

شبیه‌سازی تأثیر مرزهای ناهمگن داخلی خطی و منحنی بر مسیر گسترش ترک در مود مرکب به کمک روش مجموعه تراز

عبدالغفور خادم‌الرسول^{*۱}

۱- استادیار، دانشکده مهندسی، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

چکیده

اثر متقابل گسترش ترک و مرزهای ناهمگن، یکی از موضوعات مورد توجه محققین و مهندسين است. اخیراً برای تحمیل ناپیوستگی‌ها به صورت ضمنی بر فضای حل مساله، روش اجزای محدود توسعه یافته بر مبنای روش ریاضی پیکره‌بندی واحد اجزای محدود، معرفی شده است. در این مطالعه با ترکیب روش اجزای محدود توسعه یافته و روش مجموعه تراز به بررسی اندرکنشی گسترش ترک پرداخته شده است. ترک‌های از پیش تعریف شده و مرزهای ناهمگن بدون مش‌بندی داخلی بر فضای حل تحمیل شده است. حفره، مرز نرم و سخت به شکل دایره و خط به عنوان مرزهای داخلی ناهمگن در نظر گرفته شده است. مقادیر فاکتور شدت تنش در مود مرکب از طریق انتگرال اندرکنش مبتنی بر پایه انتگرال مستقل از مسیر J ، محاسبه شده‌اند. در این مطالعه به کمک المان‌های مربعی به گسسته‌سازی ورق حاوی مرزهای داخلی ناپیوسته، پرداخته شده است. تأثیر اندازه، جنس و چگونگی توزیع مرزهای ناهمگن داخلی بر نحوه گسترش ترک با مثال‌های متعدد بررسی شده است. نتایج به دست آمده نشان دهنده تأثیرات متفاوت مسیر رشد ترک شامل دور یا نزدیک شدن ترک متحرک نسبت به مرز داخلی است. اثر حفره داخلی بر مسیر رشد ترک بیشتر از مابقی مرزها است و مرز داخلی خطی منجر به شکل‌گیری مسیر پیچیده‌ای از نحوه رشد ترک شده است. این نتایج مؤید قابلیت روش مجموعه تراز در تعقیب مرز متحرک می‌باشد.

کلمات کلیدی: اجزای محدود توسعه یافته، روش مجموعه تراز، مرز ناهمگن، گسترش ترک، انتگرال اندرکنش.

*نویسنده مسئول: عبدالغفور خادم‌الرسول
پست الکترونیکی: ag.khadem@scu.ac.ir

DOI: 10.22065/jsce.2017.67302.1001

شناسه دیجیتال

<http://dx.doi.org/10.22065/jsce.2017.67302.1001>

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۵/۰۸/۲۵، تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۶/۰۲/۲۳

۱- مقدمه

بطور کلی در مکانیک شکست محاسباتی، شبیه‌سازی اولیه انواع ناپیوستگی و تعقیب تغییرات آنها در خلال دوران بارگذاری همواره دو مشکل اساسی به حساب آمده است. در بسیاری از مسایل مهندسی سازه‌ها، وجود ابزاری ساده و دقیق جهت مطالعه سناریوهای رشد ترک یک نیاز ضروری می‌باشد. از طرف دیگر مدل‌سازی گسترش ترک در مود-مرکب برای مصالح ترد یا شبه‌ترد بر پایه مکانیک شکست، از دیرباز به‌عنوان یک حوزه تحقیقاتی فعال در تعیین رفتار ترک خوردگی، ظرفیت باربری یک عضو سازه‌ای و عمر سازه در معرض شکست مورد توجه محققین علوم عددی و مکانیک جامدات قرار داشته است. همچنین به‌منظور تولید انواع ناپیوستگی‌های داخلی تلاش‌های فراوانی صورت گرفته است. تمامی روش‌های ابداعی در حوزه مکانیک شکست محاسباتی تمایل داشته‌اند که مرزهای ناهمگن داخلی بر فضای حل مساله را با حداقل دستکاری در فضای فیزیکی، اعمال کنند. از این روی موضوعی که در علم مکانیک شکست محاسباتی حائز اهمیت فوق‌العاده است، امکان مدل‌سازی ناپیوستگی به‌صورت ضمنی و مستقل از شبکه فیزیکی است. مساله دیگری که مکانیک شکست محاسباتی با آن مواجه است، شبیه‌سازی گسترش ترک با حداقل تغییرات در شکل و توپولوژی شبکه گسسته‌سازی شده عددی اولیه است. با فراهم آوردن شرایطی که بتواند ناپیوستگی را به‌صورت ضمنی در مدل فیزیکی ایجاد نماید، پتانسیل شبیه‌سازی گسترش ترک نیز متعاقباً ایجاد می‌گردد [۱، ۲].

دو دلیل عمده باعث ناکارآمدی استفاده از روش اجزای محدود استاندارد، به‌عنوان روشی جهت شبیه‌سازی خودکار رشد ترک شده است. اولاً، برای این که تکینگی تنش در نوک ترک نشان داده شود؛ نیاز است که یک شبکه اجزای محدود ریز (حداقل در محدوده اطراف نوک ترک) اعمال گردد. ثانیاً، در روش اجزای محدود، گسترش ترک به‌وسیله جداسازی گره‌های قرار گرفته در مسیر ترک خوردگی، مدل‌سازی می‌شود. بنابراین به‌منظور به‌دست آوردن یک مسیر رشد ترک هموار باید از یک فرایند مش‌بندی مجدد پیچیده استفاده نمود. در این مطالعه برای تعقیب مرزهای متحرک، روش مجموعه تراز به‌کار گرفته شده است. به‌علاوه از ترکیب روش مجموعه تراز با روش اجزای محدود توسعه یافته، به شبیه‌سازی خودکار رشد انواع ترک پرداخته شده است [۳]. ناپیوستگی‌های تحمیل شده بر فضای حل عبارتند از ترک (به صورت لبه‌ای یا وسط)، حفره میانی با هر قطر و موقعیت دلخواه، مرز ناهمگن داخلی (اینکلوژن) نرم یا سخت و مرز خطی داخلی. به‌منظور شبیه‌سازی رشد ترک برنامه‌ای در محیط نرم افزار متلب توسط نویسنده مقاله تهیه شده است. این برنامه انواع ناپیوستگی‌ها را به‌طور همزمان در فضای حل ایجاد می‌کند. بنابراین مطالعه اندرکنش همزمان انواع ناپیوستگی‌ها بر رشد ترک انجام گرفته است.

در مطالعه حاضر ضمن تولید انواع مرزهای داخلی ناپیوسته از طریق فرایند غنی‌سازی نقاط گرهی، به میزان تأثیرگذاری مرزهای داخلی متفاوت از جمله حفره دایره‌ای، مرز داخلی نرم، مرز داخلی سخت و مرز ناهمگن خطی بر مسیر گسترش ترک لبه‌ای و وسط‌چین پرداخته شده است. به‌منظور تعیین مسیر رشد ترک باید مقادیر فاکتور شدت تنش در مود مرکب محاسبه گردد تا بتوان بر اساس معیار رشد ترک به محاسبه زاویه رشد ترک نسبت به نوک آن پرداخت. بنابراین به‌منظور محاسبه فاکتورهای شدت تنش از روش مبتنی بر پایه انرژی، انتگرال M (انتگرال اندرکنش)، استفاده شده است. فرایند محاسبه انتگرال اندرکنش به‌نحوی برنامه نویسی شده است تا در هر مرحله رشد ترک، به‌طور خودکار محدوده انتگرال‌گیری حول نوک ترک (دو نوک ترک برای ترک وسط) تعیین شده و سپس انتگرال اندرکنش در ناحیه معادل محاسبه گردد. ذکر این مساله حائز اهمیت است که با محاسبه انتگرال اندرکنش اثرات تغییر محتوای انرژی جسم ترک‌دار در حضور انواع ناپیوستگی‌های ناهمگن به صورت خودکار در محاسبه مقادیر فاکتور شدت تنش لحاظ گردیده است. همچنین جهت افزایش دقت در انتگرال‌گیری عددی حول نوک ترک، فرایند زیرمحلث‌سازی المان‌های مربعی متأثر از ترک در گد گنجانده شده است.

