, Central Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran

2- Assistant professor, Department of Civil Engineering, Central Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran

ABSTRACT

Geometric nonlinear analyses are used in many structural problems, such as the determination of failure load, as well as the study of buckling mechanism. Nevertheless, due to the complex nature of this type of problems and the absence of a comprehensive analytical solution for them, numerical methods are utilized in practice to approximate the exact response of these systems. In the application of numerical methods, there are also some difficulties such as divergence or finding the correct path of equilibrium, especially in the case of bifurcation points. Hence, the main purpose of this research is to apply the modified energy method (introduced in the dynamics of structures) in quasi-static problems with geometric nonlinearity and bifurcation points so that the efficiency of this method can be compared to others, such as Newtonian numerical techniques and force-displacement-constraint approaches. To achieve the objectives of this research, after briefly reviewing the current force-based computational methods in practice, the energy method is described for such problems, and then the step-by-step process of its computer implementation will be presented. Afterward, by coding in MATLAB software and applying the method to numerical examples employed by other researchers such as truss and frame structures, the numerical results are verified by analytical solution as well as those obtained by other methods, such as Newton-Raphson and Arc Length techniques. Generally, the interpretation of the results obtained from performed simulations has shown that the presented numerical method in analyzing nonlinear geometric problems has better accuracy compared to the Arc Length method; moreover, it can well pass through bifurcation points in the force-displacement curve without divergence in comparison with the Newton-Raphson method.

ARTICLE INFO

Receive Date: 22 December 2018

Revise Date: 21 October 2019

Accept Date: 03 November 2019

Keywords:

Numerical study;
Modified energy method;
Solid mechanics;
Geometric nonlinearity;
Bifurcation points.

All rights reserved to Iranian Society of Structural Engineering.

doi: 10.22065/JSCE.2019.163823.1746

*Corresponding author: Jafar Asgari Marnani.
Email address: Jaf.Asgari_Marnani@iauctb.ac.ir

ارزیابی عددی روش انرژی اصلاح شده در تحلیل مسائل سازه‌ای با هندسه غیر خطی

احمد رزاقی^۱، جعفر عسگری مارنانی^{۲*}، محمد صادق روحانی منش^۲

۱- دانشجوی دکتری سازه، گروه عمران، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

۲- استادیار، گروه عمران، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

چکیده

در بسیاری از مسائل سازه‌ای مانند تعیین بار خرابی و همچنین تحلیل مکانیزم کمانش باید از تحلیلی‌های غیرخطی هندسی بهره گرفت. با این وجود، به علت ماهیت پیچیده این نوع از مسائل و عدم وجود یک راه حل تحلیلی جامع برای آن‌ها در عمل از روش‌های عددی برای تقریب پاسخ دقیق مسئله استفاده می‌گردد. از مشکلات روش‌های عددی نیز عدم همگرایی و یا یافتن مسیر صحیح تعادل خصوصاً در مواجهه با نقاط انشعابی است. از این رو هدف از این تحقیق، به کارگیری روش انرژی اصلاح شده (که در دینامیک سازه‌ها معرفی شده است) در مسائل شبه-استاتیک با هندسه غیرخطی و دارای نقاط انشعابی است تا بتوان کارایی این روش را در مقایسه با سایر روش‌های موجود نظیر تکنیک‌های عددی نیوتنی و همچنین نیرو-تغییر مکان-قید مورد بررسی قرار داد. برای رسیدن به اهداف این تحقیق، پس از مرور کوتاه بر روی روش‌های تحلیلی نیرو-مینا موجود در عمل، روش انرژی برای این نوع از مسائل تشریح شده و در ادامه مراحل اجرای کامپیوتری آن در غالب یک روند گام به گام تشریح می‌گردد. سپس با کدنویسی در نرم‌افزار متلب و به کارگیری روش مذکور بر روی مثال‌های عددی به کار گرفته شده توسط دیگر محققین نظیر سازه‌های خرابی و قابی، پاسخ‌های به دست آمده با حل تحلیلی و همچنین نتایج دیگر روش‌ها مانند نیوتن-رافسون و طول قوس مورد صحت سنجی واقع شده‌اند. در مجموع، تفسیر نتایج به دست آمده از شبیه‌سازی‌های عملی صورت گرفته بیانگر این موضوع بوده‌اند که روش عددی معرفی شده در تحلیل مسائل با غیرخطی هندسی دارای دقت بهتری در مقایسه با روش طول قوس بوده و همچنین نسبت روش نیوتن-رافسون نیز به خوبی می‌تواند از نقاط انشعابی در منحنی بار-تغییر مکان بدون واگرایی عبور کند.

کلمات کلیدی: بررسی عددی، روش انرژی اصلاح شده، مکانیک جامدات، هندسه غیر خطی، نقاط انشعابی

شناسه دیجیتال:		سابقه مقاله:				
10.22065/JSCE.2019.163823.1746	doi:	چاپ	انتشار آنلاین	پذیرش	بازنگری	دریافت
https://dx.doi.org/10.22065/jsce.2019.163823.1746		۱۴۰۰/۰۵/۳۰	۱۳۹۸/۰۸/۱۲	۱۳۹۸/۰۸/۱۲	۱۳۹۸/۰۷/۲۹	۱۳۹۷/۱۰/۰۱
جعفر عسگری مارنانی j_asgari@iauctb.ac.ir				*نویسنده مسئول: پست الکترونیکی:		

۱- مقدمه

بسیاری از پدیده‌های فیزیکی در طبیعت دارای رفتار غیرخطی هستند و سیستم‌های خطی در واقع یک تقریب از مدل غیرخطی واقعی تحت شرایط محدودی هستند. فرض‌هایی که در خطی سازی مسائل مکانیک جامدات به کار می‌روند عمدتاً شامل فرض جابه‌جایی‌های کوچک و یا کرنش‌های کوچک می‌باشند. این فرضیات تنها برای برخی از کاربردهایی عملی مناسب هستند و منجر به تخمین نتایج قابل قبول می‌شوند. به عبارت دیگر، اگر سیستم مورد نظر را با استفاده از یک مدل غیرخطی تحلیل کنیم، پاسخ‌ها تفاوت محسوسی نخواهد داشت. با وجود اینکه سیستم‌های خطی حل ساده‌تری دارند، در شرایطی که تغییر شکل‌ها بزرگ در سازه به وجود می‌آیند دیگر نمی‌توان از تقریب سازی خطی بهره برد و باید مسئله غیرخطی واقعی تحلیل گردد. به طور مثال، زمانی که جابه‌جایی‌های سازه بزرگ باشند (مانند هنگامی که سازه در برابر زلزله قرار می‌گیرد و وارد ناحیه غیرخطی می‌گردد) دیگر فرض ثابت بودن سختی سازه در طول تحلیل برقرار نبوده و رابطه نیرو-تغییر شکل سازه خطی نبوده و مجبور هستیم تا برای یافتن پاسخ دقیق سیستم یک تحلیل غیرخطی انجام دهیم [۱]. به طور کلی، با توجه به اینکه حل ریاضی دقیق در بسیاری از مسائل غیرخطی وجود ندارد، برای تعیین پاسخ این نوع از سیستم‌ها در عمل باید از روش‌های عددی بهره گرفته شود.

مسائل غیرخطی سازه‌ای فراوانی تاکنون توسط پژوهشگران مختلف با استفاده از روش‌های مختلفی بررسی شده‌اند. از نظر تاریخی، مطالعه‌ای را که تونر^۱ [۲] در ارتباط با تحلیل اجزا محدود غیرخطی در رشته مهندسی هوا فضا انجام داد را می‌توان جزو اولین کارهای موجود در این زمینه دانست. به طور کلی، اکثر کارهای اولیه صورت گرفته در تحلیل‌های غیرخطی سازه‌ای، مربوط به تحلیل غیرخطی هندسی در مسئله کمانش بوده است [۳-۶]. به طور مثال در برخی مطالعات اولیه، استفاده از روش افزایشی، با به کارگیری ماتریس سختی هندسی در رابطه با به روزرسانی مختصات این نوع سیستم‌ها به کار گرفته شده است [۲، ۷، ۸]. همچنین، اثرات غیرخطی مادی نیز در ابتدا توسط مراجع [۹، ۱۰] مورد مطالعه واقع شده است و مفهوم ماتریس سختی مماسی نیز برای اولین بار در مراجع [۱۰-۱۲] بیان شده است. باید توجه داشت که تمامی روش‌های معرفی شده تا آن زمان، عمدتاً بر مبنای روش اولیو-پیشرو^۲ بوده‌اند، که منجر به ایجاد خطاهای زیاد در محاسبات می‌گردد. برای حل این مشکل، روش نیوتن-رافسون^۳ بعدها پیشنهاد شد. برای افزایش کارایی این تکنیک نیز در ادامه روش نیوتن رافسون اصلاح شده^۴ به وجود آمد که در آن برخلاف روش نیوتن-رافسون معمولی، ماتریس سختی به صورت پیوسته، به روزرسانی نمی‌گردد [۹، ۱۳]. در ادامه، روش جستجو انرژی مستقیم^۵ نیز در همین رابطه پیشنهاد گردیده است [۱۴، ۱۵]. و بالاخره، برای افزایش دقت، تکنیک زیرافزاینده^۶ نیز توسط زینکویچ^۷ ارائه شده است [۱۶].

علاوه بر این، مطالعه‌ای بر روی تفسیر هندسی از روش طول-قوس^۸ توسط ماسیکوتس^۹ و فافارد^{۱۰} در سال ۱۹۹۱ نیز انجام شد. آن‌ها با فرمول بندی پیوسته و گسسته برای روش طول-قوس، دو نوع روش عددی گسترش دادند و معایب و مزایای هر یک را مقایسه کردند. در نهایت، این مطالعه منجر به اصلاح روش ارائه شده توسط کریسفلد^{۱۱}، برای همگرایی سریع‌تر جواب شد [۱۷]. کدا^{۱۲} و گرسو^{۱۳} در سال ۲۰۰۴، بر روی یک فرمول بندی ساده برای تغییر شکل‌های بزرگ در قاب‌های دوبعدی کار کردند. این روش که بر مبنای توصیف مکان جسم قرار داشت، نیازی به استفاده از مفاهیم تغییر مکانی نداشت و مکان را به عنوان مجهول اصلی مسئله در نظر می‌گرفت. کرنش‌ها نیز مستقیماً از روی یک فضای یک بعدی برای ارتباط بین شکل مرجع و فرم تغییر شکل یافته، بر مبنای محاسبه مستقیم انرژی کرنشی در کل نقاط، بیان می‌شدند. این محققین با ارائه مثال‌های عددی، ویژگی اصلی روش خود را ساده بودن آن ذکر کردند که نتایج خوبی را به دنبال

¹ Tuner

² Forward-Euler

³ Newton-Raphson

⁴ Modified Newton-Raphson

⁵ Direct energy search

⁶ Sub-increments

⁷ Zienkiewicz

⁸ Arc-length

⁹ Massicottes

¹⁰ Fafard

¹¹ Crisfield

¹² Coda

¹³ Gresio

دارد و به راحتی می‌تواند در تحلیل قاب‌های غیرخطی دویبعی به کار گرفته شود [۱۸]. رزاک^{۱۴} و همکاران، در سال ۲۰۰۶، با تأکید بر روی اثرات غیرخطی مادی در سطوح چسبنده (مانند بتن)، با در نظر گرفتن یک مدل کرنش صفحه‌ای یک روش برای تحلیل باندهای برشی با سطح چسبنده ارائه نمودند. آن‌ها روش خود را در تحلیل دویبعی و سه‌بعی، با در نظر گرفتن مواد وابسته و غیروابسته به نرخ تغییرشکل، اعمال کردند. در نهایت، نتایج به دست آمده حاکی از آن بود که روش اعمالی به خوبی می‌تواند در تحلیل غیرخطی (مصالح و هندسه) در مدل‌سازی باند برشی به کار گرفته شود [۱۹]. در سال ۲۰۱۱، یک روش ساده و مؤثر برای تحلیل غیرخطی قاب‌های دویبعی نیز توسط لورزانا^{۱۵} و همکاران پیشنهاد گردید. آن‌ها با این فرض که اثرات غیرخطی در دو سر تیر متمرکز شده‌اند و با در نظر گرفتن یک مدل الاستوپلاستیک برای خرابی و تعریف تابع جاری شدن برحسب (نیروی محوری، برشی و لنگر خمشی) به تحلیل غیرخطی قاب‌های صفحه‌ای پرداختند. به طور کلی، هدف اصلی این مقاله پیدا کردن بار نهایی در قاب‌های دویبعی با در نظر گرفتن (مدل خرابی متمرکز در دو سر تیر) بوده است [۲۰]. در سال ۲۰۱۲، منصوری و سفری، یک الگوریتم شبیه به روش نیوتن برای در نظر گرفتن غیرخطی‌های هندسی معرفی کردند. این تکنیک تکرار-شونده نیاز به حدس اولیه دارد که به عنوان یک روش تکراری دونقطه‌ای تکراری شناخته می‌شود. در این روش یک تابع ریاضی برای تقریب ماتریس مماسی انتخاب می‌شود. به عبارت دیگر، این پژوهش یک تابع مؤثر برای کاهش زمان محاسباتی و تعداد تکرارها به وسیله ترکیب روش نیوتن-رافسون و روش دو-نقطه ای ارائه می‌دهد. محاسبات آنالیز غیرخطی بر روی قاب‌های صفحه‌ای نشان می‌دهند که روش پیشنهادی می‌تواند، با کاهش تعداد سعی و خطا، زمان محاسبات را تا حدود ۴۰ درصد در مقایسه با روش نیوتن رافسون کاهش دهد [۲۱].

