

## Analysis of beams on elastic foundations by finite element method and new modified elements

Zohreh Sarchahi<sup>1</sup>, Seyed Mojtaba Hozhabrossadati<sup>2\*</sup>

1- Master of Science, Faculty of Engineering, Toos Institute of Higher Education, Mashhad, Iran

2- Assistant Professor, Faculty of Engineering, Toos Institute of Higher Education, Mashhad, Iran

### ABSTRACT

There are various methods for analyzing various types of structures, among which the finite element method can be mentioned as one of the most widely used numerical methods in civil engineering. This research deals with the analysis of beams with various boundary conditions on an elastic Winkler foundation. For this purpose, three new bending elements are proposed by the authors for the first time. These elements, unlike the conventional element with two-node and four degrees of freedom that is common in the analysis of these structures, all have six degrees of freedom and have two, three, and four nodes, respectively. After introducing the governing boundary value problem, all three proposed elements are formulated, and their interpolating functions and stiffness matrices will be calculated. A valuable feature of these three elements is the lack of need for meshing and, as a result, the use of the assembly technique to find the total stiffness matrix. Considering the power of the proposed elements, the problem will be solved by using only one element. Three numerical examples are examined to study the efficiency of these elements and the deflection, slope, bending moment and shear force values of beams at specific points are compared using the conventional element, the three proposed elements and the exact solution. The results indicate that all three proposed elements have excellent accuracy in calculating deflection, but the first proposed element shows better accuracy in calculating internal forces. Therefore, the use of these components will significantly reduce the computational cost in structural analysis.

### ARTICLE INFO

**Receive Date:** 27 July 2025

**Revise Date:** 01 November 2025

**Accept Date:** 14 November 2025

### Keywords:

Beam

Elastic Foundation

Finite Element Method

Modified Elements

Computational Cost

All rights reserved to Iranian Society of Structural Engineering.

doi: 10.22065/jsce.2025.537407.3782

\*Corresponding author: Seyed Mojtaba Hozhabrossadati

Email address: hozhabrossadati@toos.ac.ir

## واکاوی تیر بر بستر کشسان به روش اجزاء محدود با کمک جزءهای بهبود یافته

زهرة سرچاهی<sup>۱</sup>، سیدمجتبی هژبرالساداتی<sup>۲\*</sup>

۱- کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی، موسسه آموزش عالی توس، مشهد، ایران

۲- استادیار، دانشکده مهندسی، موسسه آموزش عالی توس، مشهد، ایران

### چکیده

روش‌های گوناگونی برای تحلیل انواع سازه‌ها وجود دارد که در میان این روش‌ها، روش اجزاء محدود یکی از پرکاربردترین روش‌های عددی در مهندسی عمران است. این پژوهش به تحلیل تیرهای با شرایط مرزی گوناگون بر بستر کشسان وینکلر می‌پردازد. برای این منظور، سه جزء خمشی جدید برای نخستین بار توسط نویسندگان پیشنهاد می‌شود. این جزءها، برخلاف جزء دو گرهی با چهار درجه آزادی که در تحلیل این نوع سازه‌ها رایج است، همه دارای شش درجه آزادی بوده و به ترتیب دو، سه و چهار گرهی می‌باشند. برای تحلیل مسأله، از تئوری اویلر - برنولی برای الگوسازی رفتار تیر استفاده می‌شود. پس از معرفی مسأله مقدار مرزی حاکم، هر سه جزء پیشنهادی رابطه‌سازی شده، توابع درونیاب و ماتریس‌های سختی آنها محاسبه خواهند شد. یکی از ویژگی‌های این سه جزء، عدم نیاز به شبکه‌بندی و در نتیجه استفاده از تکنیک سوار کردن برای یافتن ماتریس سختی کل می‌باشد. با توجه به قدرت جزءهای پیشنهادی، مسأله تنها با بکارگیری یک جزء حل خواهد شد. سه مثال عددی جهت مطالعه کارایی این جزءها بررسی می‌گردد و مقادیر خیز، شیب، لنگر و برش تیرها در نقاط خاص با استفاده از جزء معمولی، سه جزء پیشنهادی و پاسخ دقیق مقایسه می‌شوند. نتایج حاکی از دقت بسیار عالی هر سه جزء پیشنهادی در محاسبه خیز بوده اما جزء پیشنهادی اول در محاسبه نیروهای داخلی دقت بهتری از خود نشان می‌دهد. بنابراین، استفاده از این اجزاء سبب کاهش چشمگیر هزینه محاسباتی در تحلیل سازه خواهد شد.

