

## بررسی نقش شرایط مرزی متفاوت در کمانش ستون های واقع بر بستر الاستیک

سید محمدرضا حسنی<sup>۱</sup>، مسعود محمودآبادی<sup>۲\*</sup>، رسول دانایی<sup>۳</sup>

۱- کارشناس ارشد مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه قم، ایران

۲- استادیار، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه قم، ایران

۳- دانشجوی کارشناسی ارشد سازه، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه قم، ایران

### چکیده

یکی از موضوعات مهندسی که از پیچیدگی های قابل ملاحظه ای برخوردار است کمانش ستونهای واقع بر بستر الاستیک است. در این تحقیق، موضوع کمانش ستونهای واقع بر بستر الاستیک با شرایط مرزی مختلف به روش انرژی بررسی شده است. لازم به ذکر است که در این مقاله، ستونها بوسیله تعداد زیادی میله های صلب دو سر مفصل که بوسیله فنرهای پیچشی به یکدیگر متصل شده بودند، مدل گردیدند و بستر الاستیک نیز بوسیله فنرهای طولی مدل شد. با تدوین برنامه هایی کامپیوتری، برای پنج نوع ستون با شرایط مرزی مختلف، بار بحرانی این نوع ستونها استخراج گردید. ابتدا با در نظر گرفتن سختی صفر برای فنرهای طولی و با داشتن مقادیر تحلیلی بارهای بحرانی ستونها، ضریب سختی فنرهای پیچشی بدست آمد. سپس، با تعریف پارامتری بی بعد که بیانگر سختی نسبی بستر الاستیک نسبت به سختی خمشی ستون بود، بار بحرانی برای پنج نوع ستون برای محدوده وسیعی از سختی نسبی بستر الاستیک بدست آورده شد و نتایج کار به صورت نمودارهایی ارائه گردید. با توجه به اینکه برای ستون دو سر مفصل متکی بر بستر الاستیک حل تحلیلی وجود دارد، در این مرحله، صحت سنجی کار برای این نوع ستون انجام شد و تطابق بسیار خوبی بین بار کمانشی بدست آمده از حل تحلیلی و بار کمانشی بدست آمده از مدل اجزاء محدود برای سختی های نسبی مختلف بستر مشاهده شد. با استفاده از روش برازش منحنی، برای چهار نوع ستون دیگر، روابطی ریاضی پیشنهاد شد که با استفاده از این روابط ریاضی، بار بحرانی ستونهای مذکور با دقت قابل قبول مهندسی بر حسب سختی نسبی بستر الاستیک محاسبه می شود.

کلمات کلیدی: کمانش، بستر الاستیک، شرایط مرزی، مدل اجزاء محدود، حل تحلیلی.

شناسه دیجیتال:		سابقه مقاله:				
doi:	10.22065/jsce.2017.86913.1204	چاپ	انتشار آنلاین	پذیرش	بازنگری	دریافت
	http://dx.doi.org/10.22065/jsce.2017.86913.1204	۱۳۹۷/۰۳/۳۰	۱۳۹۶/۰۳/۲۵	۱۳۹۶/۰۳/۲۴	۱۳۹۶/۰۳/۱۳	۱۳۹۶/۰۱/۲۰
*نویسنده مسئول: دکتر مسعود محمودآبادی					پست الکترونیکی: m.mahmoudabadi@qom.ac.ir	

## Investigating effect of boundary conditions on columns' buckling

S. M. R. Hasani<sup>1</sup>, M. Mahmoudabadi<sup>2\*</sup>, R. Danaei<sup>3</sup>

1- MSc of Structural Engineering, Department of Civil Engineering, Qom University, Qom, Iran

2- Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Qom University, Qom, Iran

3- MSc student in Structural Engineering, Department of Civil Engineering, Qom University, Qom, Iran

### ABSTRACT

*In this research, the subject of buckling of columns on elastic foundation with different boundary conditions by energy approach has been presented. Columns modeled by two-end rigid bars where interconnected to each other by rotational springs, and elastic foundation modeled by translational springs. By preparing computer programs for five column types with different boundary conditions, the critical loads of these columns have been obtained. This five types of columns include two hinge end column, one fix end-one hinge end column, two fix end column, one fix end-one free end column and one hinge end-one free end column which are located on elastic foundation. At first, the stiffness of translational springs is set equal zero, and by knowing the analytical solutions, the stiffness coefficients of rotational springs have been gathered. Then, by defining a dimensionless parameter which showing the relative stiffness of elastic foundation, the critical load for a wide range of foundation stiffness has been obtained and results are presented in form of some graphs. There is analytical solution for two hinge end column on elastic foundation, therefore, at this stage, verification has been done for this kind of column and a very good consistency is observed between analytical buckling load and finite element buckling load for different relative stiffness of foundation. In fact, there is a linear relation between buckling load of two hinge end column and relative stiffness coefficient of foundation. But for other four type of columns, this relation may not be linear. Therefore, by using fitting curve method, for other four type of columns, some mathematical relations are proposed, which by these mathematical relations, the buckling load of above mentioned columns are computed in according to relative stiffness of foundation by acceptable errors.*

### ARTICLE INFO

Received: 14/04/2017

Revised: 04/06/2017

Accepted: 14/06/2017

### Keywords:

Buckling

Elastic Foundation

Boundary Conditions

Finite Element Model

Analytical Solution

All rights reserved to Iranian Society of Structural Engineering.

doi: 10.22065/jsce.2017.86913.1204

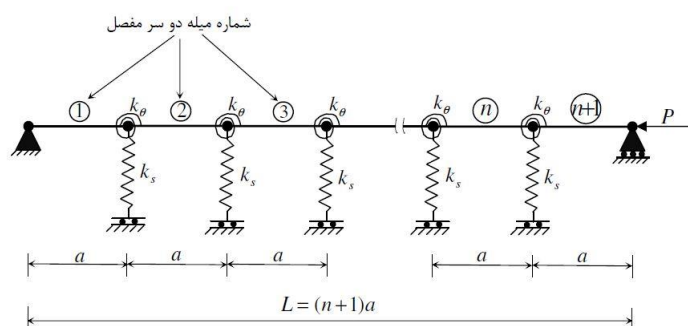
\*Corresponding author: M. Mahmoudabadi.  
Email address: m.mahmoudabadi@qom.ac.ir

موضوع کمانش یکی از مباحث مهم در مهندسی سازه می‌باشد. علاوه بر این، موضوع کمانش ستون‌های واقع بر بستر الاستیک دارای پیچیدگی قابل ملاحظه‌ای می‌باشد. در مرجع [1] کاربردهای زیادی برای این ستون‌ها ذکر شده است. به عنوان مثال می‌توان پی‌های شمعی، خطوط راه آهن و... را بعنوان نمونه‌ای از آن‌ها نام برد. در نتیجه، بحث کمانش ستون‌های واقع بر بستر الاستیک را می‌توان برای مطالعه طیف گسترده‌ای از مسائل مربوط به پایداری بکار برد. این مسائل که دارای اهمیت خاصی در مهندسی سازه و ژئوتکنیک هستند مربوط به موضوعات اندرکنش خاک - سازه و یا موارد مرتبط با شمع‌ها، چاه‌ها، و یا مواردی که در آنها ترکیب بارهای محوری، خمشی و جانبی وجود دارد می‌شود. در مرجع [2] با استفاده از روش رایلی-ریتز، بار بحرانی برای یک ستون دو سر مفصل متکی بر بستر الاستیک بدست آورده شده است. تغییر شکل فرضی در نظر گرفته شده برای کمانش، برابر با مجموع  $n$  منحنی سینوسی می‌باشد و چون این منحنی‌ها منطبق بر منحنی واقعی کمانش واقع شده است، در نتیجه، جواب دقیق و تحلیلی برای بار بحرانی بدست آمده و نتیجه کار بصورت یک نمودار چند خطی نشان داده شده است. این نمودار، بار بحرانی سیستم را بر حسب پارامتر بدون بعد  $\alpha = \frac{kL^2}{\pi^2 P_e}$  نشان می‌دهد. در این رابطه،  $k$  ضریب سختی بستر الاستیک،  $L$  طول ستون و  $P_e$  بار بحرانی اولر برای ستون دو سر مفصل می‌باشد که برابر با  $\frac{\pi^2 EI}{L^2}$  است. با استفاده از یک روش مشابه در مرجع [3]، بار کمانشی مربوط به یک ستون تحت بار محوری گسترده یکنواخت واقع بر بستر الاستیک بدست آورده شده است. در مرجع [4] معادله مشخصه‌ای برای ستون‌های واقع بر بستر الاستیک ارائه شده است که با استفاده از روش عددی، مقدار اولیه بار بحرانی تعیین می‌گردد. ماتریس سختی و بار معادل برای المان محدود ستون‌های واقع بر بستر الاستیک وینکلر در مرجع [5] با استفاده از توابع شکل دقیق بدست آورده شده است. معادلات دیفرانسیل، ضرایب سختی و نیروهای گیرداری یک ستون واقع بر بستر الاستیک که شامل تغییر شکل‌های خمشی و برشی می‌شود در مرجع [6] بدست آورده شده است.