در سال‌های اخیر نیز کارهای تحقیقاتی بسیار خوبی در ارتباط با موضوع تحقیق حاضر انجام شده‌اند. به طور مثال، ماموری^{۱۶} و همکاران در سال ۲۰۱۵، به مطالعه ناپایداری غیرخطی هندسی در قاب‌های دویبعی پرداختند. در این تحقیق، مصالح الاستیک فرض شده و با استفاده از فرمول‌بندی کلی لاگرانژی، جواب مسائل غیرخطی ناپایدار کننده با جابه‌جایی‌های بزرگ قبل از کمناش مورد مطالعه قرار گرفت. روش مورد استفاده در این تحقیق بر مبنای روش ریلکسیشن دینامیکی^{۱۷} بود که نسبت به روش‌های استاتیکی معمول مزیت پیدا کردن نقطه تعادل بعد از نقطه حدی را دارد [۲۲]. همچنین رادنیک^{۱۸} و همکاران، به مقایسه مدل‌های عددی برای تحلیل غیرخطی استاتیکی قاب‌های بتنی بر مبنای المان‌های یک‌بعی و دویبعی، در سال ۲۰۱۶ پرداختند. آن‌ها با دو بار فرمول‌بندی مسئله با در نظر گرفتن المان‌های یک‌بعی و دویبعی به تحلیل غیرخطی قاب‌های صفحه‌ای پرداخته و با مقایسه نتایج تحلیلی و آزمایشگاهی رفتار غیرخطی را هم برای فولاد و هم برای بتن در نظر گرفتند [۲۳]. در سال ۲۰۱۶، مویتا^{۱۹} و همکاران نیز تحلیل غیرخطی سازه‌های ساندویچی را مورد مطالعه قرار دادند. در این پژوهش، یک مدل غیرخطی برای صفحات ساندویچی پیشنهاد گردید. در اجرای روش اجزا محدود، المان‌های لایه‌ای با یک ضخامت معین، با این فرض که جابه‌جایی‌ها در مرزها پیوستگی دارند انتخاب شده‌اند؛ ولی هر یک از لایه‌ها می‌توانستند رفتار متفاوتی داشته باشند. لایه‌های الاستیک سخت، توسط صفحات کلاسیک مدل شده و هسته نیز به وسیله تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سه ردی^{۲۰}، مدل‌سازی شده است و سپس، با استفاده از یک الگوریتم نیوتن-رافسون افزایش-تکراری مسیر تعادل به دست می‌آید. همچنین، در حالتی که منحنی بار-تغییرشکل دچار دوشاخگی می‌گردد، روش طول-قوس برای تشخیص مسیر صحیح به کار گرفته شده است. نهایتاً، آن‌ها گزارش دادند که مدل پیشنهادی بر مبنای المان تخت مثلثی به طور مؤثری می‌تواند تلاش محاسباتی را در مقایسه با تحلیل سه‌بعی اجزا محدود، کاهش دهد [۲۴]. علاوه بر این، یک فرمول‌بندی ترکیبی برای تحلیل‌های غیرخطی سازه‌های کابلی توسط مرجع [۲۵] و همکاران در سال ۲۰۱۷، پیشنهاد شده است. در این پژوهش، یک خانواده از المان‌های زنجیری بر مبنای تغییرشکل‌های محدود و یک روش اجزا محدود ترکیبی سازگار-ضعیف شده بیان گردید. بر این اساس، دو نوع المان، یکی با نیروی محوری پیوسته و دیگری با نیروی محوری گسترده معرفی شدند. کینماتیک مسئله در این مطالعه، در مختصات منحنی-الخط حاصل شده و با استفاده از اصل کار مجازی فرم ضعیف رابطه کرنش-جابه‌جایی به دست آمده است. در انتها، روش اجزا محدود با ارائه سه مثال اجرا شد و

¹⁴ Robczuk

¹⁵ Lorenzana

¹⁶ Mamouri

¹⁷ Dynamic relaxation approach

¹⁸ Radnik

¹⁹ Moita

²⁰ Reddy

نتایج دقت بالایی را (به علت تمایز این فرمول بندی با روش های قبلی که نیروی محوری را ثابت در نظر می گرفتند) نشان می دادند. فنگ^{۲۱} و همکاران در سال ۲۰۱۷، بر روی المان های فیبری یک تیر خمشی-برشی تیموشنکو بر مبنای مدل نرم شوند خرابی-پلاستیسیته کار کردند. در این مطالعه یک المان تیری با در نظر گرفتن اندرکنش برش و خمش بر مبنای جابه جایی گسترش داده شد. المان های انتخابی بر مبنای تیموشنکو قرار داشت و رفتار با روش مقطع فیبری مدل سازی شد، که در آن مقطع به فیبرهای فولادی و بتنی تقسیم بندی می شود. مقایسه تحلیل های انجام شده بر روی تیرهای ساده با نتایج آزمایشگاهی نشان می داد که المان های معرفی شده به خوبی قادرند تا اثر اندرکنش رفتار برشی تیرها را در نظر بگیرند [۲۶].

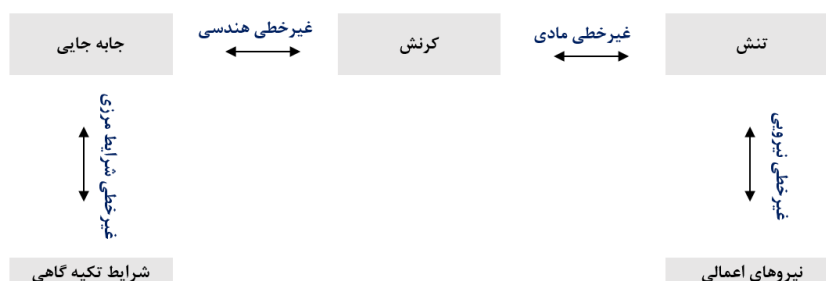
در مجموع هدف از انجام تحقیق ارائه شده، گسترش روش عددی معرفی در مرجع [۲۷] برای مسائل غیرخطی هندسی در مکانیک جامدات است. به طور کلی فلسفه تکنیک عددی ارائه شده به جای تمرکز بر روی حل معادلات تعادل نیرویی بر روی حل گام به گام معادلات تعادل انرژی یک سیستم سازه ای قرار دارد. ویژگی های عددی این روش نظیر دقت و همگرایی در مسائل غیرخطی که خصوصاً دارای نقاط انشعابی هستند، بررسی خواهند شد و کارایی روش معرفی شده با سایر روش ها مقایسه می گردد. برای این منظور تعدادی مثال عددی از مراجع مختلف انتخاب شده و نتایج عددی به دست آمده از روش ارائه شده با حل دقیق مسائل (در صورت وجود) و همچنین سایر روش های موجود صحت سنجی شده اند. در اینجا باید ذکر شود که در سرتاسر این پژوهش کلیه بارها به صورت شبه-استاتیک فرض می شوند، یعنی از آثار مربوط به میرایی و اینرسی صرف نظر می شود. همچنین در این تحقیق، از آثار غیرخطی های مربوط به تغییر جهت نیروهای اعمالی در اثر تغییر شکل سازه صرف نظر شده و شرایط مرزی مسئله به صورت مستقل از جابه جایی ها در نظر گرفته می شوند.

۲- تکنیک های حل مسائل غیرخطی شبه-استاتیک^{۲۲}

در این بخش، ابتدا مرور کوتاهی بر روی مسائل غیرخطی در مکانیک جامدات صورت گرفته و در ادامه به بررسی انواع تکنیک های رایج عملی در حل این نوع از مسائل پرداخته می شود.

۲-۱- انواع مسائل غیرخطی در مکانیک جامدات

در اکثر موارد رفتار غیرخطی جامدات شامل دو حالت غیرخطی مادی^{۲۳} و غیرخطی هندسی^{۲۴} می شود. در رفتار غیرخطی مادی تنش ها به صورت خطی با کرنش ها متناسب نیستند. غیرخطی هندسی نیز به حالتی اطلاق می شود که در آن تغییر شکل یک سیستم سازه ای به حالتی برسد که در آن فرم تغییر شکل یافته با شکل اولیه سیستم به طور اساسی فرق کند؛ در این حالت نوشتن رابطه تعادل بر مبنای هندسه اولیه سازه، دیگر امکان پذیر نیست. در حالت کلی با توجه به شکل (۱)، چهار نوع رفتار غیرخطی را می توان در یک سیستم سازه ای در نظر گرفت. اگر در هنگام نوشتن روابط کینماتیک بین جابه جایی های سیستم و کرنش های نظیر، جملات غیرخطی وارد معادله تعادل سیستم گردند، غیرخطی را از نوع هندسی می گویند. در حالتی که رابطه بین تنش و کرنش نیز خطی نباشد آن را غیرخطی مادی می نامند. دو نوع غیرخطی مربوط به شرایط مرزی و همچنین نیروهای اعمالی نیز در حالت کلی مطابق شکل (۱) قابل تعریف هستند که کمتر در عمل مورد توجه قرار دارند.



شکل ۱: انواع غیرخطی های موجود در مکانیک جامدات [۲۸]

²¹ Feng

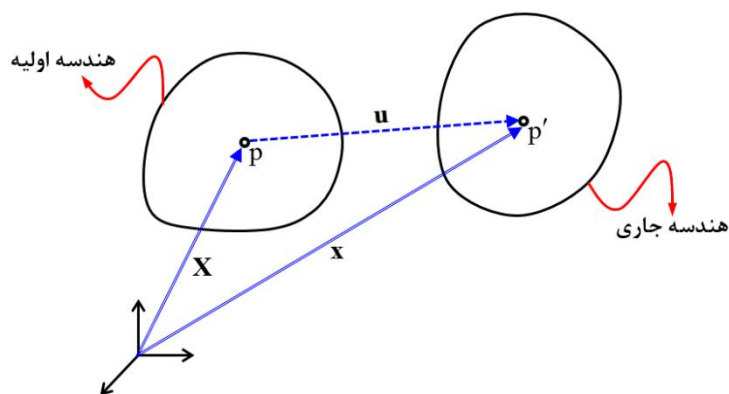
²² Quasi-static

²³ Material nonlinearity

²⁴ Geometric nonlinearity

در مسائل غیرخطی هندسی، کرنش‌ها نباید به‌عنوان یک تابع خطی از جابجایی‌ها محاسبه شوند، زیرا در غیر این صورت این موضوع می‌تواند منجر به محاسبه کرنش‌های بزرگ برای حالت دوران-جسم-صلب^{۲۵} یا اندازه‌گیری کرنش‌های غیر یکتا^{۲۶} گردد. اگرچه باید دقت داشت که وجود جابه‌جایی‌های بزرگ لزوماً همراه با کرنش‌های بزرگ در سازه نیست، به‌طور مثال در این رابطه می‌توان به تحلیل سازه‌های جدار نازک منعطف اشاره نمود. در حالت کلی، در تحلیل مسائل سازه‌ای با هندسه غیرخطی دو نوع توصیف لاگرانژی کلی^{۲۷} و لاگرانژی به‌روز شده^{۲۸} به کار می‌روند. دیدگاه لاگرانژی کلی در مسائلی که جابه‌جایی‌ها بزرگ ولی کرنش‌ها کوچک هستند مناسب بوده و حالت لاگرانژی به‌روز شده نیز در مواردی استفاده می‌شوند که کرنش‌های بزرگ (پلاستیک) در سیستم حضور دارند [۲۹].

در مواردی که با هندسه غیرخطی در سیستم مواجه هستیم، تحت اثر بارهای اعمالی اختلاف قابل‌توجهی در هندسه اولیه و هندسه تغییرشکل یافته سازه مشاهده می‌شود. این در حالی است که در تحلیل‌های خطی تمام تنش‌ها، کرنش‌ها و جابه‌جایی‌ها با در نظر گرفتن هندسه اولیه سازه محاسبه می‌شوند. بنابراین، با توجه به اینکه در واقعیت سازه در هر لحظه در حالت تغییرشکل و درعین حال در تعادل است، روابط تعادل باید بر روی هندسه تغییرشکل یافته نوشته شوند. به‌طور کلی، در حالتی که تغییرشکل‌ها بزرگ باشند (تحلیل غیرخطی هندسی)، اختلاف بین هندسه اولیه و بافتار جاری^{۲۹} یا تغییرشکل یافته زیاد است و نمی‌توان از این اختلاف صرف‌نظر کرد. بنابراین در این حالت مهم است که مشخص شود چگونه می‌توان تغییرشکل‌های بزرگ، تنش‌ها و کرنش‌ها را در یک ماده توصیف کرد. در این حالت با در نظر گرفتن یک جسم جامد مطابق شکل (۲)، جابه‌جایی‌های بزرگ سبب می‌شود تا هندسه جسم از حالت اولیه (تغییرشکل نیافته) به حالت جاری (تغییرشکل یافته) تغییر کند.



شکل ۲: جسم جامد تحت تغییرشکل‌های بزرگ [۲۹]

با توجه به شکل (۲)، بردار تغییر مکان \mathbf{u} برحسب موقعیت جاری سیستم، \mathbf{x} ، و همچنین هندسه اولیه سیستم، \mathbf{X} ، طبق رابطه (۱) قابل بیان است.