کلمات کلیدی: تیر، بستر کشسان، روش اجزاء محدود، جزءهای بهبود یافته، کاهش هزینه محاسباتی

شناسه دیجیتال:		سابقه مقاله:				
doi:	10.22065/jsce.2025.537407.3782	چاپ	انتشار آنلاین	پذیرش	بازنگری	دریافت
	10.22065/jsce.2025.537407.3782	۱۴۰۵/۰۴/۳۱	۱۴۰۴/۰۸/۲۳	۱۴۰۴/۰۸/۲۳	۱۴۰۴/۰۸/۱۰	۱۴۰۴/۰۵/۰۵
سیدمجتبی هژبرالساداتی hozhabrossadati@toos.ac.ir			*نویسنده مسئول: پست الکترونیکی:			

## ۱- مقدمه

کاربردهای فراوان و اهمیت تیرهای خمشی در مهندسی عمران بر کسی پوشیده نیست. بنا به شرایط متفاوت فیزیکی، سازه‌ای و بارگذاری، لازم است تیرها با تکیه‌گاه‌های متنوعی مورد استفاده قرار گیرند که مستلزم تحلیل صحیح آن‌ها می‌باشد. در برخی موارد، تحلیل تیر بدون در نظر گرفتن بستری که زیر آن قرار دارد تقریبی بوده و پاسخ دارای خطا خواهد بود. ریل‌های راه‌آهن، روسازی راه‌ها و بزرگراه‌ها، پی ساختمان‌ها و مانند اینها را می‌توان در دسته سازه‌های بر بستر کشسان جای داد. از آنجایی که جنس بستر موارد یاد شده خاک است و خاک محیطی غیرخطی، ناهمگن و ناهمسان با رفتار پیچیده است، لذا پژوهشگران و مهندسين سازه و ژئوتکنیک، همواره به دنبال استفاده از مدل‌هایی ساده و در عین حال دقیق برای مدل‌سازی رفتار خاک هستند. یکی از رایج‌ترین روش‌های مدل‌سازی، استفاده از تئوری فنرهای کشسان وینکلر<sup>۱</sup> است که خاک را مجموعه‌ای از فنرهای مجزا و بدون تاثیر برهم در نظر می‌گیرد. افزون بر این، تغییر مکان نقطه اثر بار متناسب با بار اعمال شده فرض شده است. در این تئوری، فنرهای مستقل بیانگر سختی بستر هستند که هم در فشار و هم در کشش عمل می‌کنند. این تئوری علی‌رغم سادگی آن، برای تغییر شکل تیر بر بستر کشسان، منجر به نتایج رضایت‌بخشی می‌شود. با این حال به علت ناپیوستگی میدان تغییر مکان، نتایج آن برای بارگذاری‌های سطحی، چندان رضایت‌بخش نبوده است.

پژوهش‌های زیادی به منظور تحلیل تیر بر بستر کشسان، با توجه به اهمیت و کاربرد فراوان آن، صورت گرفته است. ذاکری و همکاران در سال ۱۳۹۱ برای تحلیل و طراحی خطوط ریلی، با در نظر گرفتن وزن مرده ریل و تراورس با کمک مدل سای-وستمن با حذف فنرهای کششی به اصلاح مدل وینکلر پرداختند [۱]. پس از رابطه‌سازی و تشکیل معادلات دیفرانسیل تغییرشکل تیر، حل ریاضی آن‌ها به شکل بسته صورت گرفت. همچنین تلاش شد با استخراج نمودارهای بدون بعد، آنالیز حساسیت سختی بستر و نوع پروفیل ریل و بار چرخ و وسائط نقلیه ریلی در مقابل طول بلندشدگی خط صورت گیرد. افزون بر این، با حل معادلات و رسم نمودار خیز ریل در حالت اصلاح شده برای یک نمونه موردی، مشاهده شد که طول ناحیه بلندشدگی خط ریلی نسبت به حالتی که فنرها هم در کشش و هم در فشار کار می‌کنند (وینکلر) بیشتر خواهد بود. همچنین مقدار خیز منفی یعنی ارتفاع بلند شده خط در حالت اصلاح شده بیشتر می‌باشد. در پژوهشی دیگر، روشن‌بخش و نوآئی‌نیا، به حل دقیق ارتعاش آزاد تیر مستطیلی همگن و همسانگرد، بر بستر کشسان در صفحه تحتانی پرداختند [۲]. برای مدل‌سازی اندرکنش تیر با بستر در سطح تماس، مدل دو پارامتری پاسترناک را انتخاب کردند. معادلات را بر اساس تئوری دو بعدی ارتجاعی، فرمول‌بندی کرده و به روش جداسازی متغیرها و اعمال دقیق شرایط مرزی حل نمودند. روش به کار رفته در پژوهش آنها، بدون فرضیات ساده‌کننده متداول در تحلیل تیرها و بدون ایجاد محدودیت، در انتخاب ضخامت تیر بوده است؛ به طوری که برای نسبت‌های مختلف ضخامت به طول تیر، دارای اعتبار می‌باشد. یافته‌ها حاکی از آن است که با افزایش ضرایب بستر، بسامد طبیعی تیر نیز افزایش می‌یابد.