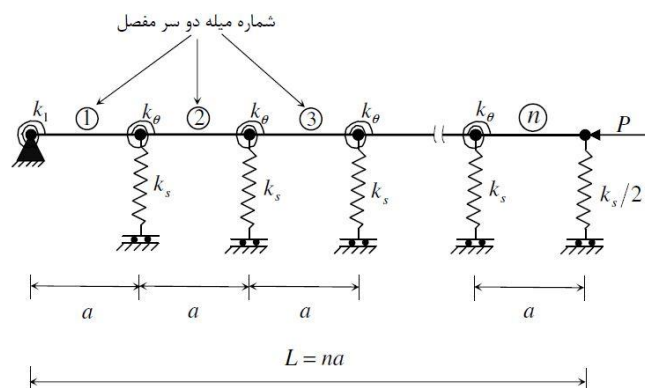
در مرجع [7] از روش اجزاء محدود برای مطالعه کمانش ستون‌های واقع بر بستر الاستیک استفاده شده است. در مراجع [8] و [9] و [10] و [11] تحقیقات بیشتری نسبت به موضوع پایداری تیر-ستون‌های واقع بر بستر الاستیک انجام شده است. همچنین اثرات اتصالات نیمه صلب بر پایداری و تحلیل مرتبه دوم ستون‌ها و قاب‌ها در مرجع [12] بررسی شده است. بدنبال آن در مرجع [13] ماتریس سختی مرتبه دوم و بردار بارگذاری ستون تیموشینکو واقع بر بستر وینکلر با شرایط انتهایی تعمیم یافته مورد بررسی قرار گرفته است. در دو مرجع [14] و [15] اثرات تغییر شکل‌های برشی بر روی پایداری الاستیک و دینامیک تیر-ستون‌های واقع بر بستر الاستیک مورد مطالعه قرار گرفته است. و در نهایت در مرجع [16] مطالعه‌ای بر روی پایداری ستون‌های لاغر واقع بر بستر الاستیک با شرایط انتهایی تعمیم یافته انجام گردیده است. در این تحقیق، پنج نوع ستون واقع بر بستر الاستیک با شرایط انتهایی متفاوت در نظر گرفته شده است. ستون‌ها بوسیله تعداد زیادی میله‌های صلب دو سر مفصل که توسط فنرهای پیچشی به یکدیگر متصل شده‌اند مدل می‌شوند و بستر الاستیک نیز بوسیله فنرهای طولی مدل شده است. ابتدا ضریب سختی فنرهای طولی برابر با صفر در نظر گرفته شده است و بارهای بحرانی ستون‌ها بر حسب ضریب سختی فنرهای پیچشی و طول میله‌های دو سر مفصل بدست آورده شده است. سپس، با داشتن مقادیر تحلیلی بارهای بحرانی ستون‌ها، ضریب سختی فنرهای پیچشی بدست آمده است. آنگاه، با تغییر پارامتر بی‌بعد  $\alpha$  در محدوده صفر تا ۲۰۰، بار بحرانی ستون‌ها بدست آمده و نتیجه به صورت نمودارهایی بر حسب پارامتر  $\alpha$  که بیانگر سختی نسبی بستر الاستیک بود رسم شده است. آنگاه، منحنی‌هایی بر این نمودارها برازش گردید که می‌توان با استفاده از روابط ریاضی مربوط به این منحنی‌ها با دقت قابل قبول مهندسی، بار بحرانی این پنج نوع ستون را بدست آورد. البته، همانطوری که ذکر گردید در مرجع [1] برای ستون دو سر مفصل واقع بر بستر الاستیک، نمودار و روابطی ریاضی ارائه شده است که در این تحقیق از آنها برای صحت‌سنجی استفاده گردیده است. اما، نگارندگان این مقاله برای سایر ستون‌ها در هیچ مرجعی این نوع نمودارها و روابط را مشاهده نکرده‌اند که بنظر می‌آید برای اولین بار است که این کار برای ستون‌های با شرایط تکیه‌گاهی مختلف که واقع بر بستر الاستیک هستند انجام می‌شود.

## ۲- مدل سازی ستونهای واقع بر بستر الاستیک

مدل‌های مورد نظر در شکل‌های ۱ و ۲ نشان داده شده است. شکل ۱، معرف مدل ستون دو سر مفصل و شکل ۲، معرف مدل ستون یک سر گیردار-یک سر آزاد واقع بر بستر الاستیک می‌باشد. بخاطر رعایت اختصار، شکل مربوط به مدل ستون دو سر گیردار و نیز شکل مربوط به مدل ستون یک سر گیردار-یک سر مفصل آورده نشده است. در این اشکال، سختی خمشی ستون‌ها با فنرهای پیچشی  $k_\theta$  مدل گردیده و سختی بستر الاستیک نیز با فنرهای طولی  $k_s$  مدل شده است. همچنین، سختی فنر یا فنرهای انتهایی،  $k_1$ ، برابر با  $100k_\theta$  در نظر گرفته شده است تا بیانگر یک اتصال گیردار باشد. بدیهی است هر گاه در مدل نشان داده شده در شکل ۲،  $k_1$  برابر صفر در نظر گرفته شود، بیانگر یک ستون یک سر مفصل-یک سر آزاد واقع بر بستر الاستیک می‌باشد که مدل پنجم مورد نظر را تشکیل می‌دهد.



شکل ۱: مدل ستون دو سر مفصل واقع بر بستر الاستیک متشکل از  $n + 1$  میله و با  $n$  درجه آزادی.



شکل ۲: مدل ستون یک سر گیردار-یک سر آزاد واقع بر بستر الاستیک متشکل از  $n$  میله و با  $n$  درجه آزادی.

## ۳- استفاده از روش انرژی برای محاسبه بار بحرانی

برای محاسبه بار بحرانی با استفاده از روش انرژی، یک تغییر شکل فرضی برای سیستم در نظر گرفته می‌شود. برای سیستم‌های مورد نظر، می‌توان تغییر شکل فرضی را دوران میله‌های صلب دو سر مفصل در نظر گرفت.