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (۱)$$

با توجه به اینکه تعریف کرنش شامل مشتق جابه‌جایی‌ها نسبت به یک محور مختصات است. هر یک از هندسه‌های تغییرشکل یافته و اولیه می‌توانند در مشتق‌گیری به کار گرفته شوند و بنابراین، دو نوع شیوه مختلف برای تعریف کرنش‌ها به وجود می‌آید. در حالت اول اگر هندسه اولیه به‌عنوان مرجع مشتق‌گیری در نظر گرفته شود، کرنش‌های لاگرانژی، \mathbf{E} ، طبق رابطه (۲) تعریف می‌شود.

²⁵ rigid body rotation

²⁶ non-unique

²⁷ Total Lagrange

²⁸ Updated Lagrange

²⁹ Current configuration

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right) \quad (2)$$

به طور جایگزین، اگر هندسه اولیه به عنوان مرجع مشتق گیری در نظر گرفته شود، کرنش های اوپلری، \mathbf{e} ، به صورت زیر بیان می شوند.

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) \quad (3)$$

۲-۲- معادلات تعادل سیستم در حالت غیر خطی

اصل کار مجازی که در فرمول بندی مسائل غیر خطی بسیار کاربرد دارد، بیان می کند که: در حالتی که سازه در حال تعادل است، کار مجازی نیروهای داخلی و خارجی برای هر تغییر شکل مجازی سازگار با سیستم با هم برابرند. در این قسمت نیز، قصد بر آن است تا نحوه به دست آوردن روابط تعادل برای یک مدل اجزا محدود غیر خطی به صورت خلاصه مرور گردد.

با فرض یک میدان جابه جایی سه بعدی $\mathbf{U} = \{u, v, w\}^T$ ، در یک مسئله اجزا محدود، جابه جایی های داخل المان (\mathbf{U}^e) مطابق رابطه (۴) بر حسب توابع شکل (\mathbf{N}) قابل تعریف هستند.

$$\mathbf{U}^e = \mathbf{N} \mathbf{d}^e \quad (4)$$

که در آن، \mathbf{d}^e بیانگر بردار جابه جایی های گره های المان است و با استفاده از تعریف ماتریس \mathbf{B} می تواند طبق رابطه ماتریسی (۵) کرنش های ایجاد شده در داخل المان، $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ ، را در اختیار قرار دهد.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{B} \mathbf{d}^e \quad (5)$$

با بهره گیری از اصل حساب تغییرات^{۳۰} و با تعریف یک میدان مجازی برای جابه جایی های المان به صورت ($\delta \mathbf{d}^e$)، رابطه (۵) را می توان به فرم ذیل نوشت:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{B} \delta \mathbf{d}^e \quad (6)$$

حال، با برابر قرار دادن کار داخلی (ناشی از تنش های $\boldsymbol{\sigma}^e$) با انتگرال گیری روی حجم المان V^e و کار خارجی ناشی از بارهای گره ای، \mathbf{F}^e ، طبق اصل کار مجازی، داریم:

$$\int_{V^e} (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^e)^T \boldsymbol{\sigma}^e dv = (\delta \mathbf{d}^e)^T \mathbf{F}^e \quad (7)$$

که با مقداری ساده سازی ماتریسی، رابطه تعادل به شکل زیر نوشته می شود.

$$\int_{V^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^e dv = \mathbf{F}^e \quad (8)$$

پس از حصول رابطه تعادل در سطح المان ها، با انجام عملیات سرهم بندی^{۳۱}، معادلات تعادل سیستم در مختصات کلی به شکل زیر درمی آیند.

³⁰ Variational principle

³¹ Assembling

$$\mathbf{F}_{int} = \mathbf{F}_{ext} \quad (9)$$

که در آن، \mathbf{F}_{int} و \mathbf{F}_{ext} به ترتیب نمایانگر نیروهای داخلی و خارجی در سیستم مورد بررسی هستند.

۲-۳- حل معادلات تعادل غیرخطی

روش‌های عددی متنوعی تاکنون برای حل معادلات تعادل یک سیستم غیرخطی سازه‌ای پیشنهاد شده‌اند. استفاده از روش تکراری نیوتن-رافسون در یک گام بار، در یک استراتژی حل افزایشی-تکراری^{۳۲}، جزو شناخته‌شده‌ترین روش‌های سنتی در این زمینه است. باین‌حال، برای افزایش کارایی تکنیک‌های حل در مسائل مختلف، الگوریتم‌های پیشرفته‌تری نظیر: روش‌های جستجوهای خطی^{۳۳}، دنبال کننده مسیر^{۳۴}، شبه نیوتنی^{۳۵}، و تعویض کننده شاخه در نقاط انشعابی^{۳۶} نیز تا به حال معرفی شده‌اند، که در ادامه تشریح می‌گردند.

همان‌طور که در بخش قبل ذکر شد، معادلات تعادل بین نیروهای داخلی و خارجی یک جسم در مکانیک جامدات که با رابطه (۹) بیان می‌شوند در زمان $t + \Delta t$ به صورت زیر قابل بازنویسی هستند:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{int} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{ext} \quad (10)$$

با توجه به اینکه در اینجا نیروی داخلی یک تابع غیرخطی از تغییر مکان‌های سیستم، \mathbf{D} ، است؛ با استفاده از مفهوم ضریب سختی مماسی ${}^t\mathbf{k}$ ، تغییرات نیروی داخلی، $\Delta\mathbf{F}_{int}$ ، از زمان t تا $t + \Delta t$ را می‌توان طبق رابطه (*) بیان نمود.

$${}^t\mathbf{F}_{int} + {}^t\mathbf{k}\Delta\mathbf{D} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{ext}, \quad {}^t\mathbf{k} = \frac{\partial {}^t\mathbf{F}_{int}}{\partial {}^t\mathbf{D}} \quad (11)$$

تجربه نشان داده است که اگر پس از محاسبه $\Delta\mathbf{D}$ ، از رابطه (۱۱) بلافاصله به گام بعدی برویم جواب‌ها دارای خطاهای بزرگ شده و احتمالاً ناپایدار می‌گردند؛ از این‌رو، در عمل لازم است که محاسبات در یک گام تا رسیدن به یک رواداری^{۳۷} مجاز ادامه یابند تا به جواب‌های دقیق برسیم. تعدادی از روش‌های رایج در این زمینه در ادامه مطالب آورده شده‌اند.

۲-۳-۱- روش نیوتن-رافسون^{۳۸}

این تکنیک به‌عنوان یک روش کلاسیک عددی در تحلیل سیستم‌های غیرخطی دارای معادلاتی به شرح زیر است:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{k}^{(i-1)}\Delta\mathbf{D}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{ext} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{int}^{(i-1)}, \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}^{(i-1)} + \Delta\mathbf{D}^{(i)} \quad (12)$$

در این روابط، بالانویس i نشانگر شماره تکرار است، همچنین، در شروع فرایند تکرار، یعنی هنگامی که $i = 1$ است، شرایط اولیه زیر باید در نظر گرفته شوند.

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{k}^{(0)} = {}^t\mathbf{k}, \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{int}^{(0)} = {}^t\mathbf{F}_{int}, \quad {}^{t+\Delta t}\mathbf{D}^{(0)} = {}^t\mathbf{D} \quad (13)$$

با تعریف یک نیروی باقیمانده یا نامتوازن^{۳۹}، \mathbf{F}_R ، در هر تکرار به کمک رابطه زیر

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_R^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{ext} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_{int}^{(i-1)} \quad (14)$$

می‌توان شرط توقف تکرارها برای حصول از همگرایی محاسبات در یک گام را برحسب کوچک شدن این بردار بار خارج از تعادل بیان نمود.

³² Incremental-iterative solution strategy

³³ Line searches

³⁴ Path-following

³⁵ Quasi-Newton

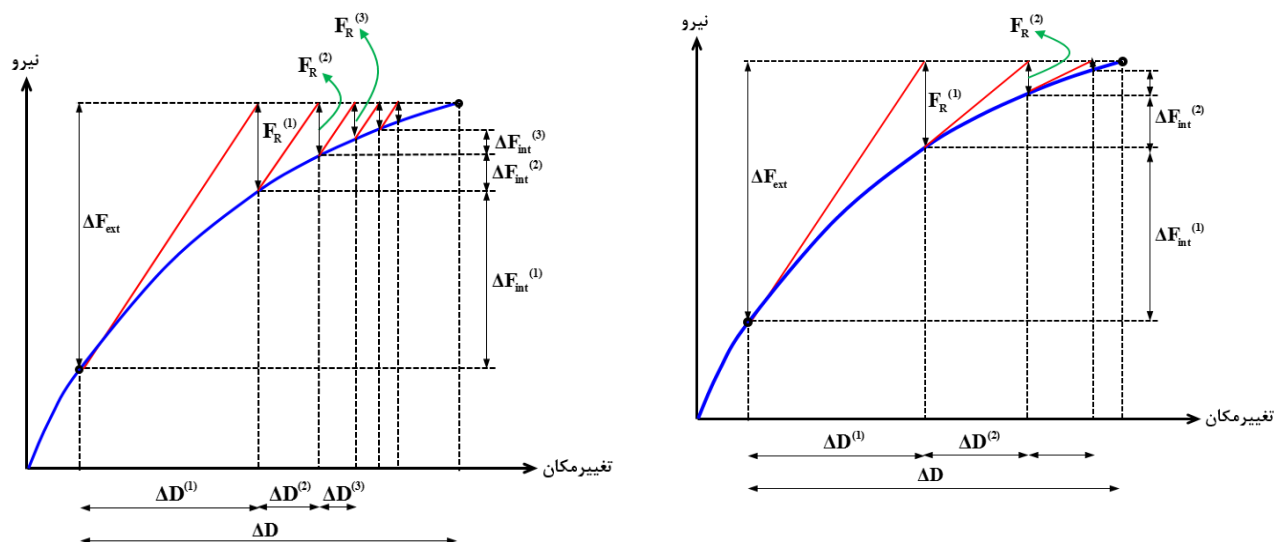
³⁶ Branch switching techniques at bifurcation points

³⁷ Tolerance

³⁸ Newton-Raphson

³⁹ Residual or Unbalanced force

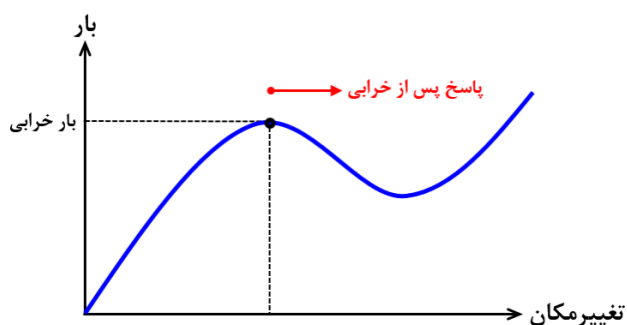
در اینجا باید توجه داشت که به روزرسانی ماتریس سختی مماسی در هر تکرار، هزینه محاسباتی بالایی را در عمل ایجاد می کند. بنابراین، روش نیوتن-رافسون اصلاح شده^{۴۰} معرفی شده است که در آن ماتریس سختی مماسی فقط در ابتدای هر پله بار ایجاد می شود و در طول فرایند تکرار در هر گام زمانی ثابت نگه داشته می شود. تصور هندسی از این دو روش در شکل (۳) نشان داده شده است. همچنین تکنیک های دیگری نیز در این زمینه معرفی شده اند که به روش های شبه-نیوتنی معروف اند؛ این دسته از روش ها در واقع حالت میانه ای از روش های نیوتن-رافسون معمولی و اصلاح شده هستند.



شکل ۳: حل معادلات تعادل به روش های نیوتن-رافسون معمولی (سمت راست) و نیوتن-رافسون اصلاح شده (سمت چپ)

۲-۳-۲- روش های نیرو-تغییر مکان-قید^{۴۱}

در بسیاری از موارد تحلیل های غیرخطی به منظور تعیین بار خرابی در یک سیستم سازه ای به کار می روند. در این حالت، مطابق شکل (۴)، در ابتدای منحنی بار-تغییر مکان که رفتار سازه خطی است می توان از نمودار بزرگ برای بار استفاده نمود؛ ولی، با نزدیک شدن به نقطه خرابی (با غیرخطی شدن رابطه نیرو-تغییر مکان) مقدار نمودار بار باید کوچک تر شوند. به خصوص در هنگام عبور از نقطه خرابی (که مقدار سختی در آنجا صفر می گردد) و از لحاظ ریاضی تکین^{۴۲} خواهد شد. علاوه بر این، برای محاسبه پاسخ پس از کمانش^{۴۳} باید از روش های خاصی بهره گرفت که قادر باشند کاهش در بار همزمان با افزایش در تغییر مکان را در نظر بگیرند.



شکل ۴: پاسخ سازه های دارای نقطه خرابی

⁴⁰ Modified Newton-Raphson

⁴¹ Load-Displacement-Constraint

⁴² Singular

⁴³ Post-buckling

ایده روش‌های بار-تغییرمکان-قید اولین بار توسط ریکس [۳۰] مطرح شده است. به‌طور کلی، فلسفه این روش‌ها شامل وارد نمودن یک ضریب بار، λ ، در معادلات تعادل است که شدت بار وارده را کاهش یا افزایش می‌دهد. در واقع سه هدف اصلی از تعریف کردن این ضریب در معادلات وجود دارد: ۱- وقوع همگرایی سریع‌تر در هر گام ۲- عبور آسان از نقطه خرابی ۳- امکان تعیین پاسخ پس از خرابی. در این دسته از روش‌ها، معادلات تعادل به شکل زیر بازنویسی می‌گردند.