ساختار مقاله به‌این‌صورت سازمان‌دهی شده است که در بخش دوم اصول کلی حاکم بر روش مجموعه تراز بررسی گردیده است. در بخش سوم روش تولید حفره و مرز داخلی بیان شده است. در بخش چهارم اصول روش اجزای محدود توسعه یافته ارائه شده و در بخش پنجم اصول کلی مکانیک شکست بیان شده است. در بخش ششم نتایج آنالیز عددی ارائه و در بخش هفتم نتیجه‌گیری ارائه گردیده است.

۲- اصول روش مجموعه تراز

یکی از جنبه‌های مهم در مسایلی که با مرز ناپیوستگی Γ_d مواجه هستیم، دنبال کردن تغییرات آن مرز است. روش مجموعه تراز یک روش محاسباتی برای دنبال نمودن مرز متحرک به شمار می‌آید. در این روش به جای دنبال کردن خود مرز، یک منحنی پایه انتخاب و بر روی یک سطح ایجاد می‌گردد. مزایای دیگر این روش، انجام گرفتن محاسبات بر روی یک شبکه ثابت اولری است که به طور طبیعی تغییرات توپولوژی مربوط به مرز را کنترل نموده و به علاوه قابل کاربرد برای مسایل با ابعاد بالاتر نیز می‌باشد [۴]. در واقع روش تابع مجموعه تراز در ترکیب با روش اجزای محدود توسعه یافته به منظور نمایش مرز مصالح همانند هندسه ترک، فضای خالی و مرز نرم و سخت به کار گرفته می‌شود. در این مطالعه از تکنیک نوار محدود در محاسبات استفاده شده است. مزیت عمده این تکنیک محدود نمودن نقاط گرهی است که در فرایند محاسبات وارد می‌شوند. بنابراین حجم محاسبات در کل کاهش می‌یابد [۵].

تابع مجموعه تراز $\phi(x(t), t)$ یک تابع پیوسته است که $x(t)$ معرف یک نقطه در دامنه Ω است. ویژگی‌های تابع مجموعه تراز

به صورت

$$\begin{aligned} \phi(x(t), t) < 0 & \quad \Omega \ni x \\ \phi(x(t), t) > 0 & \quad \Omega \notin x \\ \phi(x(t), t) = 0 & \quad \Gamma_d \ni x \end{aligned} \quad (1)$$

می‌باشد. بنابراین مرز مورد نظر در هر زمان t ، با یافتن $x(t)$ به نحوی که معادله

$$\phi(x(t), t) = 0. \quad (2)$$

را اقلان نمایند جانمایی می‌شود. رابطه (۲) عموماً به عنوان معادله مجموعه تراز نامیده می‌شود. با مشتق‌گیری از این رابطه نسبت به زمان و با گسسته‌سازی معادله دیفرانسیل جزئی حاصل به کمک روش تفاضل محدود، گرادیان ϕ تقریب زده می‌شود. تابع ϕ در مسایل دو بعدی به صورت

$$\phi^{n+1} = \phi^n - \Delta t (u^n \phi_{,x}^n + v^n \phi_{,y}^n) \quad (3)$$

است، که u و v به ترتیب مولفه‌های x و y سرعت مرز متغیر می‌باشند. گام زمانی Δt بر اساس شرط کورنت-فردریچ-لوی (Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)) تعیین می‌گردد. به طور کلی دو تابع مجموعه تراز ϕ و ψ برای مدل‌سازی و دنبال کردن مسیر رشد ترک لازم می‌باشند. یکی از این توابع برای نمایش مسیر بدنه ترک و دیگری برای دنبال کردن مسیر نوک ترک است. در این شیوه، مسیر بدنه ترک با استفاده از تابع مجموعه تراز صفر $\psi(x(t), t)$ نمایش داده می‌شود. بنابراین ترک در موقعیتی است که شرایط

$$\begin{cases} \phi(x(t), t) \leq 0 \\ \psi(x(t), t) = 0 \\ \phi_i \psi_{,i} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

صادق باشد. الگوریتمی که در کُد در نظر گرفته شده است این امکان را فراهم آورده است تا تمامی فرایند تعیین نقاط گرهی که غنی‌سازی می‌بایست در خصوص آنها انجام پذیرد، بطور خودکار از طریق توابع مجموعه تراز انجام گیرد. بدین منظور ابتدا شعاع پهنای باند اطراف نوک ترک محاسبه می‌شود. پس از آن طول و به عبارتی فواصل نوک‌های ترک نسبت به یکدیگر به دست آورده می‌شود. از اطلاعات به دست آمده زاویه قرارگیری ترک در دامنه مشخص شده و بر اساس طول ترک و پهنای باند که خود تابع اندازه المان است، شعاع مربوط به جستجوی گرهی به منظور تعریف توابع مجموعه تراز مشخص می‌گردد. سپس، فاصله همه نقاط دامنه نسبت به نوک ترک تعیین و نسبت به مختصات نوک ترک محلی می‌گردند. با داشتن بردار فاصله نقاط نسبت به نوک ترک، جستجوی مربوط به تعیین نقاط گرهی واقع در شعاع

تعیین شده انجام می‌پذیرد. پس از آن گره‌هایی که در شعاع تعریف شده قرار گرفته‌اند تعیین شده و به محاسبه توابع مجموعه تراز پرداخته می‌شود. لازم به ذکر است که در روش به کار گرفته شده توابع مجموعه تراز تنها برای گره‌های واقع در شعاع پهنای باند محاسبه گردیده است. آن‌گاه به منظور تعیین شماره گره‌های مان‌هایی که در پهنای باند قرار گرفته‌اند، توابع مجموعه تراز گرهی غیر صفر پیدا شده و سپس شماره گره کلی منحصر به فرد منسوب به آن گره مشخص می‌شود. در این روش مقادیر توابع مجموعه تراز، فقط در نقاط ذخیره می‌شوند. بنابراین با استفاده از توابع شکل اجزای محدود، می‌توان مقادیر توابع مجموعه تراز را در شبکه اجزای محدود به دست آورد.