در اثر این تغییر شکل فرضی، انرژی ذخیره شده در فنرهای پیچشی در سیستم‌های مورد نظر برابر است با:

$$U_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_{\theta} (\theta_{i+1} - \theta_i)^2 + \frac{1}{2} k_1 \theta_1^2 + \frac{1}{2} k_1 \theta_{n+1}^2 \quad (1)$$

لازم به ذکر است که در سیستم دو سر مفصل، جمله دوم و سوم وجود ندارد و در سیستم یک سر گیردار-یک سر مفصل، جمله سوم در رابطه ۱ باید حذف گردد. برای سیستم طره‌ای (سیستم نشان داده شده در شکل ۲) انرژی ذخیره شده در فنرهای پیچشی در اثر یک تغییر شکل فرضی عبارت است از:

$$U_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} k_{\theta} (\theta_{i+1} - \theta_i)^2 + \frac{1}{2} k_1 \theta_1^2 \quad (2)$$

در اثر تغییر شکل فرضی ایجاد شده در سیستم‌های مذکور، فنرهای انتقالی نیز انرژی جذب می‌کنند که مقدار آن برای سیستم‌های دو سر مفصل، یک سر گیردار-یک سر مفصل و دو سر گیردار که دارای  $n+1$  میله و  $n$  درجه آزادی هستند برابر است با:

$$U_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_s \Delta_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n k_s a^2 (\sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \dots + \sin \theta_i)^2 \quad (3)$$

برای سیستم طره‌ای نشان داده شده در شکل ۲، انرژی ذخیره شده در فنرهای انتقالی در اثر یک تغییر شکل فرضی عبارت است از:

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} k_s \Delta_i^2 + \frac{1}{4} k_s \Delta_n^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} k_s a^2 (\sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \dots + \sin \theta_i)^2 + \frac{1}{4} k_s a^2 (\sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \dots + \sin \theta_n)^2 \end{aligned} \quad (4)$$

در اثر یک تغییر شکل فرضی (کمانش)، نیروی  $P$  نشان داده شده در شکل ۱ و ۲ نیز کار انجام می‌دهد. برای سیستم‌هایی که دارای  $n+1$  میله هستند، منفی این کار انجام شده است که با انرژی پتانسیل سیستم برابر است. مقدار این کار برابر است با:

$$V = - \sum_{i=1}^{n+1} Pa(1 - \cos \theta_i) = -Pa \sum_{i=1}^{n+1} (1 - \cos \theta_i) \quad (5)$$

و برای سیستم طره‌ای نشان داده شده در شکل ۲، که دارای  $n$  میله است، انرژی پتانسیل سیستم برابر است با:

$$V = - \sum_{i=1}^n Pa(1 - \cos \theta_i) = -Pa \sum_{i=1}^n (1 - \cos \theta_i) \quad (6)$$

مجموع انرژی کرنشی جذب شده توسط فنرها و انرژی پتانسیل سیستم، انرژی کل سیستم را تشکیل می‌دهند:

$$\Pi = U_1 + U_2 + V \quad (7)$$

با مشتق‌گیری از تابع انرژی پتانسیل کل،  $\Pi$ ، نسبت به پارامترهای سیستم،  $\theta_i, i=1, 2, \dots, n$  و با مساوی صفر قرار دادن آنها  $n$  معادله مجهولی بدست می‌آید. هرگاه در ترمینان ماتریس ضرایب دستگاه معادلات مذکور برابر با صفر قرار داده شود و معادله حاصل

شده حل شود، مقادیر ویژه سیستم که همان بارهای بحرانی سیستم هستند بدست می‌آید. با کدنویسی در محیط نرم‌افزار متلب اینکار انجام گردیده است که نتایج آن در بخش‌های بعدی ذکر خواهد گردید.

#### ۴- محاسبه ضرایب سختی فنرهای پیچشی و صحت‌سنجی مدل‌ها

نرم‌افزار متلب قابلیت‌های بسیاری در زمینه‌های مهندسی، علوم، محاسبات و ریاضیات دارد. در این تحقیق، با تدوین برنامه‌هایی در محیط متلب، بارهای بحرانی و شکل مدهای کمانشی ستون‌های دو سر مفصل، ستون‌های یک سر گیردار-یک سر مفصل، ستون‌های دو سر گیردار و ستون‌های یک سر گیردار-یک سر آزاد محاسبه شده است.

ابتدا برای محاسبه ضریب سختی فنرهای پیچشی،  $k_\theta$ ، ضریب سختی فنرهای انتقالی،  $k_s$ ، برابر صفر در نظر گرفته شد. بدین ترتیب، دیگر ستون‌ها بر بستر الاستیک متکی نیستند و در نتیجه مقادیر بارهای بحرانی آنها به صورت تحلیلی در مراجع مربوطه از جمله مرجع [2] موجود می‌باشد. آنگاه برای مقادیر مختلف  $n$  (درجه آزادی)، بارهای بحرانی چهار سیستم فوق‌الذکر به صورت عددی محاسبه شده است که نتایج کار به ترتیب در جداول ۱ تا ۴ آورده شده است. لازم بذکر است که مقادیر بارهای بحرانی ذکر شده در جداول ۱ الی ۴ همگی دارای ضریب  $\frac{k_\theta}{a}$  می‌باشند.

جدول ۱: مقادیر بارهای بحرانی و نسبت‌های آنها برای ستون دو سر مفصل به ازای درجات آزادی مختلف  $n$

$n$	$P_{cr1}$	$P_{cr2}$	$P_{cr3}$	$P_{cr4}$	$P_{cr5}$	$\frac{P_{cr2}}{P_{cr1}}$	$\frac{P_{cr3}}{P_{cr1}}$	$\frac{P_{cr4}}{P_{cr1}}$
۲	۱/۰۰۰۰	۳/۰۰۰۰	-----	-----	-----	۳/۰۰۰	-----	-----
۵	۰/۲۶۷۹	۱/۰۰۰۰	۲/۰۰۰۰	۳/۰۰۰۰	۳/۷۳۲۱	۳/۷۳۲	۷/۴۶۴	۱۱/۱۹۶
۱۰	۰/۰۸۱۰	۰/۳۱۷۵	۰/۶۹۰۳	۱/۱۶۹۲	۱/۷۱۵۴	۳/۹۱۹	۸/۵۲۱	۱۴/۴۳۲
۱۰۰	$۹/۶۷۴ \times 10^{-۴}$	$۳/۸۶۹ \times 10^{-۳}$	$۸/۷۰۱ \times 10^{-۳}$	$۱/۵۴۶ \times 10^{-۲}$	$۲/۴۱۴ \times 10^{-۲}$	۳/۹۹۹	۸/۹۹۴	۱۵/۹۸۱
۱۰۰۰	$۹/۸۵۰ \times 10^{-۶}$	$۳/۹۴ \times 10^{-۵}$	$۸/۸۶۵ \times 10^{-۵}$	$۱/۵۷۶ \times 10^{-۴}$	$۲/۴۶۲ \times 10^{-۴}$	۴/۰۰۰	۹/۰۰۰	۱۶/۰۰۰

جدول ۲: مقادیر بارهای بحرانی و نسبت‌های آنها برای ستون یک سر گیردار-یک سر مفصل به ازای درجات آزادی مختلف  $n$

$n$	$P_{cr1}$	$P_{cr2}$	$P_{cr3}$	$P_{cr4}$	$P_{cr5}$	$\frac{P_{cr2}}{P_{cr1}}$	$\frac{P_{cr3}}{P_{cr1}}$	$\frac{P_{cr4}}{P_{cr1}}$
۲	۲/۴۸۸۶	۶۸/۱۷۸۱	-----	-----	-----	۲۷/۳۹۶	-----	-----
۵	۰/۶۳۲۲	۱/۶۷۲۸	۲/۸۰۷۵	۳/۶۷۵۹	۸۴/۵۴۵۰	۲/۶۴۶	۴/۴۴۱	۵/۸۱۵
۱۰	۰/۱۸۰۳	۰/۵۱۷۱	۰/۹۸۴۸	۱/۵۴۱۸	۲/۱۳۸۹	۲/۸۶۹	۵/۴۶۳	۸/۵۵۲
۱۰۰	$۱/۹۹۸ \times 10^{-۳}$	$۵/۹۰۵ \times 10^{-۳}$	$۱/۱۷۶ \times 10^{-۲}$	$۱/۹۵۵ \times 10^{-۲}$	$۲/۹۲۸ \times 10^{-۲}$	۲/۹۵۵	۵/۸۸۴	۹/۷۸۵
۱۰۰۰	$۲/۰۱۷ \times 10^{-۵}$	$۵/۹۶۲ \times 10^{-۵}$	$۱/۱۸۸ \times 10^{-۴}$	$۱/۹۷۷ \times 10^{-۴}$	$۲/۹۶۲ \times 10^{-۴}$	۲/۹۵۶	۵/۸۸۹	۹/۷۹۹

با توجه به اینکه مقادیر تحلیلی بارهای بحرانی برای چهار سیستم فوق‌الذکر مشخص است، با مساوی قرار دادن بارهای بحرانی بدست آمده برای مدل کمانش از روش عددی برای  $n = 1000$  که در جداول ۱ تا ۴ منعکس گردیده است با مقادیر تحلیلی متناظرشان، ضریب سختی فنرهای پیچشی،  $k_\theta$ ، بر حسب  $EI$  و  $a$  بدست می‌آید که نتایج کار در جدول ۵ آورده شده است.