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{\text{int}} = {}^{t+\Delta t} \lambda \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (15)$$

با تعریف نیروی داخلی در تکرار i ام از یک فرایند تکراری به‌صورت زیر

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{\text{int}}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{\text{int}}^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{k}^{(i-1)} \Delta \mathbf{D}^{(i)} \quad (16)$$

و همچنین بیان ضریب بار،

$${}^{t+\Delta t} \lambda^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \lambda^{(i-1)} + \Delta \lambda^{(i)} \quad (17)$$

رابطه اساسی تعادل نیرویی در این روش‌ها در فرم تکراری (۱۸) بیان می‌گردد.

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{k}^{(i-1)} \Delta \mathbf{D}^{(i)} = ({}^{t+\Delta t} \lambda^{(i-1)} + \Delta \lambda^{(i)}) \mathbf{F}_{\text{ext}} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{\text{int}}^{(i-1)} \quad (18)$$

باید توجه داشت که دو مجهول اصلی رابطه (۱۸) شامل نمو تغییرمکان، $\Delta \mathbf{D}^{(i)}$ ، و نمو ضرایب بار، $\Delta \lambda^{(i)}$ ، هستند که باید توسط یک رابطه قیدی در فرم معادله (۱۹) به هم مرتبط شوند.

$$f(\Delta \mathbf{D}^{(i)}, \Delta \lambda^{(i)}) = 0 \quad (19)$$

اکنون اگر در درون یک پله بار، تغییرات جابه‌جایی، $\delta \mathbf{D}^{(i)}$ ، و ضریب بار، $\delta \lambda^{(i)}$ ، تا تکرار i ام را به‌صورت زیر در نظر بگیریم.

$$\delta \mathbf{D}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{D}^{(i)} - {}^t \mathbf{D} \quad , \quad \delta \lambda^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \lambda^{(i)} - {}^t \lambda \quad (20)$$

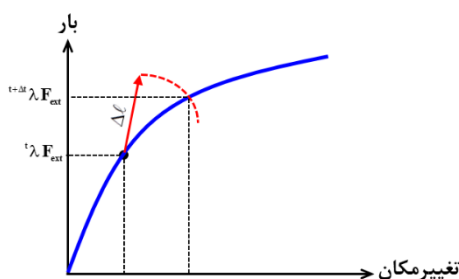
به‌طور نمونه، مطابق با شکل (۵)، با استفاده از معیار طول کمان ثابت کروی، $\Delta \ell$ ، می‌توان رابطه قیدی زیر را تعریف نمود [۳۱].

$$(\delta \lambda^{(i)})^2 + \frac{(\delta \mathbf{D}^{(i)})^T (\delta \mathbf{D}^{(i)})}{\beta} = \Delta \ell^2 \quad (21)$$

در رابطه فوق ثابتی است که به‌منظور بی‌بعد کردن عبارت به کار می‌رود. در عمل دو حد بالا و پایین برای طول قوس، به‌صورت $\Delta \ell_{\text{Min}}$ و $\Delta \ell_{\text{Max}}$ در نظر گرفته می‌شوند.

$$\Delta \ell_{\text{Min}} \leq \Delta \ell \leq \Delta \ell_{\text{Max}} \quad (22)$$

درواقع، برای حالتی که سازه رفتار خطی دارد مقادیر نزدیک به $\Delta \ell_{\text{Max}}$ انتخاب‌شده و با غیرخطی شدن پاسخ سازه نیز باید از مقادیر در مجاورت $\Delta \ell_{\text{Min}}$ بهره برد.



شکل ۵: توصیف هندسی از معیار طول کمان ثابت کروی

در برخی موارد نیز، معادلات تعادل در این گروه از روش‌ها را به صورت زیر بازنویسی می‌کنند.

$$\Delta \bar{\mathbf{D}}^{(i)} = \left({}^{t+\Delta t} \mathbf{k}^{(i-1)} \right)^{-1} \left({}^{t+\Delta t} \lambda^{(i-1)} \mathbf{F}_{\text{ext}} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{\text{int}}^{(i-1)} \right) \quad (23)$$

$$\Delta \bar{\bar{\mathbf{D}}}^{(i)} = \left({}^{t+\Delta t} \mathbf{k}^{(i-1)} \right)^{-1} \left(\mathbf{F}_{\text{ext}} \right)$$

از این دو رابطه، نمو جابه‌جایی در تکرار i ام به شکل زیر بیان می‌گردد.

$$\Delta \mathbf{D}^{(i)} = \Delta \bar{\mathbf{D}}^{(i)} + \Delta \lambda^{(i)} \Delta \bar{\bar{\mathbf{D}}}^{(i)} \quad (24)$$

در این حالت با جایگذاری این معادلات در رابطه قیدی (۲۱) می‌توان به یک عبارت درجه دوم برحسب $\Delta \lambda^{(i)}$ رسید، که برای ادامه فرایند تحلیل سیستم یک مقدار مناسب از آن باید انتخاب گردد. همچنین اگر از معیار نمو ثابت در کار خارجی نیز استفاده شود، معادله قیدی منجر به رابطه (۲۵) می‌گردد.

$$\Delta \lambda^{(i)} = - \frac{(\mathbf{F}_{\text{ext}})^T \Delta \bar{\mathbf{D}}^{(i)}}{(\mathbf{F}_{\text{ext}})^T \Delta \bar{\bar{\mathbf{D}}}^{(i)}} \quad (25)$$

در اینجا ذکر این نکته ضروری است که روش‌های ذکر شده در این قسمت غیر خودآغازگر هستند؛ بدین معنا که یک الگوریتم حل دیگر در ابتدا برای شروع فرایند حل باید به کار گرفته شود. همچنین، تکنیک‌هایی نیز در طول فرایند تحلیل برای انتخاب مناسب مقدار Δl باید به کار گرفته شوند. علاوه بر این، در مواردی که واگرایی نزدیک است، الگوریتم به کار گرفته شده باید فرایند تکرار را متوقف ساخته و سپس با پارامترهای جدید فرایند حل دوباره آغاز گردد.

۳- روش تحقیق

ایده اصلی روش به کار گرفته شده در این تحقیق بر مبنای روش انرژی اصلاح شده قرار دارد که اولین بار توسط مراجع [۳۳، ۳۲] در تحلیل تاریخچه زمانی سازه‌های دارای رفتار غیرخطی معرفی شده است. به‌طور کلی روش انرژی اصلاح شده در ابتدا در مرجع [۳۲] در ارتباط با یافتن پاسخ دینامیکی سازه‌های تک درجه آزادی مطرح شد که مسائل مورد بررسی شامل سیستم‌های خطی و همچنین غیرخطی ساده‌ای نظیر فنر با سختی درجه سه (دافینگ)، اصطکاک کولمب و همچنین حرکت آونگ با دوران‌های بزرگ (جمله غیرخطی سینوسی) بوده‌اند. روش به کار گرفته شده در آغاز، شامل گسسته سازی معادلات تعادل انرژی در زمان و سپس یافتن سرعت حقیقی سیستم با استفاده از معادلات تعادل نیرویی سیستم بوده است. پس از آن، این روش در مرجع [۳۳] بر روی سیستم‌های قاب-برشی با رفتار خطی به کار گرفته شد و در آنجا تکنیک حذف سرعت‌های ناپیوسته^{۴۴} برای اولین بار در حل معادلات کوپله حاصل از روش انرژی بر روی این سازه‌ها معرفی شد. در مقاله حاضر نیز با گسترش ایده مطرح شده (استفاده از رویکرد انرژی-مینا) در تحلیل مسائل غیرخطی هندسی در مکانیک جامدات (که به مراتب دارای جملات غیرخطی پیچیده‌تری از مسائل در نظر گرفته شده در دو مرجع قبلی هستند)؛ به‌طور ویژه، کارایی روش انرژی اصلاح شده در مقایسه سایر روش‌ها (نظیر تکنیک نیوتن-رافسون و ریکس-ومپنر) در مسائلی که دارای نقاط انشعابی در منحنی نیرو-تغییر مکان خود هستند مورد بررسی قرار می‌گیرد.

همان‌طور که می‌دانیم تحلیل واقعی مسائل سازه‌ای شامل یک تحلیل دینامیکی که در آن رفتار سازه با زمان تغییر می‌کند، ولی در بسیاری از موارد، برای رهایی از پیچیدگی‌های تحلیلی، زمانی که بارها به صورت تدریجی بر سازه وارد می‌شوند (مانند آنچه در این تحقیق فرض شده است) از یک فرایند شبه-استاتیکی^{۴۵} در تحلیل‌های غیر غیرخطی استفاده می‌شود. در تحلیل‌های شبه استاتیکی، بار به صورت گام‌های افزایشنده به سازه اعمال می‌گردد. باید توجه داشت که در این حالت، متغیر t بیانگر یک شبه-زمان^{۴۶} است که شدت بار

⁴⁴ Elimination of Discontinuous velocities

⁴⁵ Quasi-static

⁴⁶ pseudo time

اعمالی در یک گام مشخص را بیان می کند و نباید با متغیر زمانی که در تحلیل های غیرخطی دینامیکی استفاده می شوند، اشتباه گرفته شود.

به جای استفاده از رابطه (۹) که بیانگر تعادل نیرویی سیستم است، در این تحقیق از یک فرمول بندی مبتنی بر انرژی به عنوان رابطه حاکم بر یک مسئله غیرخطی سازه ای استفاده می شود. به طور کلی، انرژی های موجود در یک سیستم استاتیک در حالت کلی شامل انرژی ناشی از نیروی مقاوم سازه، F_{int} و انرژی یا کار ناشی از بارگذاری وارد بر سازه، F_{ext} هستند که در این پژوهش به ترتیب با E_{int} و E_{out} نمایش داده می شوند. بر مبنای قانون بقای انرژی و طبق رابطه (۲۶) مقدار این دو انرژی در هر لحظه باید با هم برابر باشند.

$${}^t E_{int} = {}^t E_{ext} \quad (26)$$

برای حصول یک رابطه نمودی، رابطه فوق را می توان به شکل زیر نوشت.

$$\Delta E_{int} = \Delta E_{ext} \quad ; \quad \Delta E_{int} = E_{int}(t_{j+1}) - E_{int}(t_j) \quad , \quad \Delta E_{ext} = E_{ext}(t_{j+1}) - E_{ext}(t_j) \quad (27)$$

که در آن t_j و t_{j+1} به ترتیب بیانگر دو لحظه زمانی متوالی هستند.

تغییرات انرژی ناشی از کار نیروهای داخلی، ΔE_{int} ، در حالت کلی برای یک سیستم غیرخطی به صورت انتگرالی زیر بیان می گردد.

$$\Delta E_{int} = \int_{t_j}^{t_{j+1}} F_{int}(D) dD \quad (28)$$

که با استفاده از قانون دوزنقه به صورت زیر قابل گسسته سازی است که در آن زیرنویس j شماره گام زمانی را نشان می دهد.

$$\Delta E_{int} = \frac{\Delta D}{2} [{}^{j+1} F_{int} + {}^j F_{int}] \quad (29)$$

که اگر در آن نیروی داخلی در گام جاری، ${}^{j+1} F_{int}$ ، را برحسب نیروی داخلی در گام قبلی، ${}^j F_{int}$ ، و همچنین ماتریس سختی مماسی، ${}^t k$ ، بیان گردد؛ رابطه (۲۹) به فرم زیر درمی آید.

$$\Delta E_{int} = \frac{\Delta D}{2} [2 {}^j F_{int} + {}^t k \Delta D] \quad (30)$$

از طرفی، تغییرات انرژی ناشی از کار خارجی، ΔE_{ext} ، نیز با رابطه (۳۱) تعریف می شود.

$$\Delta E_{ext} = \int_{t_j}^{t_{j+1}} F_{ext}(t) dD \quad (31)$$

رابطه (۳۱) را نیز با استفاده از تعریف سرعت، ${}^j v$ ، می توان به شکل زیر بازنویسی نمود.

$$\Delta E_{ext} = \int_{t_j}^{t_{j+1}} F_{ext}(t) v(t) dt \quad (32)$$

که فرم گسسته شده آن عبارت است از

$$\Delta E_{ext} = \frac{\Delta t}{2} [{}^{j+1} F_{ext} {}^{j+1} v + {}^j F_{ext} {}^j v] \quad (33)$$

حال با جایگذاری روابط (۳۰) و (۳۳) در داخل معادله تعادل انرژی (۲۷)، می توان به فرم زیر دست یافت.

$$\Delta D [2 {}^j F_{int} + {}^t k \Delta D] = \Delta t [{}^{j+1} F_{ext} {}^{j+1} v + {}^j F_{ext} {}^j v] \quad (34)$$

از طرفی، تغییرات جابه جایی، ΔD ، را نیز می توان به کمک رابطه اویلر به شکل زیر نوشت؛ که در آن β ضریب مشارکت سرعت در تعیین تغییر مکان های سیستم است که در واقع نوع انتگرال گیری را مشخص می کند.

$$\Delta D = \Delta t [\beta {}^{j+1} v + (1-\beta) {}^j v] \quad (35)$$

با قرار دادن رابطه (۳۵) در داخل (۳۴) و انجام مقداری ساده سازی ریاضی، می توان به رابطه درجه دوم (۳۶) بر حسب ${}^{j+1} v$ رسید.

$$A {}^{j+1} v^2 + B {}^{j+1} v + C = 0 \quad (36)$$

ضرایب این معادله نیز به صورت زیر تعریف می گردند.