کارکن و کارکن ارتعاشات آزاد تیر تیموشنکو بر بستر الاستیک را با استفاده از روش اجزاء محدود مورد مطالعه قرار دادند [۳]. این پژوهشگران از یک المان دو گرهی تیموشنکو برای مدل‌سازی تیر استفاده کرده که هر گره در این المان دارای یک درجه آزادی دورانی و یک درجه آزادی انتقالی بود. توابع درونیاب برای جابجایی و دوران تیر به طور صریح با استفاده از انرژی کل تیر و کمینه ساختن آن نسبت به کرنش برشی بدست آمدند. خاک به صورت دو پارامتری شامل لایه‌ای از فنرهای وینکلر و یک لایه برشی بر روی آن مدل‌سازی شده بود. سپس، با استفاده از توابع درونیاب، ماتریس‌های سختی تیر و شالوده، و نیز ماتریس‌های جرم آن‌ها معرفی گردیدند. در نهایت بعد از انجام چندین آزمایش عددی، کارایی بالا و دقت المان پیشنهادی، نشان داده شد. ژانگ و همکاران پاسخ یک تیر بی‌نهایت متکی بر یک بستر الاستیک خطی را با اصلاح مدل وینکلر و مدل غیرکششی بررسی کردند [۴]. این پژوهشگران یک مدل بستر الاستیک خطی که رفتارهای مختلف بستر الاستیک را در مناطق کششی و فشاری با دو مدول بستر مختلف توصیف می‌کند، پیشنهاد داده و یک روش محاسباتی ساده را رابطه‌سازی نمودند. با کمک مدل بستر الاستیک خطی، یک روش کلی‌تر برای مدل‌سازی یک بستر الاستیک ارائه شد که می‌تواند پاسخ تیر تحت حرکت قطارهای با سرعت بالا را با دقت ارائه کند. در پژوهشی دیگر، بابار و ساهو به تحلیل خمش، کمانش و

<sup>1</sup> Winkler

ارتعاش آزاد تیرهای مسلح شده با نانوکربن بر بستر پاسترناک پرداختند [۵]. رابطه‌سازی مسأله به کمک اصل همپلتون صورت پذیرفت و پاسخ مسأله با استفاده از روش ناویر در دسترس قرار گرفت. پرویاتی و همکاران از روش اجزاء محدود برای تحلیل تیر بر بستر کشسان با در نظر گرفتن مسأله تماس استفاده نمودند [۶]. رابطه سازی بکار رفته در این پژوهش بر پایه جزء خمشی دو گرهی چهار درجه آزادی صورت پذیرفت و ماتریس سختی تیر در حالت‌های گوناگون بدست آمد. چند مثال عددی نشان دهنده دقت شیوه پیشنهادی بود. در پژوهشی دیگر، چن و همکاران از نگره لوینسون برای واکاوی ارتعاش آزاد و کمانش تیرهای مدفون در بسترهای وینکلر و پاسترناک بهره جستند [۷]. پس از استخراج معادله دیفرانسیل حاکم، روش ماتریس سختی دینامیکی برای حل مسأله بکار رفت و معادله مشخصه تیر بدست آمد. این معادله به کمک الگوریتم ویتریک - ویلیامز حل گردید و مقادیر ویژه سازه در دسترس قرار گرفتند. باید آگاه بود، لامپری پیندا و همکاران در یک مطالعه مروری جامع، به بررسی پژوهش‌های موجود درباره نگره‌های گوناگون و راه‌حل‌های متفاوتی که برای مسأله تیر بر بستر کشسان در مهندسی راه‌آهن بکار می‌روند، پرداختند [۸]. شایان توجه است، پژوهش دیگری هم به تحلیل تیرها بر بستر کشسان پرداخته‌اند که علاقمندان می‌توانند به آنها مراجعه نمایند [۹-۱۳].

روش‌های متعددی نیز برای تحلیل تیرها وجود دارد، اما در پاره‌ای مواقع به علت پیچیدگی‌های زیاد مسأله، امکان تحلیل دقیق وجود ندارد. از این رو استفاده از روش‌های عددی و غیردقیق، مانند روش اجزاء محدود، امری اجتناب‌ناپذیر است. روش عددی اجزاء محدود با تقسیم سازه به جزء‌های تحلیل‌شدنی و استفاده از اصل سوار کردن، پاسخ‌های مسأله را با حل یک دستگاه ماتریسی در دسترس قرار می‌دهد. ذکر این نکته ضروری است که در نظر گرفتن المان مناسب در کاهش میزان خطا و افزایش دقت و رسیدن به پاسخ دقیق‌تر بسیار حائز اهمیت است. لذا در این مقاله هدف بر آنست که با معرفی چند المان جدید با تعداد گره‌ها و درجات آزادی متفاوت نسبت به پژوهش‌های گذشته، مسأله تیر بر بستر کشسان تنها با بهره‌جویی از یک جزء حل شود. این امر سبب حذف مرحله سوار کردن شده و باعث کاهش هزینه محاسباتی و افزایش دقت پاسخ مسأله خواهد شد. شایان توجه است، هر سه جزء پیشنهادی دارای شش درجه آزادی بوده و می‌توان به مقایسه پاسخ‌های برآمده از آنها اقدام نمود. به منظور راستی‌آزمایی پاسخ‌های پیشنهادی، یافته‌ها با نتایج موجود مقایسه شده و گزارش خواهد شد.