جدول ۳: مقادیر بارهای بحرانی و نسبت‌های آنها برای ستون دو سر گیردار به ازای درجات آزادی مختلف  $n$

$n$	$P_{cr1}$	$P_{cr2}$	$P_{cr3}$	$P_{cr4}$	$P_{cr5}$	$\frac{P_{cr2}}{P_{cr1}}$	$\frac{P_{cr3}}{P_{cr1}}$	$\frac{P_{cr4}}{P_{cr1}}$
۲	۳۶/۳۳۳۳	۱۰۱/۰۰۰۰	-----	-----	-----	۲/۷۸۰	-----	-----
۵	۱/۳۷۴۷	۲/۴۸۸۶	۳/۶۱۵۲	۶۸/۱۷۸۱	۱۰۱/۰۱۰۱	۱/۸۱۰	۲/۶۳۰	۴۹/۵۹۵
۱۰	۰/۳۸۰۶	۰/۷۵۶۵	۱/۳۷۸۳	۱/۹۵۴۴	۲/۶۱۴۴	۱/۹۸۸	۳/۶۲۲	۵/۱۳۵
۱۰۰	۳/۹۴۵×۱۰ <sup>-۳</sup>	۸/۰۶۸×۱۰ <sup>-۳</sup>	۱/۵۷۶×۱۰ <sup>-۲</sup>	۲/۳۸۲×۱۰ <sup>-۲</sup>	۳/۵۴۱×۱۰ <sup>-۲</sup>	۲/۰۴۵	۳/۹۹۶	۶/۰۳۷
۱۰۰۰	۳/۹۴۸×۱۰ <sup>-۵</sup>	۸/۰۷۶×۱۰ <sup>-۵</sup>	۱/۵۷۹×۱۰ <sup>-۴</sup>	۲/۳۸۷×۱۰ <sup>-۴</sup>	۳/۵۵۳×۱۰ <sup>-۴</sup>	۲/۰۴۶	۴/۰۰۰	۶/۰۴۷

جدول ۴: مقادیر بارهای بحرانی و نسبت‌های آنها برای ستون یک سر گیردار-یک سر آزاد به ازای درجات آزادی مختلف  $n$

$n$	$P_{cr1}$	$P_{cr2}$	$P_{cr3}$	$P_{cr4}$	$P_{cr5}$	$\frac{P_{cr2}}{P_{cr1}}$	$\frac{P_{cr3}}{P_{cr1}}$	$\frac{P_{cr4}}{P_{cr1}}$
۲	۰/۹۹۰۰	۱۰۱/۰۱	-----	-----	-----	۱۰۲/۰۳	-----	-----
۵	۰/۱۲۰۱	۰/۹۹۶۷	۲/۳۴۲۹	۳/۵۳۰۲	۱۰۱/۰۱	۸/۲۹۹	۱۹/۵۰۹	۲۹/۳۹۵
۱۰	۰/۰۲۷۲	۰/۲۴۰۶	۰/۶۴۴۳	۱/۱۹۴۸	۱/۸۳۲۷	۸/۸۳۸	۲۳/۶۷۰	۴۳/۸۹۵
۱۰۰	۲/۴۹۲×۱۰ <sup>-۴</sup>	۲/۲۴۲×۱۰ <sup>-۳</sup>	۶/۲۲۶×۱۰ <sup>-۳</sup>	۱/۲۲۰×۱۰ <sup>-۲</sup>	۲/۰۱۵×۱۰ <sup>-۲</sup>	۸/۹۹۹	۲۴/۹۸۸	۴۸/۹۵۱
۱۰۰۰	۲/۴۷۰×۱۰ <sup>-۶</sup>	۲/۲۲۳×۱۰ <sup>-۵</sup>	۶/۱۷۵×۱۰ <sup>-۵</sup>	۱/۲۱۰×۱۰ <sup>-۴</sup>	۲/۰۰۱×۱۰ <sup>-۴</sup>	۹/۰۰۰	۲۵/۰۰۰	۴۹/۰۰۰

جدول ۵: مقادیر بدست آمده برای ضریب سختی فنرهای پیچشی

سیستم دو سر مفصل	سیستم یک سر مفصل	سیستم دو سر گیردار	سیستم یک سر گیردار
$1.000 \times \frac{EI}{a}$	$0.997 \times \frac{EI}{a}$	$0.998 \times \frac{EI}{a}$	$0.999 \times \frac{EI}{a}$

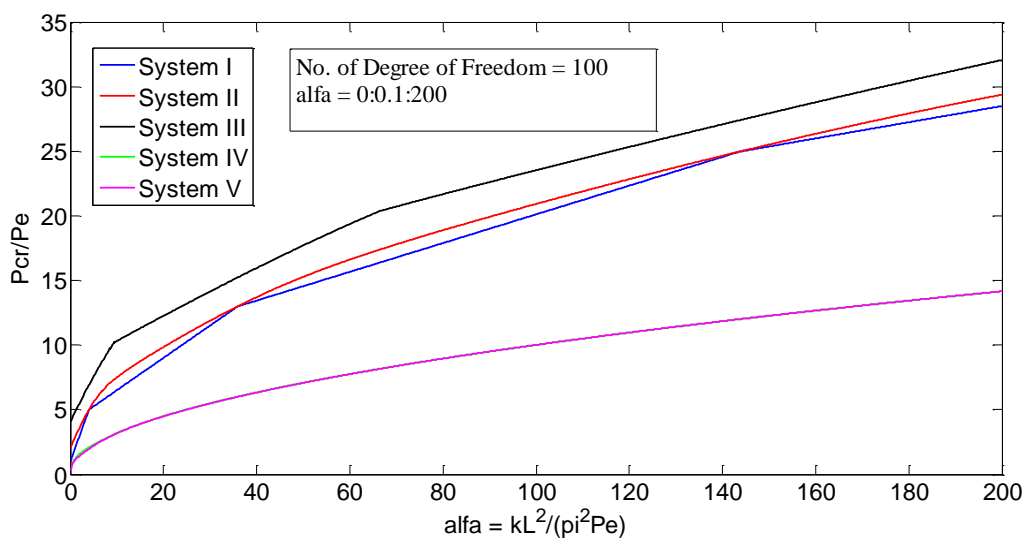
با ملاحظه جدول ۵، مشخص می‌گردد که مقدار ضریب سختی فنر پیچشی،  $k_{\theta}$ ، در مورد ستون دو سر مفصل برابر با  $\frac{EI}{a}$  بدست

آمده و در سه مورد دیگر کمتر از  $\frac{EI}{a}$  است. این مسئله می‌تواند ناشی از این موضوع باشد که با در نظر گرفتن  $k_1 = 100k_{\theta}$ ، تکیه‌گاه موسوم به گیردار کاملاً به صورت گیردار بوجود نیامده است و در حد چند دهم درصد از حالت ایده‌آل فاصله دارد. علاوه بر این، در سه ستون آخر جداول ۱ تا ۴، نسبت بارهای بحرانی مدهای بالاتر کمانشی به بار بحرانی مد اصلی کمانش آورده شده است. این نسبت‌ها برای ستون دو سر مفصل در حالتی که  $n$  حداکثر مقدار خود را دارا می‌باشد به ترتیب برابر با ۴، ۹ و ۱۶ است که بر مقادیر تحلیلی‌اش کاملاً منطبق می‌باشد. این نسبت‌ها برای سایر سیستم‌ها نیز با مقادیر متناظر تحلیلی آنها مطابقت دارد و در نتیجه نشانگر این موضوع است که مدل‌سازی بدرستی صورت گرفته است و استفاده از این مدل‌ها برای اضافه کردن فنرهای انتقالی،  $k_s$ ، صحیح می‌باشد.