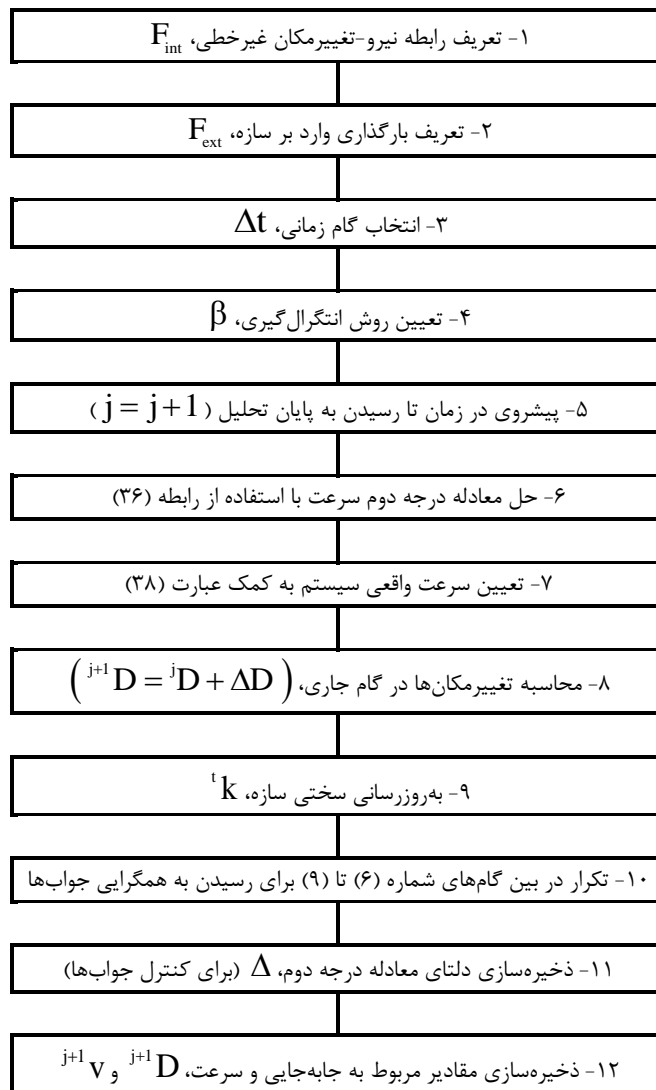
$$\begin{cases} A = {}^t k \Delta t \beta^2 \\ B = 2\beta [{}^j F_{int} + {}^t k \Delta t (1-\beta) {}^j v] - {}^{j+1} F_{ext} \\ C = {}^j v [2(1-\beta) {}^j F_{int} + {}^t k \Delta t {}^j v (1-\beta)^2 - {}^j F_{ext}] \end{cases} \quad (37)$$

با توجه به اینکه وجود سرعت های موهومی در یک سیستم سازه ای معنی فیزیکی ندارد؛ دلتا، $\Delta = B^2 - 4AC$ ، معادله درجه دوم (۳۶) باید همواره مثبت باشد. با توجه به اینکه این مقدار در حالت کلی به خواص سیستم، بارگذاری وارده و پارامترهای گسسته سازی وابسته است، می توان یک شرط اضافی در مورد پایداری جواب های عددی حاصل شده به دست آورد. باید توجه داشت که این یک مزیت این نوع فرمول بندی است که در دیگر روش های نیرو-مبنای رایج موجود نیست.

همانطور که از معادلات (۳۷) مشاهده می شود، مقدار Δ به پارامتر β وابستگی دارد. به طور مثال، به ازای $\beta = 0$ طبق سطر اول از معادلات موجود در رابطه (۳۷) ضریب A صفر شده و در نتیجه با تبدیل فرم درجه دوم رابطه (۳۶) به یک معادله درجه اول (به صورت $B {}^{j+1} v + C = 0$) امکان ایجاد سرعت های موهومی در طول تحلیل سازه از بین می رود. ولی به ازای دیگر مقادیر این پارامتر (یعنی $0 < \beta \leq 1$) باید علامت دلتا در طول تحلیل کنترل شده و در صورت منفی شدن مقدار بازه زمانی Δt را کوچک نمود. زیرا به راحتی با استفاده از رابطه (۳۷) می توان مشاهده نمود که با به سمت صفر میل کردن گام زمانی ($\Delta t \rightarrow 0$)، مقدار دلتای معادله درجه دوم همواره مثبت می گردد. علاوه بر این، سؤالی که در اینجا برای خواننده ایجاد می گردد این است که با توجه به درجه دوم بودن معادله سرعت و در اختیار قرار دادن دو سرعت در هر لحظه، سرعت واقعی سیستم را چگونه می توان از میان این دو انتخاب نمود؟ برای این منظور با توجه به مرجع [۳۳]، می توان بر مبنای پیوسته بودن تغییرات سرعت، سرعت واقعی در هر لحظه را از میان سرعتی که به سرعت در گام قبلی نزدیک تر است انتخاب نمود. در این روش برای حل معادله درجه دوم سرعت و تشخیص سرعت واقعی سیستم در هر زمان، فرض بر این است که تغییرات سرعت با زمان به صورت پیوسته است و تغییرات ناپیوسته سرعت با رفتار سیستم سازه ای از لحاظ فیزیکی سازگار نیست. بنابراین، از میان دو سرعتی که در هر لحظه از این معادلات درجه دوم به دست می آید، سرعت نزدیک تر به سرعت در گام زمانی قبلی به عنوان سرعت واقعی سازه انتخاب می گردد. به همین دلیل، نام این روش در ادبیات تحقیق با عنوان تکنیک حذف سرعت های ناپیوسته (Elimination of Discontinuous Velocities) شناخته می شود. از لحاظ ریاضی اگر سرعت های محاسبه شده در گام جاری را V_1 و V_2 بنامیم، در این حالت می توان نوشت:

$${}^{j+1}v = \begin{cases} v_1 & \text{if } |v_1 - {}^j v| < |v_2 - {}^j v| \\ v_2 & \text{if } |v_2 - {}^j v| < |v_1 - {}^j v| \\ \frac{-B}{A} & \text{if } {}^j v = 0 \end{cases} \quad (38)$$

به طور کلی برای اجرای کامپیوتری روش ارائه شده برای تحلیل یک سیستم غیرخطی گام‌های ذیل باید طی شوند:



شکل ۶: مراحل گام به گام مورد نیاز برای اجرای کامپیوتری روش انرژی اصلاح شده

۴- مثال‌های عددی

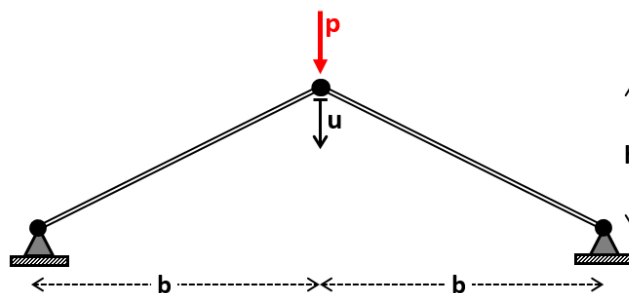
در این بخش به منظور بررسی کارایی الگوریتم ارائه شده در بخش قبل، تعدادی مثال عددی با استفاده از کدنویسی در برنامه متلب^{۴۷} مورد تحلیل واقع شده‌اند. در مثال اول، رفتار کمانشی یک سازه خرپایی تحت تغییر شکل‌های بزرگ و اثرات هندسه غیرخطی بررسی می‌گردد. در مثال بعدی نیز بار کمانشی و همچنین پاسخ پس-خرابی یک سازه قابی شکل با در نظر گرفتن رفتار خمشی و محوری در المان‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد. در مثال سوم نیز یک سازه خرپایی شبیه به مثال اول، ولی دارای هندسه نامتقارن و سطح مقطع اعضای

⁴⁷ MATLAB

نابرابر بررسی شده است. قابل ذکر است که نتایج عددی به دست آمده از روش انرژی ارائه شده در تمامی مسائل به کمک استفاده از روش‌های عددی دیگر به دست آمده توسط دیگر محققین و همچنین جواب دقیق تحلیلی (در صورت وجود) مورد صحت سنجی واقع شده‌اند.

۱-۴- خرابای دوبعدی با هندسه غیرخطی

سیستم مورد بررسی در این مثال که شامل یک خرپای دو عضوی تحت تغییر شکل‌های بزرگ است در شکل (۷) نشان داده شده است. این سازه در مرجع [۳۴] برای مطالعه رفتار کمانشی آن مورد بررسی قرار گرفته است و همچنین توسط مرجع [۳۵] منحنی بار-تغییر شکل غیرخطی سازه با استفاده از روش ریکس-ومپنر^{۴۸} تعیین گشته است.



شکل ۷: خرابای دوبعدی با تغییر شکل‌های بزرگ (رفتار غیرخطی هندسی)

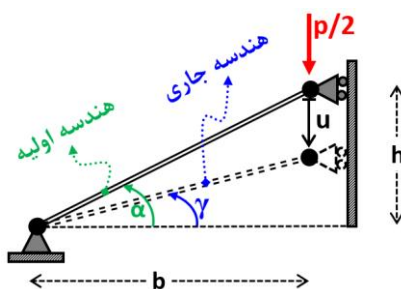
خصوصیات در نظر گرفته شده برای این سیستم نیز شامل هندسه و خصوصیات مکانیکی مصالح نیز در جدول (۱) آورده شده‌اند.

جدول ۱: ویژگی‌های در نظر گرفته شده برای سازه خرابایی مورد بررسی

نوع پارامتر	کمیت	نشانه	مقدار
هندسه سازه	ارتفاع خرپا	h	19.05 cm
	نصف دهانه سازه	b	33 cm
	طول اعضا	ℓ	38.1 cm
مقطع اعضا	زاویه اعضا با افق	α	30^0
	سطح مقطع اعضا	A	99.77 cm^2
ویژگی مصالح	مدول ارتجاعی	E	6889 kN/cm^2

۱-۴-۱- حل تحلیلی (دقیق):

با توجه به اینکه سازه مورد نظر متقارن بوده و بارگذاری وارد بر آن نیز تقارن دارد، به جای تحلیل کل سیستم می‌توان مطابق شکل (۸)، نیمی از سازه را تحلیل نمود.



شکل ۸: استفاده از تقارن سازه در تحلیل مثال ۱-۴

⁴⁸ Riks-Wempner

در این مسئله که با تغییر شکل های بزرگ مواجه هستیم، طبق شکل فوق، اگر زاویه اولیه عضو با افق را α و زاویه عضو را در حالتی که تکیه گاه غلتکی به اندازه u پایین آمده را برابر γ فرض کنیم. با فرض تغییر طول محوری عضو، δ ، روابط هندسی زیر را می توان بیان نمود.

$$(\ell - \delta) \cos \gamma = \ell \cos \alpha \quad (39)$$

و

$$(\ell - \delta) \sin \gamma + u = \ell \sin \alpha \quad (40)$$

با ترکیب دو رابطه (39) و (40)، می توان به عبارت زیر برای بیان تغییر طول محوری عضو رسید.

$$\delta = \ell - \sqrt{\ell^2 + u^2 - 2\ell u \sin \alpha} \quad (41)$$

اگر نیروی محوری عضو را با F_{bar} نشان دهیم، با نوشتن رابطه تعادل قائم نیروها می توان به رابطه زیر دست یافت.

$$\sum F_y = 0 \quad \therefore \quad F_{bar} \sin \gamma = \frac{P}{2} \quad (42)$$

رابطه قبل با در نظر گرفتن قانون هوک برای رفتار محوری میله به صورت زیر

$$F_{bar} = \frac{EA}{\ell} \delta \quad (43)$$

و همچنین در نظر گرفتن روابط (40) و (41)، به صورت زیر درمی آید.

$$\frac{2EA}{\ell} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{u}{\ell}\right)^2 - 2\left(\frac{u}{\ell}\right) \sin \alpha}} - 1 \right) (h - u) = p \quad (44)$$

۴-۱-۱- حل به روش انرژی:

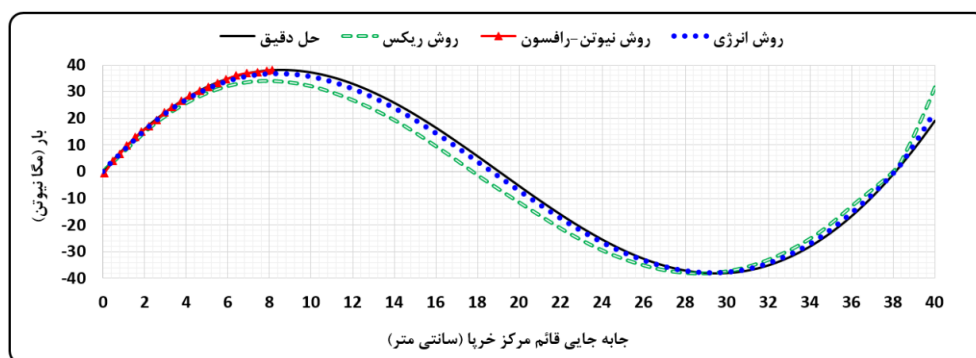
با تعریف یک نیروی فنر معادل، f_s ، برای سیستم مورد بحث به صورت زیر

$$f_s(u) = \frac{2EA}{\ell} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{u}{\ell}\right)^2 - \left(\frac{u}{\ell}\right)}} - 1 \right) \left(\frac{\ell}{2} - u \right) \quad (45)$$

سختی لحظه ای سیستم، $k(t)$ ، با مشتق گیری از این رابطه بر حسب جابه جایی به شکل زیر قابل حصول است.