## ۲- تعریف مسأله

در این بخش، به معرفی مسأله مقدار مرزی حاکم بر تیر بر بستر کشسان که در شکل ۱ نشان داده شده است، پرداخته می‌شود. معادله دیفرانسیل مورد مطالعه که یک معادله ناهمگن مرتبه چهار می‌باشد، را می‌توان به قرار زیر نوشت:

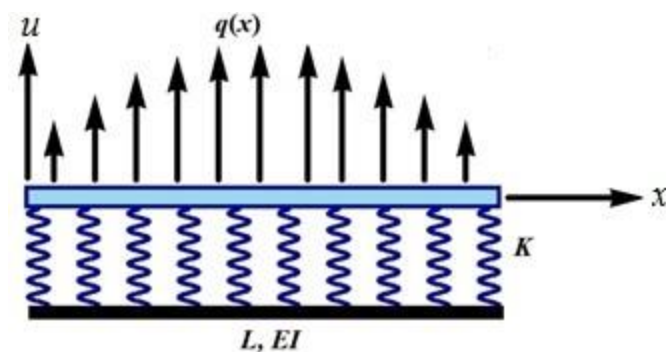
$$EIu'''' + Ku = q \quad (1)$$

که در آن،  $q$ ،  $EL$  و  $K$  به ترتیب تابع خیز، تابع بار اعمالی، صلبیت خمشی و ضریب بستر (مدول عکس‌العمل بستر) می‌باشند. در ضمن، هر علامت پرایم مشتق نسبت به متغیر مکان  $(x)$  را نشان می‌دهد. شایان توجه است، ضریب بستر را می‌توان از شیوه‌های گوناگونی مانند آزمایش تحکیم، آزمایش بارگذاری صفحه، آزمایش سه محوری، آزمایش ظرفیت باربری کالیفرنیا و نیز روابط تئوری و تجربی ارائه شده توسط پژوهشگران بدست آورد. به عنوان نمونه، ترازاقی روابط زیر را برای تعیین ضریب بستر پیشنهاد داده است:

$$K = K_p \frac{(B + B_p)^2}{2B} \quad \text{برای خاک‌های غیرچسبنده و دانه‌ای:}$$

$$K = K_p \frac{B_p}{B} \quad \text{برای خاک‌های چسبنده:}$$

در این روابط،  $B$  عرض بستر،  $B_p$  عرض صفحه مربوط به آزمایش بارگذاری صفحه،  $K_p$  ضریب بستر حاصل از آزمایش بارگذاری صفحه و  $K$  همان ضریب عکس‌العمل بستر کشسان است.



شکل ۱: سازه مورد مطالعه.

شرایط مرزی مورد بررسی در این پژوهش برای تیر به طول  $L$  به قرار زیر می‌باشند:  
تیر دو سر مفصل (صفر بودن خیز و لنگر در تکیه‌گاه مفصلی):

$$u(0) = u''(0) = u(L) = u''(L) = 0 \quad (2)$$

تیر یک سر گیردار - یک سر مفصل (صفر بودن خیز و شیب در تکیه‌گاه گیردار و صفر بودن خیز و لنگر در تکیه‌گاه مفصلی):

$$u(0) = u'(0) = u(L) = u''(L) = 0 \quad (3)$$

تیر کنسول (صفر بودن خیز و شیب در تکیه‌گاه گیردار و صفر بودن لنگر و برش در سر آزاد):

$$u(0) = u'(0) = u''(L) = u'''(L) = 0 \quad (4)$$

در ادامه، معادله (۱) به همراه شرط‌های مرزی آن به کمک راه‌کار اجزاء محدود حل می‌شود.