## ۵- محاسبه بار بحرانی ستون‌های واقع بر بستر الاستیک

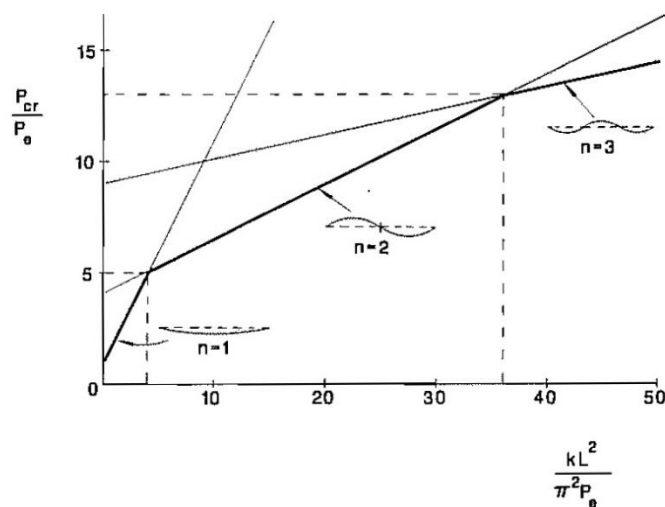
هر گاه  $k_s$  و متناظر با آن  $\alpha$  مقداری غیرصفر داشته باشد، بار بحرانی ستون واقع بر بستر الاستیک بدست می‌آید. با در نظر گرفتن محدوده تغییرات  $\alpha$  از صفر تا ۲۰۰ و با افزایش ۰/۱، بار بحرانی چهار سیستم فوق‌الذکر برای این محدوده وسیع بدست آمده است. علاوه بر این، در سیستم ۴ هرگاه سختی  $k_1$  برابر صفر در نظر گرفته شود، سیستم شماره ۵ بدست می‌آید که برای این سیستم نیز، بار بحرانی محاسبه

گردید. در شکل ۳ نمودار تغییرات  $\frac{P_{cr}}{P_e}$  این پنج سیستم بر حسب پارامتر بی بعد  $\alpha = \frac{kL^2}{\pi^2 P_e}$  آورده شده است. در این رابطه،  $k$  ضریب سختی بستر الاستیک،  $L$  طول ستون و  $P_e$  بار بحرانی اولر برای ستون دو سر مفصل می باشد که برابر با  $\frac{\pi^2 EI}{L^2}$  است.



شکل ۳: چگونگی تغییرات  $\frac{P_{cr}}{P_e}$  سیستم‌های مختلف بر حسب پارامتر بی بعد  $\alpha = \frac{kL^2}{\pi^2 P_e}$

در مرجع [2]، نمودار مشابهی برای سیستم دو سر مفصل سیستم ۱ رسم گردیده است که این نمودار در شکل ۴ آورده شده است. ملاحظه می‌گردد نموداری که در شکل ۳ برای سیستم ۱ آورده شده است منطبق بر نمودار چند خطی است که در مرجع [2] برای همین سیستم بدست آمده است. در نتیجه، صحت محاسبات به اثبات می‌رسد. علاوه بر این، نمودارهایی برای ۴ سیستم دیگر بدست آمده است که نگارندگان این مقاله، نمونه مشابهی برای این نمودارها در هیچ مرجعی مشاهده نکرده‌اند و یکی از نوآوری‌های این مقاله همین مطلب می‌باشد.



شکل ۴: چگونگی تغییرات  $\frac{P_{cr}}{P_e}$  سیستم دو سر مفصل بر حسب پارامتر بی بعد  $\alpha = \frac{kL^2}{\pi^2 P_e}$  [2]



با دقت در نمودارهای شکل ۳ مشاهده می‌شود که منحنی مربوط به سیستم ۲ (ستون یک سر گیردار-یک سر مفصل متکی بر بستر الاستیک) از نقاط تلاقی خط‌هایی که نمودار سیستم ۱ را تشکیل می‌دهند عبور می‌کند که این موضوع جالب توجه می‌باشد زیرا در سایر نقاط، بار بحرانی سیستم ۲ همانطور که انتظار می‌رود بیشتر از بار بحرانی سیستم ۱ است اما در این نقاط، بار بحرانی این دو سیستم با هم برابر می‌گردد.

همچنین، بار بحرانی دو سیستم ۴ و ۵ برای  $\alpha$  های بزرگتر از ۱۰ تفاوت چندانی با یکدیگر ندارند و این نشانگر این موضوع است که گیرداری تکیه‌گاه سیستم ۴ برای  $\alpha$  های کوچکتر از ۱۰ موثر بوده و برای  $\alpha$  های بزرگتر از ۱۰، گیردار بودن تکیه‌گاه سیستم طره‌ای تاثیر چندانی بر روی بار بحرانی آن برای حالتی که بر بستر الاستیک متکی است، ندارد.

علاوه بر این، مشاهده می‌شود برای ستون‌هایی که از لحاظ شرایط مرزی دو انتها مشابه هم هستند (سیستم دو سر مفصل و سیستم دو سر گیردار) تغییرات بار بحرانی بر حسب پارامتر  $\alpha$ ، به صورت چند خطی یا شبه چند خطی است در حالی که برای سایر سیستم‌ها به صورت منحنی می‌باشد.

## ۶- برآزش منحنی بر نمودارهای بار بحرانی

به منظور استفاده عملی و مهندسی از نمودارهای ارائه شده در شکل ۳، با استفاده از نرم‌افزار اکسل، منحنی‌هایی بر این نمودارها برآزش گردید که روابط ریاضی مربوطه در جداول ۶ الی ۱۰ ارائه گردیده است. جدول ۶ مربوط به سیستم ۱ (ستون دو سر مفصل) است که از مرجع [2] اخذ گردیده است ولی برای سایر سیستم‌ها همانطوری که ذکر گردید با استفاده از نرم‌افزار اکسل، معادله این منحنی‌ها بدست آمده است. با استفاده از این معادلات، می‌توان مقدار بار بحرانی این سیستم‌ها را با خطایی در حد چند درصد بدست آورد که از لحاظ مهندسی قابل قبول می‌باشد. این معادلات نیز از نوآوری‌های این مقاله می‌باشد.

جدول ۶: روابط ریاضی مربوط به محاسبه بار بحرانی سیستم شماره ۱ (ستون دو سر مفصل متکی بر بستر الاستیک) اخذ شده از مرجع [2].

محدوده تغییرات $\alpha$	$36 \leq \alpha \leq 144$	$4 \leq \alpha \leq 36$	$0 \leq \alpha \leq 4$	رابطه ریاضی
$144 \leq \alpha \leq 200$	$\frac{P_{cr}}{P_e} = \frac{\alpha}{9} + 9$	$\frac{P_{cr}}{P_e} = \frac{\alpha}{4} + 4$	$\frac{P_{cr}}{P_e} = \alpha + 1$	
	$\frac{P_{cr}}{P_e} = \frac{\alpha}{16} + 16$			

جدول ۷: روابط ریاضی مربوط به محاسبه بار بحرانی سیستم شماره ۲ (ستون یک سر گیردار-یک سر مفصل متکی بر بستر الاستیک).