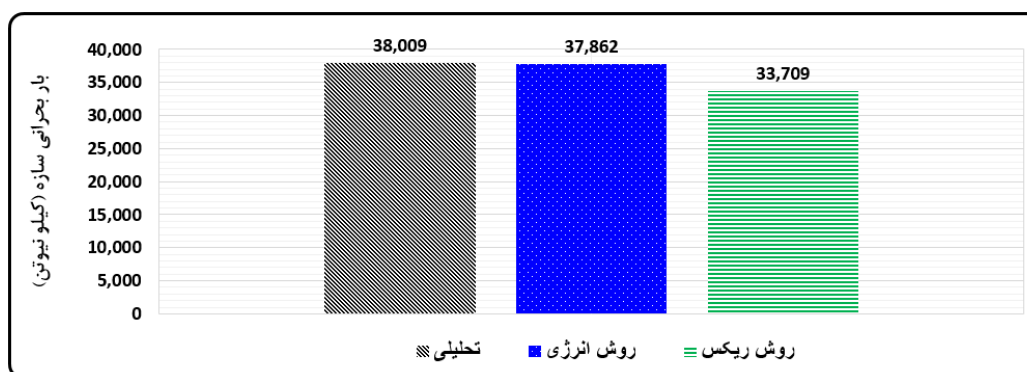
$$k(t) = \frac{\partial f_s}{\partial u} = \frac{2EA}{\ell} \left(1 - \frac{3}{4 \times \left(1 + \left(\frac{u}{\ell}\right)^2 - \left(\frac{u}{\ell}\right) \right)^{1.5}} \right) \quad (46)$$

با در نظر گرفتن رابطه فوق در رابطه تعادل انرژی می توان طبق الگوریتم داده شده در بخش قبل به تحلیل این سیستم پرداخت. نتایج حاصل از این تحلیل به همراه حل دقیق مسئله و حل به روش ریکس-ومپنر و همچنین نیوتن-رافسون در شکل (9) نمایش داده شده اند



شکل ۹: منحنی بار-تغییر شکل مثال ۱-۴

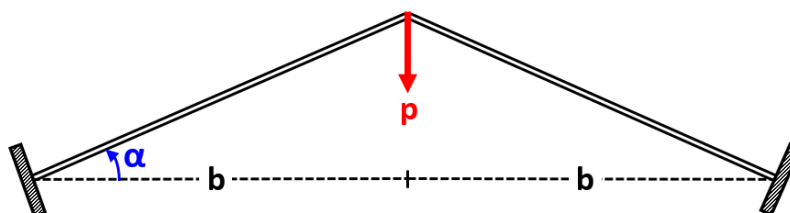
همان طور که به وضوح از شکل فوق مشخص است، روش انرژی تطابق بسیار خوبی با حل دقیق مسئله داشته و نسبت به روش ریکس اصلاح شده بهتر به جواب دقیق مسئله میل نموده است. همچنین، روش نیوتن-رافسون نیز با رسیدن به اولین نقطه انشعابی در حوالی نقطه خرابی سازه (جایی که سختی در حال صفر شدن است) متوقف شده و دیگر نتوانسته پاسخ سیستم را پیش بینی کند. در ادامه، بار بحرانی سازه در شکل (۱۰) که از روش های انرژی و ریکس محاسبه شده با مقدار متناظر با حل دقیق مسئله مقایسه شده اند که همان طور که مشاهده می گردد بیانگر دقت بهتر روش انرژی در محاسبه مقدار بار خرابی بوده است.



شکل ۱۰: مقایسه بار کمانشی محاسبه شده برای سازه خرابی از روش های انرژی اصلاح شده و ریکس-ومپنر با مقدار دقیق در تحلیل مثال ۱-۴

۲-۴- قاب ویلیامز^{۴۹} تحت تغییر شکل های بزرگ

در این مثال یک سازه قابی مطابق شکل (۱۱) تحت بار متمرکز میانی در نظر گرفته می شود. جواب تحلیلی و آزمایشگاهی این سیستم اولین بار توسط مرجع [۳۶] ارائه شده اند و به همین منظور نام این قاب نیز از روی نویسنده این مقاله گرفته شده است.



شکل ۱۱: قاب ویلیامز تحت تغییر شکل های بزرگ [۳۶]

⁴⁹ Williams

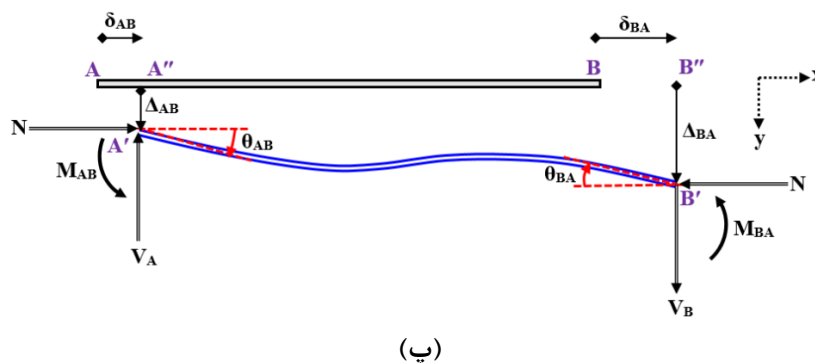
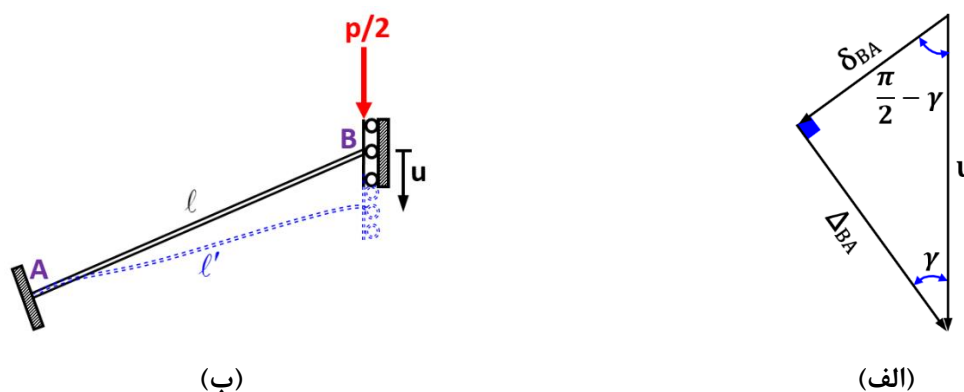
در اینجا، ویژگی فرض شده برای این سازه نیز مطابق جدول (۲) در نظر گرفته شده‌اند.

جدول ۲: ویژگی‌های در نظر گرفته شده برای قاب مورد بررسی

نوع پارامتر	کمیت	نشانه	مقدار
هندسه سازه	نصف دهانه سازه	b	33.8575 cm
	زاویه اعضا با افق	α	1.658^0
صلبیت مقاطع	محوری	EA	8.251×10^6 N
	خمشی	EI	2.66×10^5 N.cm ²

۴-۲-۱- حل تحلیلی (دقیق):

مشابه آنچه در مثال قبل صورت گرفت، با استفاده از تقارن سازه و بارگذاری وارده می‌توان نیمی از سازه را به صورت شکل (۱۲) در نظر گرفت.



شکل ۱۲: استفاده از تقارن سازه در تحلیل مثال ۴-۲

اگر زاویه عضو AB در حالت تغییر شکل یافته با افق را γ فرض کنیم، با استفاده از روابط هندسی نشان داده شده در شکل (۱۲)، تغییر مکان در راستا و عمود بر این عضو در نقطه B را می‌توان به صورت زیر بیان نمود.

$$\delta_{BA} = u \sin \gamma \tag{۴۷}$$

و

$$\Delta_{BA} = u \cos \gamma \tag{۴۸}$$

در این حالت، نیروی محوری، N ، ایجاد شده در عضو AB را طبق رابطه هوک می توان از حاصل ضرب سختی محوری عضو در تغییر طول محوری، به صورت زیر محاسبه نمود.

$$N = \frac{EA}{\ell} [\delta_{BA} - \delta_{AB} - \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx] \quad (49)$$

که مقدار δ_{AB} با توجه به شرایط مرزی صفر هست و مقدار تغییر طول عضو در اثر خمش که با عبارت انتگرالی نمایش داده شده است نیز طبق مرجع [۳۶] برای مسئله موردنظر به صورت زیر محاسبه می گردد.

$$\frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = 0.6 \frac{u^2}{\ell} \quad (50)$$

در نتیجه نیروی محوری را می توان به فرم زیر نوشت:

$$N = \frac{EA}{\ell} [u \sin \gamma - 0.6 \frac{u^2}{\ell}] \quad (51)$$

اگر فاصله دو سر عضو در حالت تغییر شکل یافته را ℓ' بنامیم، نیروی برشی در نقطه B ، V_B ، به کمک معادله تعادل لنگر بر روی نقطه A عبارت است از

$$\sum M_A = 0 \quad \therefore V_B = \frac{M_{AB} + M_{BA}}{\ell'} - \frac{p\ell \cos \alpha}{2\ell'} \quad (52)$$

که لنگرهای تکیه گاهی M_{AB} و M_{BA} با استفاده از روابط شیب-افت و اعمال شرایط مرزی مربوط به دورانها و چرخش کلی عضو به شکل زیر نوشته می شوند.

$$\begin{cases} M_{AB} = \frac{2EI}{\ell} [2\theta_A + \theta_B + 3\frac{\Delta_{BA}}{\ell}] = \frac{6EIu}{\ell^2} \cos \gamma \\ M_{BA} = \frac{2EI}{\ell} [2\theta_B + \theta_A + 3\frac{\Delta_{BA}}{\ell}] = \frac{6EIu}{\ell^2} \cos \gamma \end{cases} \quad (53)$$

در نتیجه می توان عبارت (۵۲) را برای V_B به صورت زیر ساده نمود.

$$V_B = \frac{12EIu}{\ell'^2} \cos \gamma - \frac{p\ell \cos \alpha}{2\ell'} \quad (54)$$

از طرفی تعادل نیروها در گره B نیز ایجاب می کند که رابطه ذیل برقرار باشد.

$$\sum F_Y = 0 \quad \therefore \frac{P}{2} = V_B \cos \gamma + N \sin \gamma \quad (55)$$

با جایگذاری مقادیر نیروی محوری و برش در نقطه B به ترتیب از روابط (۵۱) و (۵۴) در داخل معادله (۵۵) داریم.

$$\frac{p}{2} = \left[\frac{12EIu}{\ell'^2} \cos \gamma - \frac{p\ell \cos \alpha}{2\ell'} \right] \cos \gamma + \left[\frac{EA}{\ell} (u \sin \gamma - 0.6 \frac{u^2}{\ell}) \right] \sin \gamma \quad (56)$$

که با مقدار ساده سازی و استفاده از روابط هندسی، رابطه تحلیلی نیرو-تغییر مکان غیرخطی زیر حاصل می گردد.

$$p = \left[\frac{24EI \cos^3 \gamma}{\ell^2 \cos \alpha (1 + \cos^2 \gamma)} + \frac{2EA \sin^2 \gamma}{1 + \cos^2 \gamma} \right] \left(\frac{u}{\ell} \right) - \left[0.12EA \frac{\sin \gamma}{1 + \cos^2 \gamma} \right] \left(\frac{u}{\ell} \right)^2$$

$$; \gamma = \cos^{-1} \left[\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 + \left(\frac{u}{\ell} \right)^2 - 2 \left(\frac{u}{\ell} \right) \sin \alpha}} \right]$$
(۵۷)

۴-۲-۲- حل به روش انرژی:

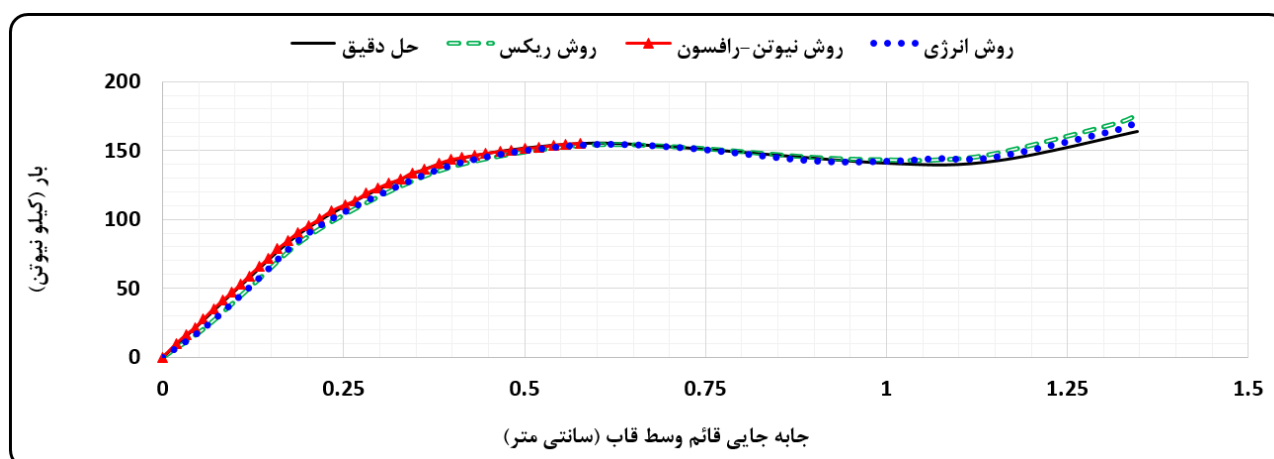
همانند مثال قبل، با تعریف یک نیروی فنر معادل، f_s ، برای سیستم به شکل زیر

$$f_s(u) = \left[24EI \frac{\cos^3 \gamma}{\ell^2 \cos \alpha (1 + \cos^2 \gamma)} + 2EA \frac{\sin^2 \gamma}{1 + \cos^2 \gamma} \right] \left(\frac{u}{\ell} \right) - \left[0.12EA \frac{\sin \gamma}{1 + \cos^2 \gamma} \right] \left(\frac{u}{\ell} \right)^2$$
(۵۸)

سختی مماسی یا لحظه‌ای سازه، $k(t)$ ، با مشتق‌گیری از رابطه فوق بر حسب جابه‌جایی به شکل زیر قابل حصول است.