۳- تولید حفره و مرز داخلی (اینکلوژن)

به طور کلی مرزها (فضای خالی و اینکلوژن) به صورت استاتیکی بوده و از تئوری مجموعه تراز جهت نمایش آن‌ها استفاده خواهد شد. برای فضای خالی دایره‌ای از مجموعه تراز به صورت

$$\varphi_I = \min_{\substack{x_c^i \in \Omega_c^i \\ i=1,2,\dots,n_c}} \{ \|x_I - x_c^i\| - r_c^i \}, \quad (5)$$

استفاده شده است که Ω_c^i دامنه i امین فضای خالی، n_c تعداد فضاهای خالی دایره‌ای، x_c^i و r_c^i به ترتیب مرکز و شعاع دایره می‌باشند. توصیف هندسی یک مرز (مرز یک دایره یا اینکلوژن) از طریق منحنی مجموعه تراز صفر $\varphi \equiv \varphi(\mathbf{x}, t) = 0$ صورت می‌پذیرد. در واقع، توصیف فیزیکی مرز از طریق تابع $\varphi(\mathbf{x}, t)$ به یک نمایش تابعی گسسته، تبدیل می‌شود. درجات آزادی هندسی در یک مجموعه نقاط ثابت \mathbf{x}_I جهت تعیین φ و موقعیت مرز، استفاده می‌شوند. جهت محاسبه تابع φ در هر نقطه \mathbf{x} واقع در دامنه، از توابع درونیاب اجزای محدود

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_I N_I(\mathbf{x}) \varphi_I, \quad (6)$$

استفاده شده است [۲]. عمل جمع بر روی تمامی نقاط واقع در المان محتوی x صورت می‌گیرد، توابع شکل استاندارد اجزای محدود بوده و φ_I مقادیر گرهی تابع مجموعه تراز می‌باشند. انجام فرایند مدل‌سازی و محاسبات هندسی مربوط به حفره‌ها از طریق تابع مجموعه تراز φ انجام گرفته است. استفاده از روش مجموعه تراز امکان محاسبات با بازده مناسب را فراهم می‌آورد. به علاوه، شبکه اجزای محدود و هندسه داخلی با یکدیگر مرتبط بوده که در نتیجه آن یک نمایش سازگار برای مرزهای داخلی با شبکه اجزای محدود موجود، ایجاد می‌شود.

منظور از اینکلوژن، ناهمگنی با مشخصات متفاوت در ماتریس مصالح است. مدل‌سازی اینکلوژن نیاز به برقراری شرط هادامارد

$$\mathbf{F}^+ - \mathbf{F}^- = \mathbf{a} \otimes \mathbf{n}^+, \quad (7)$$

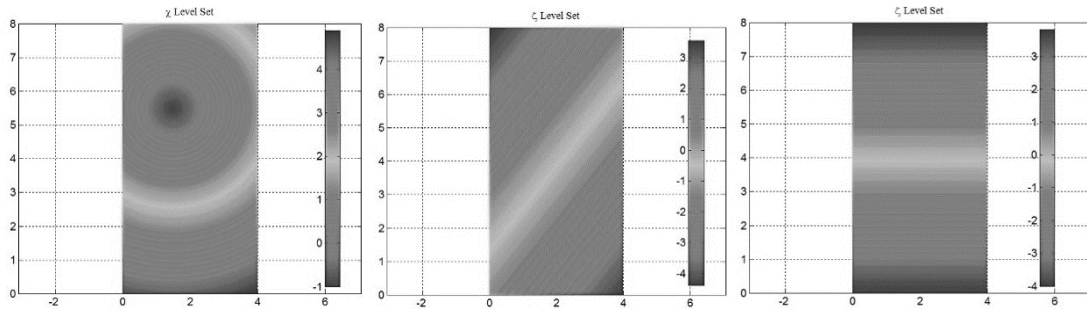
دارد که \mathbf{F} گرادیان تغییر شکل، \mathbf{n}^+ بردار نرمال بر مرز مصالح، \mathbf{a} یک بردار دلخواه درون صفحه است و \otimes علامت ضرب دایادیک یا ضرب تانسوری است. سوکومار اولین محقق بود که تلاش نمود تا مرز داخلی بین مصالح را از طریق فرایند غنی‌سازی در مدل هندسی ایجاد نماید. در شکل ۱ تابع مجموعه تراز مربوط به مرز داخلی خطی (اینکلوژن) و حفره داخلی که می‌تواند در هر نقطه دلخواه از دامنه قرار داشته باشد، نشان داده شده است.

به منظور تشکیل توابع مجموعه تراز خطی که تحت عنوان توابع φ نام‌گذاری گردیده‌اند، ابتدا دو نقطه تعیین کننده خط را مشخص نموده و ضمن محاسبه فاصله بین آن دو نقطه (طول خط)، فاصله تمامی نقاط موجود در دامنه از خط مفروض تعیین می‌گردد، سپس مقدار تابع φ برای تمام نقاط دامنه محاسبه می‌شود. ضمن انجام این فرایند شماره گرهی المان‌هایی که می‌بایست برای آن‌ها فرایند غنی‌سازی گرهی انجام گیرد، تعیین می‌شود تا اثرات وجود اینکلوژن در مرحله محاسبه ماتریس سختی کل دخالت داده شود.

اگر دو نقطه $P_1=(x_0, y_0)$ و $P_2=(x_1, y_1)$ دو نقطه اینکلوزن خطی باشند، آنگاه طول پاره خط مفروض برابر با $l = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$ می‌باشد. آنگاه فاصله هر نقطه (x, y) از دامنه با استفاده از

$$c = (y_0 - y_1) \times x + (x_1 - x_0) \times y + (x_0 \times y_1 - x_1 \times y_0) \quad (8)$$

محاسبه می‌شود. حال با داشتن دو مقدار طول و فاصله هر نقطه از پاره خط مفروض، مقادیر تابع مجموعه تراز از رابطه $\zeta(\text{node}) = c/l$ به دست می‌آید.



شکل ۱: نمایش توابع مجموعه تراز ζ (اینکلوزن خطی) افقی و مورب، تابع χ (حفره دایره‌ای) در دامنه محاسباتی.

۴- اصول کلی روش اجزای محدود توسعه یافته

به‌طور کلی روش اجزای محدود توسعه یافته بر پایه مفهوم پیکره‌بندی واحد در غنی‌سازی تقریب اجزای محدود استاندارد که در برگیرنده اثرات تکنیکی یا ناپیوستگی‌های دامنه اطراف یک ترک می‌باشد، استوار است. روش اجزای محدود توسعه یافته اولین بار توسط بلیچکو و بلک ارائه گردید [۹]. روش اجزای محدود توسعه یافته با استفاده از روش پیکره‌بندی واحد، به ناپیوستگی‌ها اجازه می‌دهد تا به صورت مستقل از شبکه اجزای محدود، نمایش داده شوند. در این روش هرگونه ناپیوستگی با هر زاویه‌ای مستقل از شبکه اجزای محدود با فرایند غنی‌سازی المان‌های قطع شده با ترک به‌وسیله توابع غنی‌سازی ارضا کننده رفتار ناپیوسته و درجات آزادی اضافی، مدل می‌شوند. در روش اجزای محدود توسعه یافته برای یافتن جابجایی نقطه X واقع در دامنه، از تقریب

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{i \in I} \mathbf{u}_i(t) N_i(\mathbf{x}) + \sum_{j \in J} \mathbf{b}_j(t) N_j(\mathbf{x}) H(\psi(\mathbf{x}, t)) + \sum_{k \in K} N_k(\mathbf{x}) \left(\sum_{l=1}^4 \mathbf{a}_k^l(t) B_l(r, \theta) \right) \quad (9)$$