محدوده تغییرات $\alpha$	$36 \leq \alpha \leq 144$	$4 \leq \alpha \leq 36$	$0 \leq \alpha \leq 4$	رابطه ریاضی
$144 \leq \alpha \leq 200$	$\frac{P_{cr}}{P_e} = 2.48\alpha^{0.463}$	$\frac{P_{cr}}{P_e} = 2.836\alpha^{0.419}$	$\frac{P_{cr}}{P_e} = 0.736\alpha + 2.116$	
	$\frac{P_{cr}}{P_e} = 2.168\alpha^{0.492}$			

جدول ۸: روابط ریاضی مربوط به محاسبه بار بحرانی سیستم شماره ۳ (ستون دو سر گیردار متکی بر بستر الاستیک).

محدوده تغییرات $\alpha$	$9.3 \leq \alpha \leq 66.5$	$0 \leq \alpha \leq 9.3$	رابطه ریاضی
$66.5 \leq \alpha \leq 200$	$\frac{P_{cr}}{P_e} = -3.69 \times 10^{-4} \alpha^2 + 0.207\alpha + 8.266$	$\frac{P_{cr}}{P_e} = -0.01\alpha^2 + 0.75\alpha + 4.065$	
	$\frac{P_{cr}}{P_e} = -6 \times 10^{-5} \alpha^2 + 0.103\alpha + 13.77$		

جدول ۹: روابط ریاضی مربوط به محاسبه بار بحرانی سیستم شماره ۴ (ستون یک سر گیردار-یک سر آزاد متکی بر بستر الاستیک)

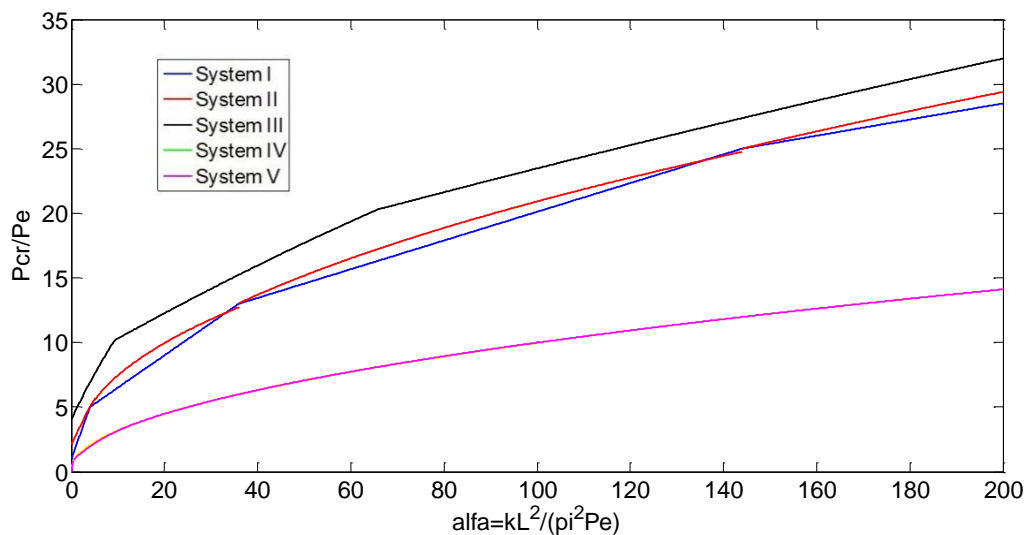
محدوده تغییرات $\alpha$	$20 \leq \alpha \leq 100$	$2 \leq \alpha \leq 20$	$0 \leq \alpha \leq 2$	رابطه ریاضی
$100 \leq \alpha \leq 200$	$\frac{P_{cr}}{P_e} = 1.01\alpha^{0.497}$	$\frac{P_{cr}}{P_e} = -3.55 \times 10^{-3} \alpha^2 + 0.235\alpha + 1.18$	$\frac{P_{cr}}{P_e} = 0.18\alpha^3 - 0.828\alpha^2 + 1.593\alpha + 0.268$	
	$\frac{P_{cr}}{P_e} = 0.998\alpha^{0.5}$			

جدول ۱۰: روابط ریاضی مربوط به محاسبه بار بحرانی سیستم شماره ۵ (ستون یک سر مفصل-یک سر آزاد متکی بر بستر الاستیک)

محدوده تغییرات $\alpha$	$20 \leq \alpha \leq 100$	$0.5 \leq \alpha \leq 20$	$0 \leq \alpha \leq 0.5$	رابطه ریاضی
$100 \leq \alpha \leq 200$	$\frac{P_{cr}}{P_e} = 0.999\alpha^{0.5}$	$\frac{P_{cr}}{P_e} = 2.3 \times 10^{-4} \alpha^3 - 1.24 \times 10^{-2} \alpha^2 + 0.343\alpha + 0.756$	$\frac{P_{cr}}{P_e} = -3.044\alpha^2 + 3.252\alpha$	
	$\frac{P_{cr}}{P_e} = 0.998\alpha^{0.5}$			

همچنین، با استفاده از روابط ریاضی ارائه شده در جداول ۶ تا ۱۰، نمودار تغییرات  $\frac{P_{cr}}{P_e}$  بر حسب  $\alpha$  در شکل ۵ رسم شده است.

ملاحظه می شود نمودارهای این شکل با نمودارهای متناظرشان در شکل ۳ تفاوت چندانی ندارند. علاوه بر این، مقادیر محاسباتی  $\frac{P_{cr}}{P_e}$  بر حسب  $\alpha$  در جدول ۱۱ آورده شده است. بازه تغییرات  $\alpha$  از صفر تا ۲۰۰ است و مقدار افزایش پارامتر بی بعد  $\alpha$  به اندازه یک واحد می باشد. در نتیجه، برای کاربردهای مهندسی هم می توان از روابط ارائه شده در جداول ۶ تا ۱۰ برای محاسبه بار بحرانی سیستم های ۱ تا ۵ استفاده نمود و هم می توان از جدول ۱۱ استفاده کرد و در نهایت نتایج را با هم مقایسه کرد تا بدینوسیله از صحت محاسبات اطمینان حاصل نمود.



شکل ۵: چگونگی تغییرات  $\frac{P_{cr}}{P_e}$  سیستم های مختلف بر حسب  $\alpha$  بر اساس روابط ریاضی پیشنهادی.

جدول ۱۱: مقادیر  $\frac{P_{cr}}{P_e}$  سیستم‌های ۱ تا ۵ بر حسب پارامتر بی بعد  $\alpha$