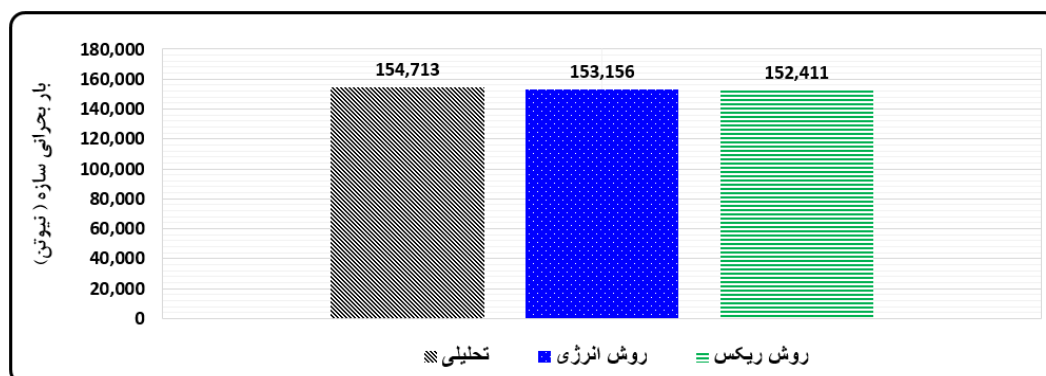
$$k(t) = \frac{\partial f_s}{\partial u}$$
(۵۹)

با جایگذاری رابطه فوق در رابطه تعادل انرژی و استفاده از الگوریتم داده‌شده در بخش قبل می‌توان این سیستم را تحلیل نمود که نتایج آن به همراه حل دقیق و همچنین تکنیک‌های نیوتن-رافسون و ریکس در شکل (۱۳) نمایش داده شده است.



شکل ۱۳: منحنی بار-تغییر شکل مثال ۴-۲

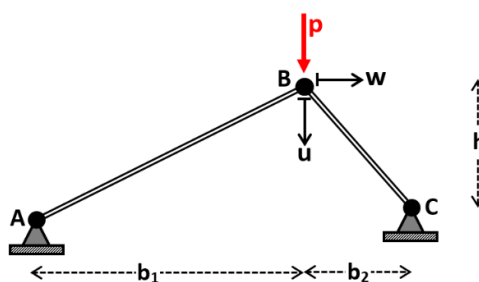
با مشاهده نتایج نشان داده‌شده در شکل (۱۳) مشاهده می‌شود که روش نیوتن-رافسون مشابه مثال قبل با صفر شدن سختی سازه (در نقطه انشعابی) همگرا نشده و برای تغییر شکل‌های بزرگ‌تر از این نقطه تکین نمی‌تواند رفتار سازه را پیش‌بینی کند. این در حالی است که هر دو روش انرژی اصلاح‌شده و روش طول قوس (ریکس) به‌خوبی با گذر از نقاط انشعابی در منحنی بار-تغییر شکل توانسته‌اند تطابق خوبی را با جواب دقیق مسئله داشته باشند. با این تفاوت که در روش انرژی تنها دو پارامتر Δt و β در تحلیل باید در ابتدا انتخاب‌شده و سپس از روی تاریخچه علامت Δ کنترل گردند، ولی در روش طول قوس پارامترهای بیشتری نظیر $\Delta \ell_{\min}$ ، $\Delta \ell_{\max}$ ، β و همچنین λ باید توسط تحلیلگر کالیبره و به کار گرفته شوند. در ادامه در شکل (۱۴)، مقدار بار کمانشی قاب ویلیامز در نظر گرفته‌شده که از روش تحلیلی به‌دست‌آمده (با محاسبه مقدار نیروی داخلی در لحظه‌ای که برای اولین بار سختی سازه صفر شده است) با مقادیر متناظر با روش‌های انرژی اصلاح‌شده و ریکس مقایسه شده که بیانگر تطابق بهتر روش انرژی با مقدار دقیق بوده است.



شکل ۱۴: مقایسه بار کمانشی محاسبه شده قاب ویلیامز از روش‌های انرژی اصلاح شده و ریکس-ومپنر با مقدار دقیق در تحلیل مثال ۲-۴

۳-۴- سازه خرپایی دوبعدی نامتقارن با هندسه غیرخطی

سازه موردنظر در اینجا در واقع یک حالت نامتقارن از مثال ۱-۴ است که به منظور ارزیابی کارایی روش در سیستم‌های نامتقارن آورده شده است. ابعاد هندسی این سیستم به همراه شرایط تکیه‌گاهی، بارگذاری و درجات آزادی سیستم در شکل (۱۵) نمایش داده شده‌اند.

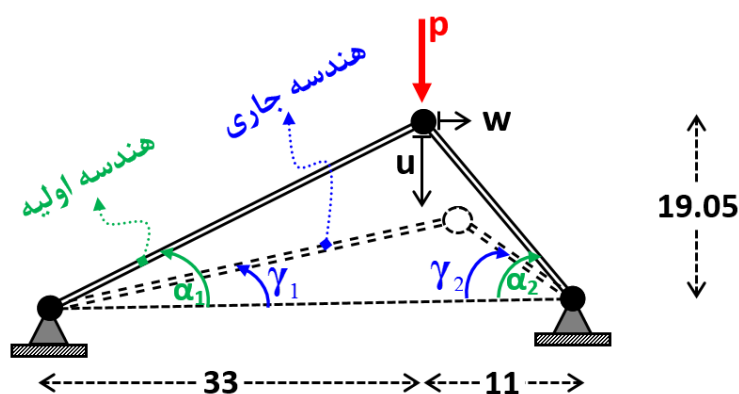


شکل ۱۵: خرپای نامتقارن با رفتار غیرخطی هندسی

در این مثال به غیر از در نظر گرفتن هندسه نامتقارن در سازه، سطح مقطع عضو BC نیز دو برابر سطح مقطع عضو AB فرض شده است. به‌طور کلی در جدول (۳) تمامی کمیت‌های در نظر گرفته شده در مسئله حاضر تعریف شده‌اند.

جدول ۳: ویژگی‌های در نظر گرفته شده برای مثال ۳-۴

مقدار	نشانه	کمیت	نوع پارامتر
19.05 cm	h	ارتفاع خرپا	هندسه سازه
33 cm	b_1	تصویر افقی عضو AB	
38.1 cm	l_1	طول عضو AB	
30°	α_1	زاویه عضو AB با افق	
11 cm	b_2	تصویر افقی عضو BC	
22 cm	l_2	طول عضو BC	
60°	α_2	زاویه عضو BC با افق	
99.77 cm^2	A_1	سطح مقطع عضو AB	
$2 \times 99.77 \text{ cm}^2$	A_2	سطح مقطع عضو BC	
6889 kN/cm^2	E	مدول ارتجاعی	ویژگی مصالح



شکل ۱۶: هندسه تغییرشکل یافته سازه تحت جابه‌جایی‌های بزرگ (ابعاد برحسب سانتی‌متر هستند)

بر مبنای شکل (۱۶)، طول اعضای AB و BC در حالت تغییرشکل یافته را با استفاده از رابطه فیثاغورث می‌توان با روابط زیر برحسب w و u بیان نمود.

$$\ell_{AB} = \sqrt{(19.05 - u)^2 + (33 + w)^2} \quad , \quad \ell_{BC} = \sqrt{(19.05 - u)^2 + (11 - w)^2} \quad (60)$$

که از روی آن‌ها، تغییر طول محوری اعضا به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$\delta_{AB} = \sqrt{(19.05 - u)^2 + (33 + w)^2} - 38.1 \quad , \quad \delta_{BC} = \sqrt{(19.05 - u)^2 + (11 - w)^2} - 26.94 \quad (61)$$

و طبق فرض ثابت بودن سختی الاستیک اعضا (صرف نظر از غیرخطی مادی)، بر طبق قانون هوک، عبارات ذیل برای نیروی محوری اعضا حاصل می‌شوند.

$$F_{AB} = \left(\frac{EA}{\ell} \right)_{AB} \times \delta_{AB} \quad , \quad F_{BC} = \left(\frac{EA}{\ell} \right)_{BC} \times \delta_{BC} \quad (62)$$

برای ارضای شرایط تعادل در گره B در سازه تغییرشکل یافته، دو نیروی فوق باید با بار متمرکز خارجی p متعادل گردند. در این حالت مطابق شکل (۱۶)، اگر زاویه اعضای AB و BC با افق به ترتیب به ترتیب با γ_1 و γ_2 نمایش داده شوند، می‌توان نوشت.

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 & \therefore F_{AB} \cos \gamma_1 = F_{BC} \cos \gamma_2 \\ \sum F_y = 0 & \therefore F_{AB} \sin \gamma_1 + F_{BC} \sin \gamma_2 = p \end{cases} \quad (63)$$

که از ترکیب آن‌ها، می‌توان نیروی محوری در اعضا برحسب بار خارجی را به صورت زیر بیان نمود.

$$F_{AB} = \frac{p \cos \gamma_2}{\sin(\gamma_1 + \gamma_2)} \quad , \quad F_{BC} = \frac{p \cos \gamma_1}{\sin(\gamma_1 + \gamma_2)} \quad (64)$$

روابط مثلثاتی فوق در این حالت، طبق شکل (۱۶)، به صورت زیر حساب می‌گردند.

$$\cos \gamma_1 = \frac{33 + w}{\sqrt{(19.05 - u)^2 + (33 + w)^2}}$$

$$\cos \gamma_2 = \frac{11 - w}{\sqrt{(19.05 - u)^2 + (11 - w)^2}} \quad (65)$$

$$\sin(\gamma_1 + \gamma_2) = \frac{44(19.05 - u)}{\sqrt{(19.05 - u)^2 + (33 + w)^2} \sqrt{(19.05 - u)^2 + (11 - w)^2}}$$

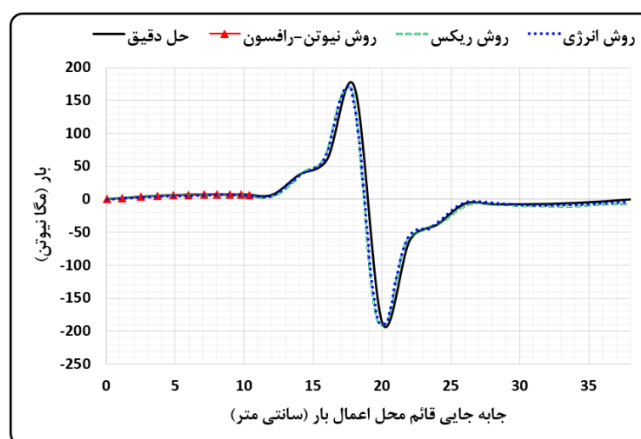
با جایگذاری روابط (۶۲) در داخل (۶۴) و استفاده از معادلات (۶۵) به ترتیب می‌توان به دو عبارت (۶۶) و (۶۷) دست یافت.

$$p = \frac{793716(19.05 - u) \sqrt{(19.05 - u)^2 + (11 - w)^2} \left[\sqrt{(19.05 - u)^2 + (33 + w)^2} - 38.1 \right]}{(11 - w) \sqrt{(19.05 - u)^2 + (33 + w)^2} \sqrt{(19.05 - u)^2 + (11 - w)^2}} \quad (66)$$

و

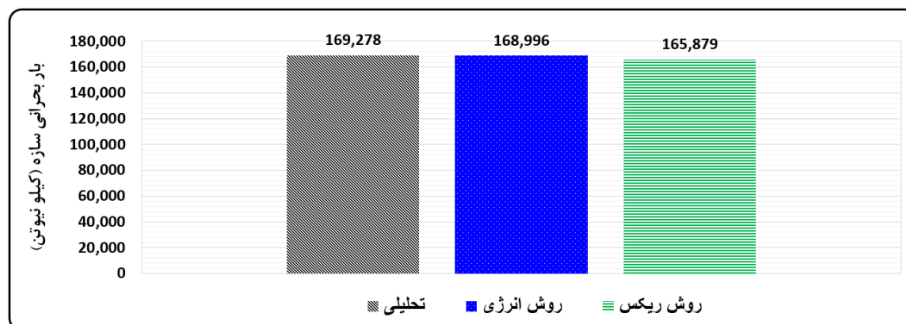
$$p = \frac{2749252(19.05 - u) \sqrt{(19.05 - u)^2 + (33 + w)^2} \left[\sqrt{(19.05 - u)^2 + (11 - w)^2} - 26.94 \right]}{(33 + w) \sqrt{(19.05 - u)^2 + (33 + w)^2} \sqrt{(19.05 - u)^2 + (11 - w)^2}} \quad (67)$$

با ترکیب دو رابطه (۶۶) و (۶۷) و بیان p برحسب یک متغیر می‌توان جواب دقیق این مسئله را ترسیم نمود. به‌طور مثال، در اینجا با حذف کردن متغیر w از این دو معادله، نمودار بار-تغییر شکل سازه مطابق شکل (۱۷) خواهد بود. همچنین، برای اعمال روش انرژی نیز با مشتق‌گیری از رابطه نیرو-تغییر مکان و تعریف سختی مماسی می‌توان سیستم را تحلیل نمود. در ادامه، همانند مثال‌های قبلی، نتایج به‌دست‌آمده از روش‌های عددی نیوتن-رافسون، ریکس-مپنر و روش انرژی به همراه حل تحلیلی مسئله در شکل (۱۷) نمایش داده شده‌اند.