استفاده می‌شود که $N_i(\mathbf{x})$ توابع شکل مربوط به گره i ام و t نیز زمان است. زمان در چنین مسائلی موید هر پارامتری است که بطور یکنواخت افزایش یابد. لذا تمامی مراحل حل در برگیرنده معادلات تعادل بدون لحاظ نمودن اثرات دینامیکی است. J و K به ترتیب نشان دهنده مجموعه نقاط گرهی هستند که بوسیله بدنه ترک و نوک ترک متأثر شده باشند. درجات آزادی گرهی متناظر جابجایی نیز شامل \mathbf{u}_i ، \mathbf{b}_j و \mathbf{a}_k می‌باشند. همچنین $H(\psi(\mathbf{x}, t))$ و $B_l(r, \theta)$ نیز توابع غنی‌سازی می‌باشند. تابع غنی‌سازی $H(y)$ به صورت

$$H(y) = \begin{cases} 1 & \text{for } y > 0 \\ -1 & \text{for } y < 0 \end{cases} \quad (10)$$

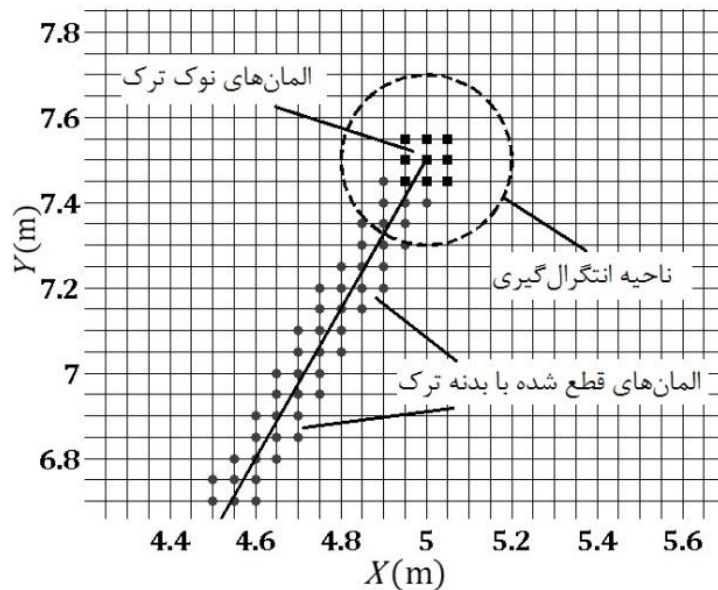
تعریف می‌شود. رابطه (۱۰) تضمین کننده حضور ناپیوستگی در موقعیت ترک است. تابع غنی‌سازی نوک ترک، B_l به صورت

$$B_l(r, \theta) = \left[\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right]. \quad (11)$$

تعریف می‌گردد که (r, θ) دستگاه سیستم مختصات قطبی نسبت به نوک ترک می‌باشد. جملات غیر خطی دوم تا چهارم سمت راست رابطه (۱۱) ارائه کننده حل مجانب برای نوک ترک بوده و جمله اول $(\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2})$ ناپیوستگی در عرض سطوح ترک را بیان می‌کند. با اعمال رابطه (۹) در رابطه معادله تعادل ضعیف شده در مساله الاستواستاتیک، دستگاه معادلات خطی به دست می‌آید.

$$\int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \varepsilon(\mathbf{v}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} d\Gamma \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{D}_0 \quad (12)$$

که در رابطه (۱۲)، C ، تانسور رفتار مصالح بوده و u و v فضای جابجایی‌ها می‌باشند که به ترتیب دارای مقادیر محاسباتی در دامنه و مقدار مشخص بر مرز دامنه هستند. بعلاوه مرتبه پیوستگی هر دو بردار C^0 و بر ناپیوستگی موجود در دامنه ناپیوسته می‌باشند. همچنین نشانه " " بمنزله ضرب تانسوری است. برای چنین توابع تقریبی که در رابطه (۱۲) ذکر شده است، شرایط بدون تنش بودن صفحات ترک تأمین خواهد شد. در شکل ۲ نحوه غنی‌سازی نقاط متأثر از نوک و بدنه ترک در خلال چند مرحله مدل‌سازی رشد ترک نشان داده شده است.



شکل ۲: چگونگی غنی‌سازی نقاط گرهی در مدل اجزای محدود توسعه یافته و ناحیه انترگرال گیری نوک ترک.

به طور کلی در خلال آنالیز رشد ترک می‌بایست یک فرایند تکرار شونده به کار گرفته شود. چنین فرایندی حجم بسیار زیادی از فضای کامپیوتر را اشغال نموده و زمان اجرای برنامه را بالا می‌برد. بنابراین به منظور تسریع در عملیات اجرای برنامه از یک زیربرنامه برای تفکیک ماتریس سختی به بخش‌های غنی‌شده، متأثر از ترک و غیر متأثر استفاده می‌شود تا نیازی به تغییر دادن تمامی ماتریس سختی در هر مرحله از رشد ترک نباشد. لذا در نتیجه زمان اجرای برنامه کاهش داده شده است. به عبارت دیگر تنها لازم است تا المان‌هایی که از طریق توابع غنی‌سازی نوک ترک دارای درجات آزادی اضافی شده‌اند را به غنی‌سازی هویساید تبدیل نمود تا در میزان محاسبات صرفه جویی گردد.

۵- مکانیک شکست

به طور کلی هدف از علم مکانیک شکست محاسباتی، تعیین فضای تنش و کرنش در جسم حاوی ناپیوستگی است. ضمن اطلاع از نحوه توزیع تنش در جسم می‌توان به تخمین عمر سازه و مشخص نمودن چگونگی آسیب وارده به سازه، در خلال دوران بهره برداری از آن پرداخت. در میان انواع محتمل شکست، شکست ترد فراوان‌ترین نوع خرابی سازه‌ها بوده است. ماهیت ناگهانی بودن شکست ترد این نوع از شکست را بیش از سایر حالات دارای اهمیت نموده است. محققین مختلف در خلال سال‌ها با استفاده از روش‌های مختلف تحلیلی، عددی و

آزمایشگاهی به مطالعه مکانیک شکست پرداخته‌اند. بطور کلی رفتار عضو دارای ناپیوستگی در مکانیک شکست خطی با یک پارامتر مانند فاکتور شدت تنش که با استفاده از روش‌های مستقیم و انرژی تعیین می‌شود مشخص می‌شود. این پارامتر نقش مهمی در تعیین میدان تنش، در همسایگی نوک ترک دارد. فاکتور شدت تنش دارای واحد $\text{MPa}\cdot\sqrt{\text{m}}$ بوده و به هر دو عامل تنش وارده در دوردست و هندسه دامنه و ترک بستگی دارد. مدل سازی رشد ترک در حالات پیچیده بارگذاری و هندسه، با شرایط مود مرکب مواجه خواهد بود. در چنین وضعیتی با اطلاع دقیق از مقادیر فاکتور شدت تنش در مود مرکب می‌توان مسیر رشد ترک را مشخص نمود. تحت شرایط عمومی بارگذاری مود مرکب، تنش‌های مجانب پیرامونی و برشی به صورت

$$\begin{cases} \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{cases} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{4} \begin{cases} 3\cos(\theta/2) + \cos(3\theta/2) \\ \sin(\theta/2) + \sin(3\theta/2) \end{cases} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{1}{4} \begin{cases} -3\sin(\theta/2) - 3\sin(3\theta/2) \\ \cos(\theta/2) + 3\cos(3\theta/2) \end{cases} \quad (13)$$

می‌باشند [۸]. در میان معیارهای رشد ترک که شامل (۱) معیار حداکثر نرخ رهایی انرژی، (۲) معیار حداکثر تنش مماسی یا حداکثر تنش اصلی و (۳) حداقل دانسیته انرژی کرنشی می‌باشند، در این مطالعه از معیار حداکثر تنش مماسی استفاده شده است. بر اساس معیار حداکثر تنش مماسی، ترک در زاویه θ_c نسبت به نوک آن و در جهتی که $\sigma_{\theta\theta}$ حداکثر باشد رشد خواهد کرد. تنش مماسی در جهت رشد ترک، تنش اصلی است. لذا بمنظور محاسبه زاویه رشد ترک، مقدار تنش برشی در رابطه (۱۳) برابر صفر قرار داده می‌شود. بنابراین

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\frac{1}{2} K_I \sin(\theta) + \frac{1}{2} K_{II} (3\cos(\theta) - 1) \right] = 0 \quad (14)$$

با حل معادله فوق زاویه بحرانی رشد ترک به صورت

$$\theta_c = 2 \arctan \frac{1}{4} (K_I/K_{II} \pm \sqrt{(K_I/K_{II})^2 + 8}) \quad (15)$$

بدست می‌آید.