### ۳- رابطه‌سازی مسأله

برای حل مسأله به روش اجزاء محدود، ابتدا شکل ضعیف مسأله با ضرب تابع وزن  $w$  در طرفین معادله (۱) و انتگرال‌گیری از آن به شرح ذیل بدست می‌آید:

$$\int_0^L w (Elu'''' + Ku) dx = \int_0^L w q dx \quad (5)$$

در این پژوهش از روش اجزاء محدود گالرکین استفاده شده است. در این شیوه، تابع وزن برابر با توابع درونیاب (توابع شکل) اختیار می‌شوند که سبب متقارن شدن ماتریس سختی می‌شود. با استفاده از تکنیک انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء، شکل ضعیف مسأله به قرار زیر بدست می‌آید:

$$[Elwu'''' - Elw'u'''] + EI \int_0^L w'' u'' dx + K \int_0^L w u dx = \int_0^L w q dx \quad (6)$$

به کمک بردار توابع درونیاب  $[N]$ ، می‌توان برابری‌های  $u(x) = [N][d]$  و  $w(x) = [N][W]$  را در معادله (۶) جایگزین کرد. در این روابط،  $[d]$  و  $[W]$  به ترتیب مقادیر گرهی تابع‌های  $u$  و  $w$  می‌باشند. شایان توجه است، به منظور رعایت اصول ریاضیات و ضرب ماتریس‌ها، به جای تابع  $w$  از تابع  $w^T$  استفاده خواهد شد. حاصل به قرار زیر خواهد بود:

$$[W]^T \{ [N]^T V - [N']^T M \} + EI [W]^T \int_0^L [N'']^T [N''] [d] dx + K [W]^T \int_0^L [N]^T [N] [d] dx = [W]^T \int_0^L [N]^T q dx \quad (7)$$

پس از حذف عبارت  $[W]^T$  از طرفین تساوی و ساده سازی می توان نوشت:

$$\int_0^L (EI [N'']^T [N''] + K [N]^T [N]) [d] dx = \int_0^L [N]^T q dx - ([N]^T V - [N']^T M) \quad (8)$$

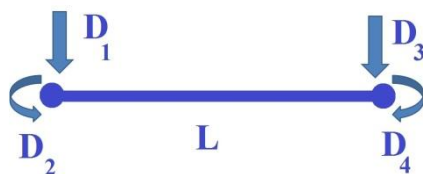
یا

$$[K] \{D\} = \{P\} - \{Q\} \quad (9)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} [K] &= \int_0^L (EI [N'']^T [N''] + K [N]^T [N]) dx \\ [P] &= \int_0^L [N]^T q dx \\ [Q] &= [N]^T V - [N']^T M \end{aligned} \quad (10)$$

در معادلات کنونی،  $[Q]$  و  $[P]$  بردارهای بار مرزی و خارجی بوده و  $[K]$  ماتریس سختی می باشد. افزون بر این،  $V$  مقدار برش مرزی،  $M$  مقدار لنگر در مرزها و  $[N]$  بردار توابع درون یاب هستند. خاطر نشان می سازد، ماتریس ها و بردارهای فوق، برای یک جزء بوده و در صورت استفاده از بیش از یک جزء، این ماتریس ها به کمک عملیات سوار کردن در رابطه (۹) بکار می روند. آن گونه که پیش از این بیان شد، در این پژوهش مسأله تنها به کمک یک جزء حل خواهد شد و نیازی به عملیات پیچیده سوار کردن نخواهد بود.



شکل ۲: المان معمولی دو گرهی با چهار درجه آزادی.

در محاسبات رایج روش اجزاء محدود، از جزء دو گرهی با چهار درجه آزادی مطابق شکل (۲) برای تحلیل سازه استفاده می شود. درجات آزادی این جزء به طول  $L$  به قرار زیرند:

$$D_1 = u(0), D_2 = u'(0), D_3 = u(L), D_4 = u'(L) \quad (11)$$

با توجه به اینکه این جزء دارای چهار درجه آزادی است، می توان از یک تابع درجه سه کامل با چهار ثابت مجهول برای تابع  $u$  به قرار زیر استفاده نمود:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 = [1 \ x \ x^2 \ x^3] [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4]^T = [f(x)][\alpha] \quad (12)$$

در ادامه، چهار شرط مرزی موجود در رابطه (۱۱) را بر تابع  $u$  در برابری (۱۲) اعمال می شود. این کار منجر به دستگاه ماتریسی زیر خواهد شد:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{pmatrix} \rightarrow [G][\alpha] = [d] \quad (13)$$

بنابراین بردار ضرایب  $[\alpha]$  را می توان از عبارت  $[\alpha] = [G]^{-1}[d]$  یافت. با جایگزینی آن در معادله (۱۲) می توان نوشت:

$$u = [f(x)][\alpha] = [f(x)][G]^{-1}[d] = [N][d] \quad (14)$$

که در آن  $[N] = [f(x)][G]^{-1}$  بردار توابع شکل یا توابع درونیاب می باشد. پس از معکوس کردن ماتریس  $[G]$  و انجام ضرب ماتریسی، توابع درونیاب این جزء به شکل زیر قابل نوشتن هستند:

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \\ N_2 &= x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ N_3 &= \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \\ N_4 &= -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{aligned} \quad (15)$$

حال با در دست داشتن توابع درونیاب، می توان ماتریس سختی را برای این المان با استفاده از معادله (۱۰) به قرار زیر بدست