شکل ۱۷: منحنی بار-تغییر شکل مثال ۳-۴

با توجه به شکل (۱۷)، در این حالت نیز روش انرژی تطابق بسیار خوبی با روش ریکس و همچنین حل تحلیلی مسئله دارد. علاوه بر این، روش نیوتن-رافسون نیز همانند دو مثال قبلی با رسیدن به اولین نقطه انشعابی در حوالی نقطه خرابی سازه (جایی که سختی در حال صفر شدن است) متوقف شده و دیگر نتوانسته پاسخ سازه را تعیین کند. در شکل (۱۸) نیز بار بحرانی سازه محاسبه شده از روش‌های انرژی و ریکس با مقدار دقیق مسئله مقایسه گشته و همان‌طور که دیده می‌شود روش انرژی به مقدار اندکی در محاسبه مقدار بار خرابی دقیق‌تر از روش ریکس بوده است.



شکل ۱۸: مقایسه بار کمانشی محاسبه شده برای سازه خرابی از روش های انرژی اصلاح شده و ریکس-ومپنر با مقدار دقیق در مثال ۳-۴

۵- نتیجه گیری

در تحقیق حاضر، با گسترش و اعمال روش انرژی اصلاح شده که در اخیراً در تئوری دینامیک سازه ها مطرح شده، بر روی مسائل شبه-استاتیک رایج در مکانیک جامدات که دارای هندسه غیرخطی و دارای نقاط انشعابی هستند، ویژگی های عددی این روش در مواجهه با این نوع از مسائل مورد ارزیابی قرار گرفته اند. در مجموع مشاهدات به دست آمده از تحلیل مثال های عددی در نظر گرفته شده را می توان در قالب موارد ذیل بیان نمود:

- روش انرژی ارائه شده برخلاف روش های نیوتنی به خوبی قادر است با تشخیص صحیح مسیر تعادل در منحنی بار-تغییر شکل سازه از نقاط انشعابی عبور کرده و با صفر شدن سختی سازه در نقاط تکین دچار واگرایی نمی گردد.
- همچنین، روش عددی فوق الذکر نسبت به روش های نیرو-تغییر مکان-قید تنها نیاز به انتخاب دو پارامتر Δt و β دارد که امکان کنترل آن ها با توجه به مقادیر تاریخچه دلتای معادله درجه دوم ارائه شده در بخش سوم وجود دارد. این در حالی است که در روش های قیدی مانند طول قوس (ریکس) پارامترهای مختلفی مانند Δl_{Max} ، Δl_{Min} ، β و λ وجود دارد که تحلیلگر باید با انجام عملیات سعی و خطا، به انتخاب و کنترل آن ها در مسائل مختلف دارای نقاط انشعابی بپردازد.
- در نهایت، از مقایسه مقادیر پاسخ های به دست آمده از روش انرژی و روش ریکس با حل تحلیلی مسائل مشاهده می گردد که دقت روش عددی ارائه شده نسبت به روش طول قوس بهتر بوده و مقادیر بار کمانشی (با خرابی) سازه به دست آمده از روش انرژی اصلاح شده خطای کمتری را نسبت به روش ریکس داشته اند.

در انتها نویسندگان این تحقیق، گسترش روش مطرح شده در تحلیل سیستم های دارای معادلات اندرکنشی (مانند سیستم سد-فونداسیون-مخزن) و همچنین سازه های دارای آسیب را به عنوان موضوعاتی برای تحقیقات آینده پیشنهاد می کنند.

فهرست علائم			
GREEK		LATIN	
نشانه	کمیت	نشانه	کمیت
α	زاویه اولیه اعضا با افق	A	سطح مقطع اعضا
β	ضریب مشارکت سرعت در تعیین تغییر مکان	A, B, C	ضرایب معادله درجه دو
γ	زاویه اعضا با افق در حالت تغییر شکل یافته	B	ماتریس ارتباط کرنش-جابه جایی
δ	نمو	b	طول افقی اعضا

Δ	دلتای معادله درجه دوم سرعت/ تغییرات پارامترها	D	بردار تغییر مکان سیستم
Δ_{AB}, Δ_{BA}	جابه‌جایی قائم نقاط A و B نسبت به هم	d^e	بردار جابه‌جایی‌های گره‌ای المان
Δl	طول کمان	E	کرنش‌های لاگرانژی
Δl_{min}	حد بالای طول قوس	E	مدول ارتجاعی مصالح
Δl_{max}	حد پایین طول قوس	E_{int}	انرژی داخلی سازه
Δt	گام زمانی	E_{ext}	انرژی ناشی از بارگذاری
ϵ^e	کرنش داخل المان	e	کرنش‌های اویبری
θ_A	دوران نقطه A	F_{int}	بردار نیروهای داخلی
θ_B	دوران نقطه B	F_{ext}	بردار نیروهای خارجی
λ	ضریب بار	F_R	بردار نیروهای نامتوازن
σ^e	تنش داخل المان	f_s	نیروی مقاوم
		h	ارتفاع خرپا
		I	ممان اینرسی اعضا
		^tk	سختی مماسی
		l	طول اولیه
		l'	فاصله دو سر عضو در حالت تغییر شکل یافته
		N	بردار توابع شکل
		p	بار متمرکز
		t	شبه-زمان
		U	بردار تغییر مکان
		u	جابه‌جایی قائم وسط سازه
		V^e	حجم المان
		v(t)	سرعت در لحظه t
		w	جابه‌جایی افقی وسط سازه نامتقارن
		x	موقعیت جاری سیستم
		X	موقعیت اولیه سیستم

مراجع

- [1] Crisfield M. A. Non-linear finite element analysis of solids and structures. Wiley; 1993.
- [2] M. J. Tuner, E. H. Drill, and H. C. M. R. J. Melosh, "Large deflection of structures subject to heating and external load, J," *Areo Sci*, vol. 27, pp. 97–106, 1960.
- [3] R. H. Gallagher, R. A. Gellatly, R. H. Mallett, and J. Padlog, "A discrete element procedure for thin-shell instability analysis," *AIAA J.*, vol. 5, no. 1, pp. 138–145, 1967.
- [4] R. H. Gallagher and J. Padlog, "Discrete element approach to structural instability analysis," *AIAA J.*, vol. 1, no. 6, pp. 1437–1439, 1963.
- [5] K. K. Kapur and B. J. Hartz, "Stability of plates using the finite element method," *J. Eng. Mech. Div.*, vol. 92, no. 2, pp. 177–196, 1966.
- [6] I. Holand and T. Moan, "The fi finite element in plate bukling," *Finite Elem. Method. Stress Anal. ed. I. Hol. al.*, Tapir, 1969.
- [7] J. H. Argyris, *Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis/progress in Aeronautical Sciences*. Pergamon Press, 1964.
- [8] J. H. Argyris, "Continua and Discontinua, opening address to the 1-st Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics." Wright-Patterson AFB, Dayton, Ohio, 1965.
- [9] P. V Marcal, "Finite Element Analysis with Material Nonlinearities: Theory and Practice," 1969.
- [10] O. C. Zienkiewicz, "The Finite Element Method in Engineering Science McGrawHill Book Company," Inc, London, 1971.
- [11] Y. Yamada, N. Yoshimura, and T. Sakurai, "Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by the finite element method," *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 10, no. 5, pp. 343–354, 1968.
- [12] O. C. Zienkiewicz, S. Valliappan, and I. P. King, "Elasto-plastic solutions of engineering problems 'initial stress', finite element approach," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 1, no. 1, pp. 75–100, 1969.
- [13] J. T. Oden, "Numerical Formulations of Nonlinear Elasticity Problems," *J. Struct. Div.*, vol. 93, no. 3, pp. 235–356, 1967.
- [14] R. H. Mallett and L. A. Schmit, "Nonlinear structural analysis by energy search," *J. Struct. Div.*, vol. 93, no. 3, pp. 221–234, 1967.
- [15] F. K. Bogner, R. L. Fox, and L. A. Schmit, "Finite deflection structural analysis using plate and shell discretelements," *AIAA J.*, vol. 6, no. 5, pp. 781–791, 1968.
- [16] G. C. Nayak and O. C. Zienkiewicz, "Elasto-plastic stress analysis. A generalization for various contitutive relations including strain softening," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 5, no. 1, pp. 113–135, 1972.
- [17] M. F. and B.MASSICOTTE, "GEOMETRICAL INTERPRETATION OF THE ARC-LENGTH METHOD," *Comput. Struct.*, vol. 46, no. 4, pp. 603–615, 1993.
- [18] H. B. Coda and M. Greco, "A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 193, no. 33–35, pp. 3541–3557, 2004.
- [19] P. M. A. A. and T. B. T. Rabczuk, "A simplified mesh-free method for shear bands with cohesive surfaces," pp. 993–1021, 2007.
- [20] A. Lorenzana, P. M. López-reyes, E. Chica, and J. M. . Teran, "A NONLINEAR MODEL FOR THE ELASTOPLASTIC ANALYSIS OF 2D FRAMES ACCOUNTING FOR DAMAGE Antol' in Lorenzana," *Theor. Appl. Mech.*, vol. 49, no. 2, pp. 515–529, 2011.
- [21] I. Mansouri and H. Saffari, "An efficient nonlinear analysis of 2D frames using a Newton-like technique," *Arch. Civ. Mech. Eng.*, vol. 12, no. 4, pp. 485–492, 2012.
- [22] S. Mamouri, E. Mourid, and a. Ibrahimbegovic, "Study of geometric non-linear instability of 2D frame structures," *Eur. J. Comput. Mech.*, vol. 24, no. 6, pp. 1–23, 2015.

- [23] J. Radnic, R. Markic, M. Glibic, N. Grgić, and I. Banović, "Comparison of numerical models for nonlinear static analysis of planar concrete frames based on 1D and 2D finite elements," *Materwiss. Werksttech.*, vol. 47, no. 5–6, pp. 472–482, 2016.
- [24] J. S. Moita, A. L. Araújo, C. M. Mota Soares, C. a. Mota Soares, and J. Herskovits, "Geometrically nonlinear analysis of sandwich structures," *Compos. Struct.*, pp. 1–10, 2016.
- [25] M. Crusells-Girona, F. C. Filippou, and R. L. Taylor, "A mixed formulation for nonlinear analysis of cable structures," *Comput. Struct.*, vol. 186, pp. 50–61, 2017.
- [26] D. C. Feng, G. Wu, Z. Y. Sun, and J. G. Xu, "A flexure-shear Timoshenko fiber beam element based on softened damage-plasticity model," *Eng. Struct.*, vol. 140, pp. 483–497, 2017.
- [27] M. Jalili Sadr Abad, M. Mahmoudi, M. Mollapour Asl, R. "Application of modified energy method in the nonlinear cyclic behavior of structures," *J. Struct. Constr. Eng.*, 2018.
- [28] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, and D. Fox, *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. 2014.
- [29] R. De Borst, M. a. Crisfield, J. J. C. Remmers, and C. V. Verhoosel, *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. 2012.
- [30] E. Riks, "An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems," *Int. J. Solids Struct.*, vol. 15, no. 7, pp. 529–551, 1979.
- [31] M. Crisfield, "A fast incremental/iterative solution procedure that handles 'snap-through,'" in *Computational Methods in Nonlinear Structural and Solid Mechanics*, Elsevier, 1981, pp. 55–62.
- [32] M. Jalili Sadr Abad, M. Mahmoudi, and E. H. Dowell, "Dynamic Analysis of SDOF Systems Using Modified Energy Method," *ASIAN J. Civ. Eng.*, vol. 18, no. 7, pp. 1125–1146, 2017.
- [33] M. Jalili Sadr Abad, M. Mahmoudi, and E. Dowell, "Novel Technique for Dynamic Analysis of Shear-Frames Based on Energy Balance Equations," *Sci. Iran.*, pp. 1–31, 2018.
- [34] K. Kondoh and S. N. Atluri, "Influence of local buckling on global instability: Simplified, large deformation, post-buckling analyses of plane trusses," *Comput. Struct.*, vol. 21, no. 4, pp. 613–627, 1985.
- [35] M. a. M. Torkamani and J.-H. Shieh, "Higher-order stiffness matrices in nonlinear finite element analysis of plane truss structures," *Eng. Struct.*, vol. 33, no. 12, pp. 3516–3526, 2011.
- [36] F. W. Williams, "An approach to the non-linear behaviour of the members of a rigid jointed plane framework with finite deflections," *Q. J. Mech. Appl. Math.*, vol. 17, no. 4, pp. 451–469, 1964.