۵-۱- محاسبه فاکتورهای شدت تنش

پارامتر فاکتور شدت تنش نیروی محرک ترک بوده و مقدار بحرانی آن که به‌عنوان ظرفیت شکست (چقرمگی) شناخته می‌شود، یک مشخصه ویژه مصالح است که به نوبه خود نیروی مقاوم در برابر گسترش ترک محسوب می‌گردد. در واقع برای اینکه بتوان در مکانیک شکست خطی از وضعیت تنش در نزدیکی نوک ترک و وضعیت تکینگی تنش‌ها اطلاعات کافی بدست آورد فاکتور شدت تنش تعریف شده است. یکی از روش‌هایی که در محاسبه فاکتورهای شدت تنش در مود مرکب بارگذاری وجود دارد، روش انتگرال اندرکنش می‌باشد. روش انتگرال اندرکنش اولین بار توسط یاو و همکارانش برای مسائل با مود مرکب در مصالح ایزوتروپیک معرفی گردید. انتگرال اندرکنش از انتگرال مستقل از مسیر J برای دو وضعیت ممکن از یک جسم الاستیک ترک‌دار به دست آورده شد. انتگرال J توسط رایس توسعه داده شد که به صورت

$$J = \int_{\Gamma} \left(W n_x - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) ds, \quad (16)$$

تعریف می‌شود. مسیر انتگرال‌گیری Γ ، $W = 1/2 \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$ بوده و به‌عنوان دانسیته انرژی کرنشی تعریف می‌شود. n_i بردار نرمال بیرونی بر مسیر انتگرال‌گیری، $T_i = \sigma_{ij} n_j$ بردار نیروهای گسترده، u_i بردار جابجایی و ds جزء دیفرانسیلی در امتداد مسیر انتگرال‌گیری می‌باشند. در روش انتگرال اندرکنش، یک فضای کمکی تعریف می‌شود و بر فضای اصلی مسأله تحمیل می‌گردد. فضای کمکی تنش و جابجایی‌ها به نحوی انتخاب می‌گردد که معادلات تعادل و شرایط مرزی مسأله بدون نیرو بر سطوح ترک را در دامنه معادل در انتگرال‌گیری عددی پیرامون ترک ارضا نماید. در واقع مزیت عمده روش انتگرال اندرکنش، محاسبه همزمان فاکتور شدت تنش برای مود مرکب بارگذاری است. در این مطالعه از معادلات کمکی تنش و جابجایی به دست آمده توسط ویلیامز و وسترگارد استفاده شده است. برای بیان فرمولاسیون

روش انتگرال اندرکنش بالانویس "۱" در جملات $u_i^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(1)}, \sigma_{ij}^{(1)}$ جهت نمایش وضعیت اصلی و بالانویس "۲" در جملات $u_i^{(2)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}, \sigma_{ij}^{(2)}$ برای نمایش وضعیت کمکی است. پس از تعریف فضای حل اصلی و کمکی، بر هم نهی آن‌ها انجام گرفته و سپس مقادیر فاکتور شدت تنش بر اساس رابطه بین انتگرال J و فاکتورهای شدت تنش به صورت

$$J_1^{(1,2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + M^{(1,2)}, \quad (17)$$

بدست می‌آید. که در رابطه (۱۷)

$$J^{(1)} = \int_{\Gamma} \left(W^{(1)} n_1 - T_i^{(1)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right) ds, \quad (18)$$

$$J^{(2)} = \int_{\Gamma} \left(W^{(2)} n_1 - T_i^{(2)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} \right) ds, \quad (19)$$

$$M^{(1,2)} = \int_{\Gamma} \left(W^{(1,2)} n_1 - T_i^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} - T_i^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right) ds, \quad (20)$$

می‌باشند. عبارت $W^{(1,2)} = \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)}$ تحت عنوان دانسیته انرژی کرنشی است. از آنجا که دو حالت ترک روی هم‌گذاری شده است، پس می‌توان آن‌ها را به صورت

$$J_1^{(1,2)} = \frac{(K_I^{(1)} + K_I^{(2)})^2}{E_{\text{eff}}} + \frac{(K_{II}^{(1)} + K_{II}^{(2)})^2}{E_{\text{eff}}}, \quad (21)$$

بازنویسی نمود. با مقداری محاسبات و جایگذاری در روابط فوق رابطه‌ای به صورت زیر بدست می‌آید.

$$M^{(1,2)} = \frac{2(K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)})}{E_{\text{eff}}}. \quad (22)$$

در انتها فاکتورهای شدت تنش، برای وضعیت تنش موجود با جداسازی دو مود شکست محاسبه شده است. برای مثال با قرار دادن $K_I^{(2)} = 1, K_{II}^{(2)} = 0$ مسأله برای به دست آوردن $K_I^{(1)}$ حل شده است. به طور مشابه $K_{II}^{(1)}$ نیز به دست آمده است.

$$K_I^{(1)} = \frac{M^{(1, \text{Mode I})} E_{\text{eff}}}{2}; K_{II}^{(1)} = \frac{M^{(1, \text{Mode II})} E_{\text{eff}}}{2}, \quad (23)$$

در روابط فوق برای حالت تنش صفحه‌ای $E_{\text{eff}} = E$ و در حالت کرنش صفحه‌ای $E_{\text{eff}} = E / (1 - \nu^2)$ می‌باشد. ν نسبت پواسون است.

رابطه (۲۰) برای انتگرال اندرکنش، انتگرال روی مسیر می‌باشد که به علت نتایج بهتر، دقیق‌تر و پایدارتر انتگرال روی سطح، عبارت انتگرالی روی مسیر به انتگرال روی سطح بازنویسی شده است. با تعریف تابع q_1 انتگرال اندرکنش بر روی سطح معادل به صورت

$$M^{(1,2)} = \int_A \left(\sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} - W^{(1,2)} \delta_{1j} \right) \frac{\partial q_1}{\partial x_j} dA, \quad (24)$$

تعریف می‌شود. که در رابطه (۲۴)، δ_{ij} دلتای کرونگر می‌باشد. محاسبه انتگرال اندرکنش در یک حلقه از المان‌ها که در اطراف نوک ترک قرار گرفته‌اند انجام می‌گیرد. المان‌های موجود در این حلقه مانند یک جسم صلب حرکت می‌کنند. برای تمامی المان‌های موجود در این حلقه مقدار تابع q_1 برابر واحد است لذا مشتق تابع q_1 نسبت به x_j صفر خواهد شد. از طرفی برای تمامی المان‌های خارج از حلقه مفروض مقدار تابع q_1 صفر بوده، پس مجدداً مشتق تابع q_1 صفر خواهد بود [۱۰].