آورد:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} + 0.37142KL & \frac{6EI}{L^2} + 0.052381KL^2 & -\frac{12EI}{L^3} + 0.12857KL & \frac{6EI}{L^2} - 0.030952KL^2 \\ \frac{6EI}{L^2} + 0.05238KL^2 & \frac{4EI}{L} + 0.009523KL^3 & -\frac{6EI}{L^2} + 0.03095KL^2 & \frac{2EI}{L} - 0.00714KL^2 \\ -\frac{12EI}{L^3} + 0.12857KL & -\frac{6EI}{L^2} + 0.03095KL^2 & \frac{12EI}{L^3} + 0.37142KL & -\frac{6EI}{L^2} - 0.05238KL^2 \\ \frac{6EI}{L^2} - 0.030952KL^2 & \frac{2EI}{L} - 0.00714KL^3 & -\frac{6EI}{L^2} - 0.05238KL^2 & \frac{4EI}{L} + 0.009523KL^3 \end{bmatrix} \quad (16)$$

افزون بر این، بردار بار خارجی برای بار گسترده یکنواخت از رابطه آن در معادله (۱۰) به صورت زیر در دسترس قرار می گیرد:

$$[P] = \int_0^L [N]^T q dx = q \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \\ x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \\ -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} -\frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \\ -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \end{bmatrix} \quad (17)$$

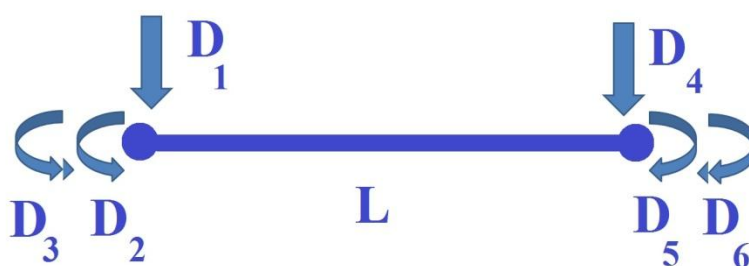
خاطر نشان می سازد، این جزء خطای چشمگیری در محاسبه نیروهای داخلی دارد و نیاز است تا تیر به اجزاء زیادی تقسیم بندی شود تا به پاسخ مطلوب دست یافت. در بخش بعد، سه المان پیشنهادی با درجات آزادی بیشتر برای بهبود دقت و کاهش نیاز به مش بندی معرفی می شوند.

## ۴- جزءهای پیشنهادی

به منظور بهبود رفتار جزء معمولی که در بخش گذشته بررسی شد، در ادامه، سه جزء پیشرفته‌تر برای حل واکاوی تیر بر بستر کشسان معرفی خواهد شد.

## ۴-۱ جزء پیشنهادی یکم

این جزء دو گره در ابتدا و انتهای خود داشته و در هر گره دارای ۳ درجه آزادی شامل خیز، شیب و انحنا می‌باشد که در نهایت المانی با ۶ درجه آزادی در دسترس خواهد بود. این جزء در شکل ۳ به نمایش در آمده است. همان گونه که ملاحظه می‌شود، انجنا به عنوان یک درجه آزادی جدید به هر گره این جزء اضافه شده است. با توجه به رابطه مستقیم انحنا و لنگر، این کار می‌تواند سبب افزایش چشمگیر دقت حل در محاسبه لنگر و برش شود.



شکل ۳: المان پیشنهادی یکم.

درجات آزادی این جزء به قرار زیر می‌باشد:

$$D_1 = u(0), D_2 = u'(0), D_3 = u''(0), D_4 = u(L), D_5 = u'(L), D_6 = u''(L) \quad (18)$$

توابع درونیاب مربوطه به شکل زیر هستند:

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{10x^3}{L^3} + \frac{15x^4}{L^4} - \frac{6x^5}{L^5} \\ N_2 &= x - \frac{6x^3}{L^2} + \frac{8x^4}{L^3} - \frac{3x^5}{L^4} \\ N_3 &= \frac{x^2}{2} - \frac{3x^3}{2L} + \frac{3x^4}{2L^2} - \frac{x^5}{2L^3} \\ N_4 &= \frac{10x^3}{L^3} - \frac{15x^4}{L^4} + \frac{6x^5}{L^5} \\ N_5 &= -\frac{4x^3}{L^2} + \frac{7x^4}{L^3} - \frac{3x^5}{L^4} \\ N_6 &= \frac{x^3}{2L} - \frac{x^4}{L^2} + \frac{x^5}{2L^3} \end{aligned} \quad (19)$$