$\alpha$	سیستم ۱	سیستم ۲	سیستم ۳	سیستم ۴	سیستم ۵	$\alpha$	سیستم ۱	سیستم ۲	سیستم ۳	سیستم ۴	سیستم ۵
0	1.00	2.07	4.00	0.25	0.00	50	14.55	15.27	17.71	7.08	7.07
1	2.00	2.86	4.81	1.21	1.08	51	14.66	15.42	17.88	7.15	7.14
2	3.00	3.62	5.52	1.57	1.40	52	14.78	15.56	18.04	7.22	7.21
3	4.00	4.34	6.22	1.84	1.69	53	14.89	15.70	18.21	7.29	7.28
4	5.00	5.00	6.90	2.07	1.95	54	15.00	15.83	18.38	7.36	7.35
5	5.25	5.59	7.57	2.29	2.19	55	15.11	15.97	18.55	7.43	7.42
6	5.50	6.09	8.21	2.49	2.42	56	15.22	16.10	18.71	7.49	7.49
7	5.75	6.51	8.83	2.67	2.63	57	15.33	16.23	18.87	7.56	7.55
8	6.00	6.88	9.43	2.85	2.82	58	15.44	16.36	19.04	7.63	7.62
9	6.25	7.20	10.00	3.02	3.00	59	15.55	16.49	19.20	7.69	7.69
10	6.50	7.49	10.32	3.18	3.17	60	15.66	16.61	19.36	7.76	7.75
11	6.75	7.76	10.51	3.33	3.33	61	15.78	16.74	19.52	7.82	7.82
12	7.00	8.02	10.71	3.48	3.48	62	15.89	16.86	19.68	7.88	7.88
13	7.25	8.26	10.90	3.62	3.62	63	16.00	16.98	19.84	7.95	7.94
14	7.50	8.50	11.10	3.76	3.76	64	16.11	17.10	19.99	8.01	8.01
15	7.75	8.73	11.29	3.89	3.89	65	16.22	17.22	20.15	8.07	8.07
16	8.00	8.96	11.48	4.02	4.02	66	16.33	17.33	20.30	8.13	8.13
17	8.25	9.19	11.68	4.14	4.14	67	16.44	17.45	20.43	8.20	8.19
18	8.50	9.41	11.87	4.26	4.26	68	16.55	17.57	20.52	8.26	8.25
19	8.75	9.62	12.06	4.38	4.37	69	16.67	17.68	20.62	8.32	8.32
20	9.00	9.84	12.25	4.49	4.49	70	16.78	17.79	20.72	8.38	8.38
21	9.25	10.05	12.44	4.60	4.60	71	16.89	17.91	20.82	8.44	8.44
22	9.50	10.26	12.63	4.71	4.70	72	17.00	18.02	20.91	8.50	8.49
23	9.75	10.47	12.82	4.82	4.81	73	17.11	18.13	21.01	8.55	8.55
24	10.00	10.68	13.01	4.92	4.91	74	17.22	18.24	21.10	8.61	8.61
25	10.25	10.88	13.20	5.02	5.01	75	17.33	18.35	21.20	8.67	8.67
26	10.50	11.08	13.39	5.12	5.10	76	17.44	18.46	21.30	8.73	8.73
27	10.75	11.28	13.58	5.22	5.20	77	17.56	18.56	21.39	8.79	8.79
28	11.00	11.48	13.77	5.31	5.30	78	17.67	18.67	21.49	8.84	8.84
29	11.25	11.68	13.95	5.40	5.39	79	17.78	18.78	21.58	8.90	8.90
30	11.50	11.88	14.14	5.50	5.48	80	17.89	18.88	21.68	8.96	8.96
31	11.75	12.07	14.32	5.59	5.57	81	18.00	18.99	21.77	9.01	9.01
32	12.00	12.26	14.51	5.67	5.66	82	18.11	19.09	21.86	9.07	9.07
33	12.25	12.45	14.69	5.76	5.75	83	18.22	19.20	21.96	9.12	9.12
34	12.50	12.63	14.87	5.85	5.83	84	18.33	19.30	22.05	9.18	9.18
35	12.75	12.82	15.06	5.93	5.92	85	18.44	19.41	22.15	9.23	9.23
36	13.00	13.00	15.24	6.01	6.00	86	18.56	19.51	22.24	9.29	9.29
37	13.11	13.18	15.42	6.10	6.08	87	18.67	19.61	22.33	9.34	9.34
38	13.22	13.36	15.60	6.18	6.16	88	18.78	19.72	22.43	9.39	9.39
39	13.33	13.53	15.78	6.26	6.25	89	18.89	19.82	22.52	9.45	9.45
40	13.44	13.70	15.96	6.34	6.32	90	19.00	19.92	22.61	9.50	9.50
41	13.55	13.87	16.14	6.42	6.40	91	19.11	20.02	22.70	9.55	9.55
42	13.66	14.04	16.32	6.49	6.48	92	19.22	20.12	22.80	9.60	9.60
43	13.77	14.20	16.49	6.57	6.56	93	19.33	20.22	22.89	9.66	9.66
44	13.89	14.36	16.67	6.64	6.63	94	19.45	20.32	22.98	9.71	9.71
45	14.00	14.52	16.84	6.72	6.71	95	19.56	20.42	23.07	9.76	9.76
46	14.11	14.68	17.02	6.79	6.78	96	19.67	20.52	23.16	9.81	9.81
47	14.22	14.83	17.19	6.87	6.86	97	19.78	20.62	23.26	9.86	9.86
48	14.33	14.98	17.36	6.94	6.93	98	19.89	20.72	23.35	9.91	9.91
49	14.44	15.13	17.54	7.01	7.00	99	20.00	20.82	23.44	9.96	9.96
50	14.55	15.27	17.71	7.08	7.07	100	20.11	20.92	23.53	10.01	10.01

$\alpha$	سیستم ۱	سیستم ۲	سیستم ۳	سیستم ۴	سیستم ۵	$\alpha$	سیستم ۱	سیستم ۲	سیستم ۳	سیستم ۴	سیستم ۵
100	20.11	20.92	23.53	10.01	10.01	150	25.37	25.51	27.94	12.27	12.27
101	20.22	21.02	23.62	10.06	10.06	151	25.43	25.60	28.02	12.31	12.31
102	20.34	21.12	23.71	10.11	10.11	152	25.49	25.68	28.11	12.35	12.35
103	20.45	21.21	23.80	10.16	10.16	153	25.55	25.77	28.19	12.39	12.39
104	20.56	21.31	23.89	10.21	10.21	154	25.62	25.85	28.28	12.43	12.43
105	20.67	21.41	23.98	10.26	10.26	155	25.68	25.93	28.36	12.47	12.47
106	20.78	21.51	24.07	10.31	10.31	156	25.74	26.02	28.45	12.51	12.51
107	20.89	21.60	24.17	10.36	10.36	157	25.80	26.10	28.53	12.55	12.55
108	21.00	21.70	24.26	10.41	10.41	158	25.87	26.18	28.62	12.59	12.59
109	21.11	21.80	24.35	10.46	10.45	159	25.93	26.27	28.70	12.63	12.63
110	21.22	21.89	24.44	10.50	10.50	160	25.99	26.35	28.79	12.67	12.67
111	21.34	21.99	24.53	10.55	10.55	161	26.05	26.43	28.87	12.71	12.71
112	21.45	22.08	24.62	10.60	10.60	162	26.12	26.51	28.96	12.75	12.75
113	21.56	22.18	24.70	10.65	10.64	163	26.18	26.59	29.04	12.79	12.79
114	21.67	22.27	24.79	10.69	10.69	164	26.24	26.67	29.12	12.83	12.83
115	21.78	22.37	24.88	10.74	10.74	165	26.31	26.75	29.21	12.87	12.87
116	21.89	22.46	24.97	10.79	10.79	166	26.37	26.83	29.29	12.91	12.90
117	22.00	22.56	25.06	10.83	10.83	167	26.43	26.91	29.37	12.94	12.94
118	22.11	22.65	25.15	10.88	10.88	168	26.49	26.99	29.46	12.98	12.98
119	22.23	22.74	25.24	10.92	10.92	169	26.56	27.07	29.54	13.02	13.02
120	22.34	22.84	25.33	10.97	10.97	170	26.62	27.15	29.62	13.06	13.06
121	22.45	22.93	25.42	11.02	11.02	171	26.68	27.23	29.71	13.10	13.10
122	22.56	23.02	25.51	11.06	11.06	172	26.74	27.31	29.79	13.14	13.14
123	22.67	23.11	25.59	11.11	11.11	173	26.81	27.39	29.87	13.17	13.17
124	22.78	23.21	25.68	11.15	11.15	174	26.87	27.46	29.95	13.21	13.21
125	22.89	23.30	25.77	11.20	11.20	175	26.93	27.54	30.04	13.25	13.25
126	23.00	23.39	25.86	11.24	11.24	176	26.99	27.62	30.12	13.29	13.29
127	23.11	23.48	25.95	11.29	11.29	177	27.06	27.70	30.20	13.33	13.33
128	23.23	23.57	26.03	11.33	11.33	178	27.12	27.77	30.28	13.36	13.36
129	23.34	23.66	26.12	11.37	11.37	179	27.18	27.85	30.37	13.40	13.40
130	23.45	23.76	26.21	11.42	11.42	180	27.24	27.92	30.45	13.44	13.44
131	23.56	23.85	26.30	11.46	11.46	181	27.31	28.00	30.53	13.48	13.48
132	23.67	23.94	26.39	11.51	11.51	182	27.37	28.07	30.61	13.51	13.51
133	23.78	24.03	26.47	11.55	11.55	183	27.43	28.15	30.69	13.55	13.55
134	23.89	24.12	26.56	11.59	11.59	184	27.49	28.22	30.77	13.59	13.59
135	24.00	24.21	26.65	11.64	11.64	185	27.56	28.30	30.85	13.62	13.62
136	24.12	24.29	26.73	11.68	11.68	186	27.62	28.37	30.94	13.66	13.66
137	24.23	24.38	26.82	11.72	11.72	187	27.68	28.45	31.02	13.70	13.70
138	24.34	24.47	26.91	11.77	11.76	188	27.74	28.52	31.10	13.73	13.73
139	24.45	24.56	26.99	11.81	11.81	189	27.81	28.59	31.18	13.77	13.77
140	24.56	24.65	27.08	11.85	11.85	190	27.87	28.67	31.26	13.81	13.81
141	24.67	24.74	27.17	11.89	11.89	191	27.93	28.74	31.34	13.84	13.84
142	24.78	24.82	27.25	11.93	11.93	192	27.99	28.81	31.42	13.88	13.88
143	24.89	24.91	27.34	11.98	11.98	193	28.06	28.88	31.50	13.92	13.92
144	24.99	25.00	27.43	12.02	12.02	194	28.12	28.95	31.58	13.95	13.95
145	25.05	25.08	27.51	12.06	12.06	195	28.18	29.03	31.66	13.99	13.99
146	25.12	25.17	27.60	12.10	12.10	196	28.25	29.10	31.74	14.02	14.02
147	25.18	25.26	27.68	12.14	12.14	197	28.31	29.17	31.82	14.06	14.06
148	25.24	25.34	27.77	12.18	12.18	198	28.37	29.24	31.90	14.10	14.10
149	25.30	25.43	27.85	12.23	12.22	199	28.43	29.31	31.98	14.13	14.13
150	25.37	25.51	27.94	12.27	12.27	200	28.50	29.38	32.06	14.17	14.17