۶- شبیه‌سازی عددی

در ابتدا به منظور صحت سنجی نتایج عددی ارائه شده به مقایسه مقادیر فاکتور شدت تنش محاسباتی و مقادیر تحلیلی متناظر با آنها پرداخته شده است. بدین منظور چندین مدل با ابعاد مشخص مختلف و حاوی ترک‌های لبه‌ای و میانی تولید شده و مقادیر فاکتورهای شدت تنش در مود مرکب محاسبه گردیده است. نتایج بدست آمده در جدول ۱ ارائه شده است.

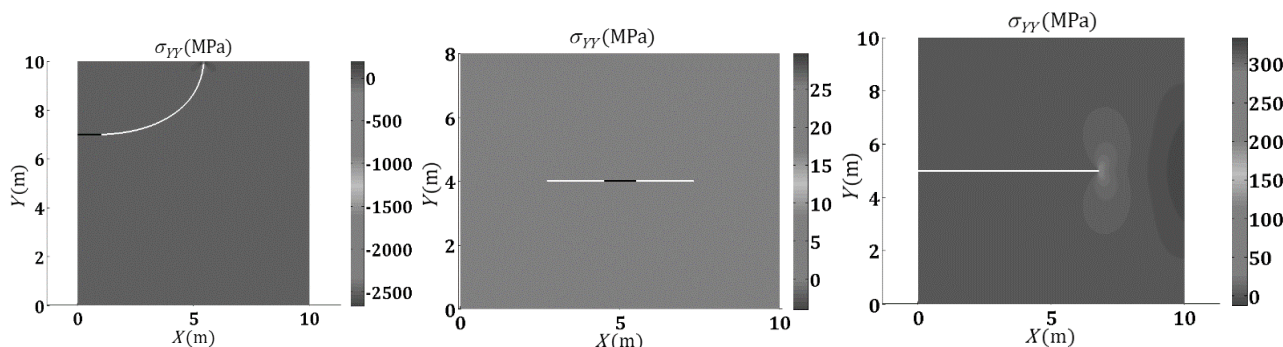
جدول ۱: مقادیر فاکتور شدت تنش محاسباتی

تشریح مدل	اندازه بعد المان مربعی	فاکتور شدت تنش تئوری-تجربی	فاکتور شدت تنش تنش عددی	درجات آزادی
ترک لبه‌ای	۰/۲	۱/۶۲۶۶	۱/۵۴۴۱	۱۰۴۴
ترک لبه‌ای	۰/۱	۱/۶۲۶۶	۱/۵۹۷۲	۳۸۶۲
ترک لبه‌ای	۰/۰۵	۱/۶۲۶۶	۱/۶۲۳۱	۱۴۸۵۲
ترک لبه‌ای	۰/۰۳۳	۱/۶۲۶۶	۱/۶۲۴۲	۳۳۰۴۲
ترک لبه‌ای	۰/۰۲۵	۱/۶۲۶۶	۱/۶۲۵۸	۵۸۴۳۲
ترک لبه‌ای	۰/۰۲	۱/۶۲۶۶	۱/۶۲۹۱	۹۱۰۲۲
ترک میانی	۰/۱	۰/۹۰۴۳	۰/۷۴۲۱	۳۸۸۴
ترک میانی	۰/۰۵	۰/۹۰۴۳	۰/۸۷۳۸	۱۴۹۲۰
ترک میانی	۰/۰۳۳	۰/۹۰۴۳	۰/۸۹۱۲	۳۳۰۶۴
ترک میانی	۰/۰۲۸	۰/۹۰۴۳	۰/۸۹۸۹	۴۴۸۶۰
ترک میانی	۰/۰۲	۰/۹۰۴۳	۰/۸۹۵۴	۹۱۰۴۴

انطباق مقادیر فاکتور شدت تنش محاسباتی و حل تئوری-تجربی دقیق، منجر به محاسبه زاویه رشد ترک تقریباً دقیق می‌شود. لازم به ذکر است که در خصوص ترک وسط چین مقادیر فاکتور شدت تنش به صورت متقارن برای هر دو نوک ترک موجود در دامنه بدست آمده است. همچنین بدلیل شرایط تقریباً مود خالص بازشدگی در مثال‌های ارائه شده، میزان فاکتور شدت تنش مود دوم (برشی درون صفحه) نزدیک به صفر محاسبه شده است.

در ابتدا و قبل از اینکه مثال‌های با حضور مرزهای داخلی نمایش داده شود، به منظور اثبات صحت نتایج ارائه شده به شبیه‌سازی چند مثال ساده و بدون حضور ناپیوستگی پرداخته خواهد شد. لذا شبیه‌سازی‌های انجام شده برای گسترش ترک لبه‌ای و وسط چین تحت کشش تک محوره مطابق شکل ۳ نمایش داده شده است.

همانگونه که در نتایج ارائه شده در شکل ۳ مشاهده می‌شود، گسترش ترک در ورق تحت کشش حاوی ترک لبه‌ای و میانی افقی بصورت کاملاً افقی بوده که نشان دهنده غالب بودن مود اول (بازشدگی) شکست است. اما در مدل سوم (سمت چپ) ترک لبه‌ای غیر وسط چین تحت کشش مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان داده است که نحوه رشد ترک به صورت ترکیبی از مود اول و دوم می‌باشد که غلبه بیشتر با مود دوم (برشی) است. بنابراین حرکت ترک بر یک مسیر منحنی و به سمت مرز هندسی نزدیک شکل گرفته است.



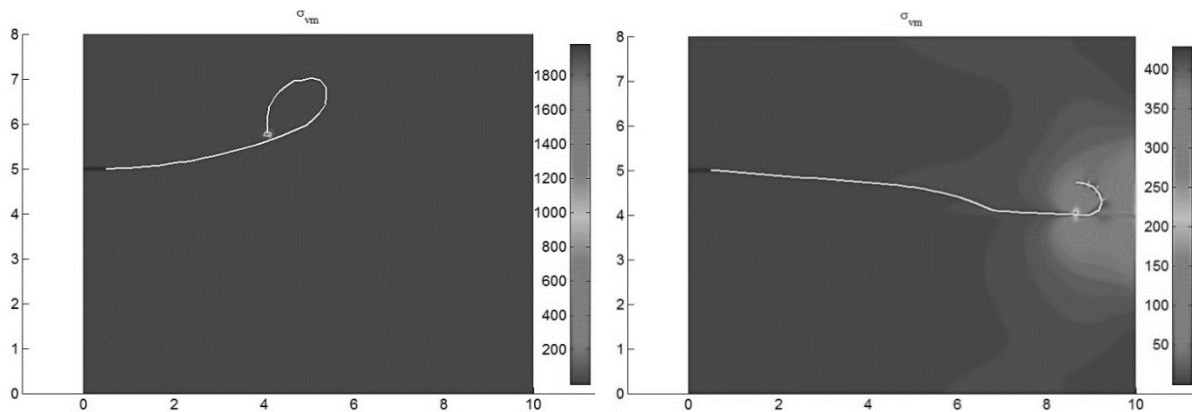
شکل ۳: شبیه‌سازی گسترش ترک لبه‌ای (وسط و غیر وسط) و ترک میانی تحت کشش تک محوره.