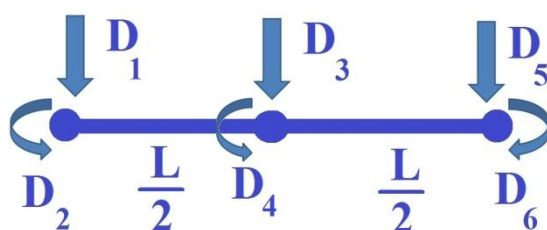
بنابراین، ماتریس سختی و بردار بار خارجی جزء تحت بار گسترده یکنواخت با استفاده از توابع فوق به شرح زیر بدست می‌آیند:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{17.14285 EI}{L^3} + 0.39177 KL & \frac{8.57142 EI}{L^2} + 0.067316 KL^2 & \frac{0.42857 EI}{L} + 0.00506 KL^3 & -\frac{17.14285 EI}{L^3} + 0.10822 KL & \frac{8.57142 EI}{L^2} - 0.03268 KL^2 & -\frac{0.42857 EI}{L} + 0.00326 KL^3 \\ \frac{8.57142 EI}{L^2} + 0.06731 KL^2 & \frac{5.48571 EI}{L} + 0.01500 KL^3 & 0.31428 EI + 0.00124 KL^4 & -\frac{8.57142 EI}{L^2} + 0.03268 KL^2 & \frac{3.08571 EI}{L} - 0.00959 KL^3 & -0.11428 EI + 0.00093 KL^4 \\ \frac{0.42857 EI}{L} + 0.00506 KL^3 & 0.31428 EI + 0.00124 KL^4 & 0.08571 EI L + 0.00010 KL^5 & -\frac{0.42857 EI}{L} + 0.00326 KL^3 & 0.11428 EI - 0.00093 KL^4 & 0.01428 EI L + 0.00009 KL^5 \\ -\frac{17.14285 EI}{L^3} + 0.10822 KL & -\frac{8.57142 EI}{L^2} + 0.03268 KL^2 & -\frac{0.42857 EI}{L} + 0.00326 KL^3 & \frac{17.14285 EI}{L^3} + 0.39177 KL & -\frac{8.57142 EI}{L^2} - 0.06731 KL^2 & \frac{0.42857 EI}{L} + 0.00506 KL^3 \\ \frac{8.57142 EI}{L^2} - 0.03268 KL^2 & \frac{3.08571 EI}{L} - 0.00959 KL^3 & 0.11428 EI - 0.00093 KL^4 & -\frac{8.57142 EI}{L^2} - 0.06731 KL^2 & \frac{5.48571 EI}{L} + 0.01500 KL^3 & -0.31428 EI - 0.00124 KL^4 \\ -\frac{0.42857 EI}{L} + 0.00326 KL^3 & -0.11428 EI + 0.00093 KL^4 & 0.01428 EI L + 0.00009 KL^5 & \frac{0.42857 EI}{L} + 0.00506 KL^3 & -0.31428 EI - 0.00124 KL^4 & 0.08571 EI L + 0.00010 KL^5 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$[P] = \begin{pmatrix} -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{10} \\ \frac{qL^3}{120} \\ -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{10} \\ \frac{qL^3}{120} \end{pmatrix} \quad (21)$$

#### ۴-۲ جزء پیشنهادی دوم

این جزء با ۳ گره در ابتدا، انتها و وسط و ۶ درجه آزادی مطابق شکل ۴ پیشنهاد شده به طوری که در هر گره شامل دو درجه آزادی خیز و شیب می‌باشد. افزودن گره میانی سبب بهبود توزیع خمش در طول تیر خواهد شد و پاسخ‌های برآمده از این جزء دقیق‌تری از جزء معمولی خواهد داشت. درجات آزادی جزء به قرار زیر تعریف می‌شوند:



شکل ۴: المان پیشنهادی دوم.

$$D_1 = u(0), D_2 = u'(0), D_3 = u(L/2), D_4 = u'(L/2), D_5 = u(L), D_6 = u'(L) \quad (22)$$

توابع درون‌یاب این جزء به صورت زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= 1 - \frac{23x^2}{L^2} + \frac{66x^3}{L^3} - \frac{68x^4}{L^4} + \frac{24x^5}{L^5} \\
 N_2 &= x - \frac{6x^2}{L} + \frac{13x^3}{L^2} - \frac{12x^4}{L^3} + \frac{4x^5}{L^4} \\
 N_3 &= \frac{16x^2}{L^2} - \frac{32x^3}{L^3} + \frac{16x^4}{L^4} \\
 N_4 &= -\frac{8x^2}{L} + \frac{32x^3}{L^2} - \frac{40x^4}{L^3} + \frac{16x^5}{L^4} \\
 N_5 &= \frac{7x^2}{L^2} - \frac{34x^3}{L^3} + \frac{52x^4}{L^4} - \frac{24x^5}{L^5} \\
 N_6 &= -\frac{x^2}{L} + \frac{5x^3}{L^2} - \frac{8x^4}{L^3} + \frac{4x^5}{L^4}
 \end{aligned} \tag{23}$$