## ۷- نتیجه گیری

در این تحقیق، ستون‌های الاستیک متکی بر بستر الاستیک با شرایط تکیه‌گاهی متفاوت، توسط میله‌های صلب دو سر مفصل مدل‌سازی گردید. سختی خمشی ستون‌ها توسط فرم‌های پیچشی مدل‌سازی شده است و سختی بستر الاستیک نیز بوسیله فرم‌هایی طولی

مدل گردیده است. بعد از بدست آوردن ضریب سختی فنرهای پیچشی، مقادیر بار بحرانی پنج سیستم به ازای سختی‌های نسبی مختلف بستر بدست آورده شد و نتیجه به صورت نمودارهایی ارائه گردید که نتایج بدست آمده به صورت زیر قابل بیان می‌باشد:

۱- با انجام مقایسه بین نمودار سیستم ۱ و نمودار متناظر در مرجع [2] می‌توان مشاهده کرد که تطابق کاملی بین این دو نمودار وجود دارد، که این امر نشان دهنده صحت محاسبات انجام شده می‌باشد.

۲- معادلاتی ریاضی برای نمودارهای سیستم‌های ۲ تا ۵ ارائه شده است که با استفاده از این معادلات، بار بحرانی این مدل سیستم‌ها قابل محاسبه است. با استفاده از این معادلات، بار بحرانی برای سیستم‌های ۲ تا ۵ با دقت قابل قبول مهندسی بدست می‌آید.

۳- با استفاده از معادلات بدست آمده برای سیستم‌های ۲ تا ۵، دیگر لزومی به محاسبات پیچیده برای محاسبه بار بحرانی این نوع سیستم‌ها وجود ندارد.

۴- مقادیر عددی بار بحرانی به ازای سختی نسبی  $\alpha$  از صفر تا ۲۰۰ با افزایش یکی یکی بطور کامل در جدول ۱۱ ارائه گردیده است که بدین ترتیب، محاسبه بار بحرانی سیستم‌های فوق‌الذکر بسیار آسان می‌گردد و این جدول می‌تواند منبع مناسبی جهت استفاده سایر پژوهشگران باشد.

## مراجع

- [1] Chen, W. F., Lui, E. M. (1987). Structural Stability: Theory and Implementation", Englewood New Jersey, PTR Prentice Hall, pp.2 &426.
- [2] Hetenyi, M., Beams on elastic Foundation. 8th printing, Ann Arbor.
- [3] Timoshenko, S. P., Gere, J. M., (1961). Theory of elastic stability. 2nd. Ed. New York, N. Y., McGraw-Hill, pp. 100-107.
- [4] West, H. H., Mafi, M. (1984). Eigenvalues for columns on elastic supports. J. Struct. Engrg, ASCE, Vol. 110, No. 6, pp. 1305-1320.
- [5] Razaqpur, D. G. (1986), Stiffness of beam-columns on elastic foundation with exact shape functions. Computers & Structures, Vol. 24, No.5, pp. 813-819.
- [6] Cheng, F. Y., Pantelides, C. P., (1988), Static Timoshenko Beam-Columns on Elastic Media. J. Struct. Engrg. ASCE, Vol. 114, No. 5, pp.1152-1172.
- [7] Wang, C-M., Xiang, Y., Kitipornchai, S., (1991). Buckling of restrained columns with shear deformation and axial shortening. J. of Engrg. Mech. ASCE, Vol. 117, No. 9, pp. (1973)-(1989).
- [8] Struthers, A., Jayaraman, G. (2010). Elastic stability of columns on partial elastic foundations under subtangential loading. J. of Sound and Vibration, Vol. 329, No. 18, pp. 3856-3865.
- [9] Morfidis, K. (2010). Vibration of Timoshenko beams on three-parameter elastic foundation. Computers & Structures, Vol. 88, No. 5-6, pp. 294-308.
- [10] Avramidis, I. E., Morfidis, K. (2006). Bending of beams on three-parameter elastic foundation. Int. J. Solids Struct., Vol. 43, pp. 357-375.
- [11] Onu, G. (2008). Finite Elements on Generalized Elastic Foundation in Timoshenko Beam Theory. J. of Engineering Mechanics-ASCE, Vol. 134, No.9, pp.763-776.
- [12] Aristizabal-Ochoa, J. D., K. (1994). Factor for Columns in any Type of Construction: Nonparadoxical Approach. J. Struct. Engrg. ASCE, Vol. 120, No.4, pp.1272-1290.
- [13] Areiza-Hurtado, M., Vega-Posada, C., Aristizabal-Ochoa, J. D., Second- (2005). Order Stiffness Matrix and Loading Vector of a Beam Column with Semirigid Connections on an Elastic Foundation... J. Engrg. Mech., ASCE, Vol. 131, No.7, pp.752-762.
- [14] Arboleda-Monsalve, L. G., Zapata-Medina, D. G. and Aristizabal-Ochoa, J. D., Timoshenko. (2008). beam-column with generalized end conditions on elastic foundation: Dynamic-stiffness matrix and load vector., Journal of Sound and Vibration, Vol. 310, pp.1057-1079.
- [15] Zapata-Medina, D. G. Arboleda-Monsalve, L. G. Aristizabal-Ochoa, J. D. (2010). Static Stability Formulas of a Weakened Timoshenko Column: Effects of Shear Deformations. J. of Engineering Mechanics-ASCE, Vol. 126, No. 12, pp.1-9.

[16] Aristizabal-Ochoa, J. D. (2013). Stability of slender columns on an elastic foundation with generalised end conditions. *Ingeniera e Investigacion*, Vol. 33, No. 3, pp. 34 - 40.