۶-۱- گسترش ترک لبه‌ای با حضور مرز داخلی خطی

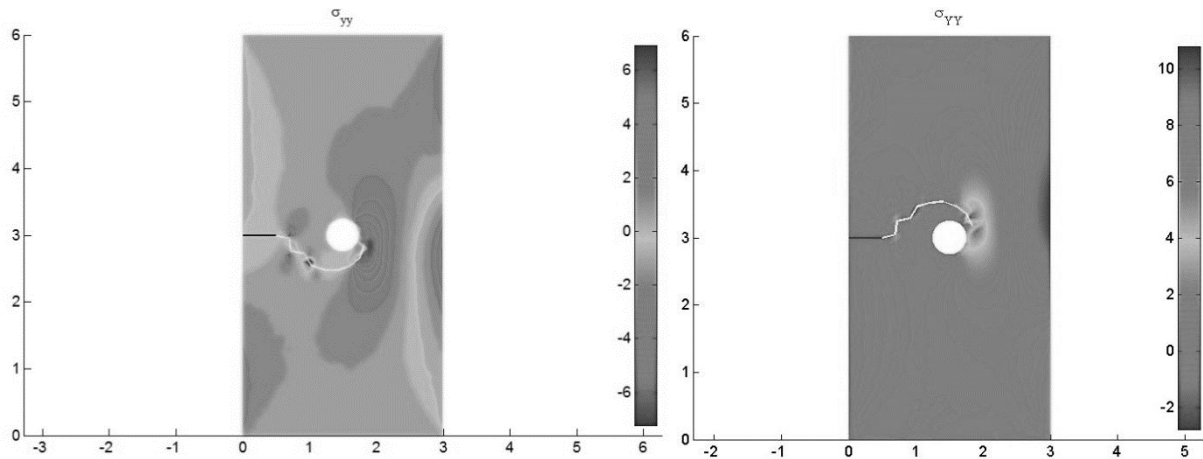
در این مثال دو حالت مرز خطی داخلی بصورت افقی و قائم در دامنه محاسباتی در نظر گرفته شده است. صفحه مورد نظر تحت کشش تک محوره می‌باشد. مرزهای داخلی خطی از طریق روش مجموعه تراز تولید و به صورت ضمنی بر فضای حل اجزای محدود تحمیل شده است. حضور مرز داخلی ناهمگن منجر به تغییر محتوای انرژی در نوک ترک شده و در نتیجه مسیر رشد ترک تحت تأثیر قرار می‌گیرد. در واقع مسیر رشد ترک بصورت ترکیبی از مود اول و دوم شکست شده است. اما آنچه در دست‌آوردها نیز مشاهده شده است، تمایل ترک به سمت مرز ناهمگن داخلی افقی است که با نزدیک شدن به آن، مسیر ترک دچار انحراف شده است. لازم به ذکر است که برخورد و ادامه مسیر حرکت ترک جزو ویژگی‌های روش مجموعه تراز است که این قابلیت به خوبی در این مسایل نشان داده شده است. نتایج در شکل ۴ نشان داده شده است. البته چون هر دو ترک لبه‌ای غیر میانی بوده‌اند، انتظار می‌رود که مسیر رشد ترک بصورت منحنی و به طرف مرز دامنه در قسمت فوقانی باشد (مطابق شکل ۳). حال آنکه مسیر رشد ترک با مرز داخلی افقی کاملاً خلاف انتظار است.

۶-۲- گسترش ترک لبه‌ای با حضور حفره میانی

در این مثال به شبیه‌سازی گسترش ترک لبه‌ای میانی با حضور یک حفره میانی پرداخته شده است. در این مثال که متشکل از دو بخش است، گسترش ترک لبه‌ای در اندرکنش با حفره میانی در شرایط بارگذاری مرکب (برش و کشش) مدل‌سازی شده و روند حرکت ترک مورد بررسی قرار گرفته است. این مثال برگرفته از مساله واقعی است که برخی مهندسان به منظور کنترل ترک در سازه‌ها، مبادرت به ایجاد حفره در مجاورت آن‌ها می‌نمایند. در این شبیه‌سازی عددی اثبات می‌گردد که نه تنها ایجاد حفره با فاصله از ترک مانع حرکت ترک نشده بلکه مسیر حرکت آن را در بارگذاری مرکب، پیچیده و غیر قابل انتظار نموده است. نتایج در شکل ۵ نشان داده شده است. بارگذاری بر روی ورق در حالت اول شامل کشش واحد و برش در جهت مثبت بر وجه Y و در حالت دوم کشش واحد و برش در جهت منفی بر وجه Y می‌باشد. آنچه که از نتایج ارائه شده در شکل ۵ واضح است، حرکت ترک لبه‌ای و دور زدن حفره میانی است. به عبارت دیگر حفره میانی با فاصله مفروض نمی‌تواند مانع حرکت ترک شده یا آن را به تله بیاندازد. از طرف دیگر نوع بارگذاری بر ورق در سازه به شدت نقش تعیین‌کننده در تحمیل مسیر رشد ترک ایفا خواهد نمود.



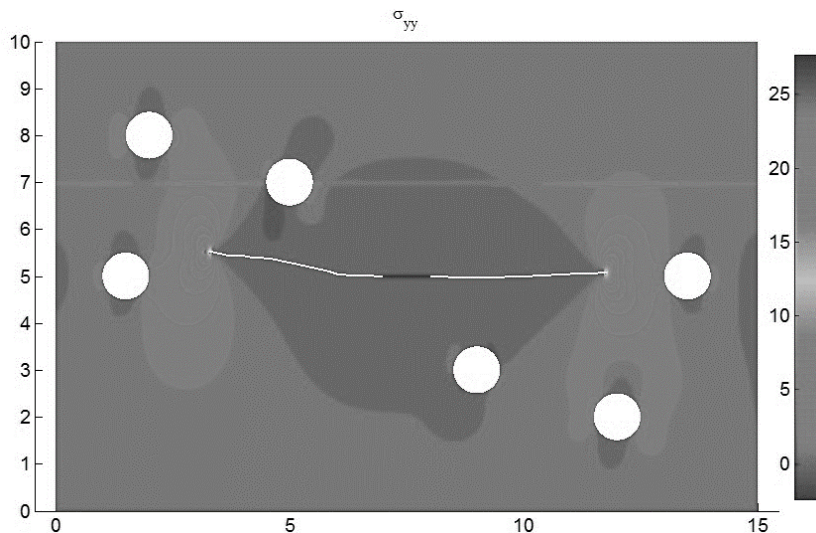
شکل ۴: شبیه‌سازی گسترش ترک لبه‌ای (شکل راست) مرز داخلی افقی (شکل چپ) مرز داخلی قائم.



شکل ۵: شبیه‌سازی رشد ترک لبه‌ای در اندرکنش با حفره میانی در بارگذاری مرکب؛ (راست) کشش و برش مثبت، (چپ) کشش و برش منفی.

۳-۶- گسترش ترک میانی با حضور چندین حفره و مرز داخلی خطی

در این مثال دامنه‌ای به ابعاد 10×15 که شامل یک ترک میانی، ۶ حفره و یک مرز داخلی خطی افقی در ارتفاع معادل ۷ مورد بررسی قرار داده شده است. نتیجه بدست آمده در حالت کشش تک محوره می‌باشد. عدم تقارن در مسیر رشد ترک بعلاوه شرایط مرزهای داخلی تحمیل شده بر مساله است. در سمت چپ شکل ۶ برای مسیر گسترش محاسبه شده حرکت ترک به سمت مرز داخلی خطی شدیدتر از بخش سمت راست شکل ۶ می‌باشد. در واقع عدم تقارن در هندسه و در نتیجه محتوای انرژی متفاوت در هر دو نوک ترک، مسیر حرکت ترک مختلف در دو جهت را به وجود آورده است.

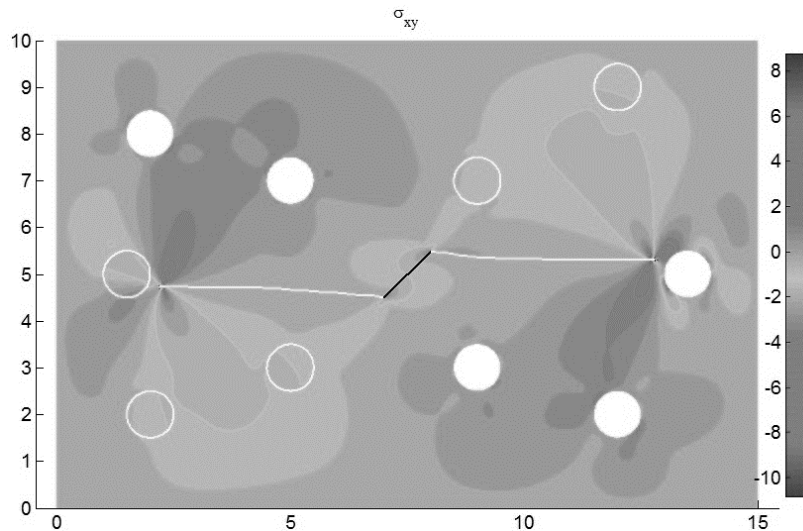


شکل ۶: مسیر رشد ترک میانی افقی با حضور حفرات داخلی و مرز داخلی خطی در ارتفاع معادل ۷.

۴-۶- گسترش ترک میانی مایل با حضور چندین حفره و اینلکوژن

در این مثال گسترش یک ترک میانی با زاویه 45° درجه نسبت به افق در کشش تک محوره مورد بررسی قرار گرفته است. در این مساله اندرکنش بین ترک میانی، ۵ حفره و ۵ اینلکوژن سخت بررسی می‌شود. مدل‌سازی تاثیر همزمان انواع مرزهای داخلی از جمله توانایی‌های روش ارائه شده در این مقاله است. در واقع محاسبه مقادیر فاکتورهای شدت تنش در مود مرکب بر اساس محتوای انرژی ورق ترک‌دار که خود متأثر از انواع ناپیوستگی‌های دیگر می‌باشد، یک مزیت برای شبیه‌سازی خودکار مسیر رشد ترک است. همچنین مطابق

انتظار مسیر رشد ترک به طرف مرزهای نرم منحرف شده و مرزهای داخلی سخت باعث دور راندن مسیر ترک شده است. نتایج در شکل ۷ نشان داده شده است.



شکل ۷: گسترش ترک میانی مایل در اندرکنش با حفره و مرز داخلی تحت کشش تک محوره.

مدل سازی انواع ناپیوستگی، از جمله ترک و دنبال نمودن مسیر حرکت آن به کمک روش مجموعه تراز در این مثال بخوبی نشان داده شده است. همچنین مسیر حرکت ترک میانی مایل تحت کشش به سمت مرزهای ناهمگن داخلی موجود در مساله است.

این نکته می بایست اشاره شود که در واقع یک حفره میانی در منحرف کردن مسیر رشد ترک مشابه یک اینکلوزن بسیار نرم عمل نموده است.

۷- نتیجه گیری

در این مطالعه ترکیب روش های مجموعه تراز و روش اجزای محدود توسعه یافته در مساله گسترش ترک بررسی شد. بدون مش بندی داخلی اضافی انواع مرزهای ناهمگن داخلی در فضای حل فیزیکی ایجاد گردید و تأثیر همزمان حضور انواع مرزهای داخلی بر مسیر رشد ترک بررسی شد. یک ویژگی منحصر به فرد در مطالعه حاضر به دست آوردن مسیرهای رشد ترک پیچیده در مسایل با رویکرد عملی بود و نشان داده شد که به طور کلی مسیر رشد ترک در حضور مرزهای داخلی نرم به سمت مرز، نزدیک و در مقابل از مرز سخت دور می شود. مشاهده گردید که مسیر رشد ترک در شرایط حفره داخلی همانند مرز بسیار نرم عمل کرده و منجر به جذب ترک به سمت خود می شود. در حالتی که بارگذاری به صورت مرکب در نظر گرفته می شود، خروج ترک از مسیر مود مرکب رخ داده و یک مسیر منحنی طی شد، به نحوی که منتهی به دور زدن حفره میانی گردید. مشاهده گردید که حضور مرز خطی داخلی تأثیر بسیار زیادی در تعیین مسیر رشد دارد و نهایتاً حرکت مسیر ترک به طرف مرز خطی است. نتایج نشان داد که ضمن کاربرد روش مجموعه تراز امکان برخورد مسیر ترک با مرز ناهمگن داخلی و تداوم رشد ترک وجود دارد. مسیر رشد ترک با استفاده از معیار حداکثر تنش مماسی به دست آمد که مؤید اطمینان پذیر بودن این روش در تعیین مسیر گسترش ترک است. محاسبه مقادیر فاکتورهای شدت تنش در مود مرکب با کمک روش انتگرال M منجر به کاهش حجم محاسبات در هر مرحله از رشد ترک شد. در نهایت یک برنامه کامپیوتری در محیط نرم افزار MATLAB نوشته شد که به کمک آن با انعطاف پذیری و قدرت بالا، انواع حالات مختلف در رشد ترک را می توان شبیه سازی نمود.

مراجع

- [1] Sukumar, N. Chopp, D L. Moran, B. (2003). Extended finite element method and fast marching method for three-dimensional fatigue crack propagation. *Engineering Fracture Mechanics*, 70(1), 29-48.
- [2] Sukumar, N. Chopp, D L. Moës, N. Belytschko, T. (2001). Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(46-47), 6183-6200.
- [3] Naderi, R. Khademalrasoul, A. (2015). Fully Automatic Crack Propagation Modeling in Interaction with Void and Inclusion without Remeshing. *Modares Mechanical Engineering*, 15(7), 261-273.
- [4] Adalsteinsson, D. Sethian, J A. (1995). A Fast Level Set Method for Propagating Interfaces. *Journal of Computational Physics*, 118(2), 269-277.
- [5] Osher, S. and Fedkiw, R. (2003). *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. Springer.
- [6] Bordas, S. Nguyen, P V. Dunant, C. Guidoum, A. Nguyen-Dang, H. (2007). An extended finite element library. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 71(6), 703-732.
- [7] Moës, N. Belytschko, T. (2002). Extended finite element method for cohesive crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*, 69(7), 813-833.
- [8] Gdoutos, E E. (2005). *Fracture Mechanics: An Introduction*. Springer.
- [9] Belytschko, T. Black, T. (1999). Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45(5), 601-620.
- [10] Banks-Sills, L. Hershkovitz, I. Wawrzynek, P A. Eliaşi, R. Ingraffea, A R. (2005). Methods for calculating stress intensity factors in anisotropic materials: Part I— $z=0$ is a symmetric plane. *Engineering Fracture Mechanics*, 72(15), 2328-2358.