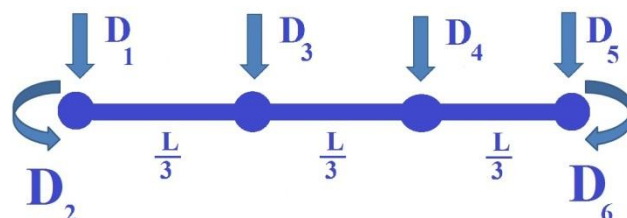
بدین ترتیب ماتریس‌های سختی و بار خارجی جزء تحت بار گسترده یکنواخت با استفاده از توابع درون‌یاب کنونی به شرح زیر در دسترس قرار می‌گیرند:

$$[K] = \begin{bmatrix}
 \frac{145.48571 EI}{L^3} + 0.15093 KL & \frac{32.51428 EI}{L^2} + 0.00822 KL^2 & -\frac{102.400000 EI}{L^3} + 0.06349 KL & \frac{54.85714 EI}{L^2} - 0.01154 KL^2 & -\frac{43.08571 EI}{L^3} + 0.018903 KL & \frac{6.91428 EI}{L^2} - 0.00209 KL^2 \\
 \frac{32.51428 EI}{L^2} + 0.00822 KL^2 & \frac{9.48571 EI}{L} + 0.00057 KL^3 & -\frac{25.600000 EI}{L^2} + 0.00634 KL^2 & \frac{9.14285 EI}{L} - 0.00086 KL^3 & -\frac{6.91428 EI}{L^2} + 0.00209 KL^2 & \frac{1.08571 EI}{L} - 0.00021 KL^3 \\
 -\frac{102.400000 EI}{L^3} + 0.0634 KL & -\frac{25.600000 EI}{L^2} + 0.00634 KL^2 & \frac{204.800000 EI}{L^3} + 0.40634 KL & 0 & -\frac{102.399999 EI}{L^3} + 0.06349 KL & \frac{25.599999 EI}{L^2} - 0.006349 KL^2 \\
 \frac{54.85714 EI}{L^2} - 0.01154 KL^2 & \frac{9.14285 EI}{L} - 0.00086 KL^3 & 0 & \frac{36.57142 EI}{L} + 0.00923 KL^3 & -\frac{54.85714 EI}{L^2} + 0.01154 KL^2 & \frac{9.14285 EI}{L} - 0.00086 KL^3 \\
 -\frac{43.08571 EI}{L^3} + 0.01890 KL & -\frac{6.91428 EI}{L^2} + 0.00209 KL^2 & -\frac{102.399999 EI}{L^3} + 0.06349 KL & -\frac{54.85714 EI}{L^2} + 0.01154 KL^2 & \frac{145.48571 EI}{L^3} + 0.15093 KL & -\frac{32.51428 EI}{L^2} - 0.00822 KL^2 \\
 \frac{6.91428 EI}{L^2} - 0.00209 KL^2 & \frac{1.08571 EI}{L} - 0.00021 KL^3 & \frac{25.599999 EI}{L^2} - 0.00634 KL^2 & \frac{9.14285 EI}{L} - 0.00086 KL^3 & -\frac{32.51428 EI}{L^2} - 0.00822 KL^2 & \frac{9.48571 EI}{L} + 0.00057 KL^3
 \end{bmatrix} \tag{24}$$

$$[P] = \begin{pmatrix}
 -\frac{qL}{2} \\
 \frac{qL^2}{10} \\
 \frac{qL^3}{120} \\
 -\frac{qL}{2} \\
 \frac{qL^2}{10} \\
 -\frac{qL^3}{120}
 \end{pmatrix} \tag{25}$$

۳-۴ جزء پیشنهادی سوم

این جزء دارای ۴ گره است که دو گره در ابتدا و انتها و دو گره در فاصله یک سوم و دو سوم از ابتدای المان می باشد. موقعیت گره ها و درجات آزادی این جزء در شکل ۵ نمایش داده شده است. افزودن دو گره میانی سبب بهبود تابع خیز تیر می شود. شایان توجه است، مشابه این جزء پیش از این برای تحلیل تیرهای نانو بکار رفته است.



شکل ۵: جزء پیشنهادی سوم.

درجات آزادی این جزء در رابطه بعدی قابل مشاهده است:

$$D_1 = u(0), D_2 = u'(0), D_3 = u\left(\frac{L}{3}\right), D_4 = u\left(\frac{2L}{3}\right), D_5 = u(L), D_6 = u'(L) \quad (26)$$

در ادامه، توابع درون یاب جزء پیشنهادی سوم به صورت زیر معرفی می شوند:

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{11x^2}{4L^2} + \frac{323x^3}{4L^3} - \frac{333x^4}{4L^4} + \frac{117x^5}{4L^5} \\ N_2 &= x - \frac{13x^2}{2L} + \frac{29x^3}{2L^2} - \frac{27x^4}{2L^3} + \frac{9x^5}{2L^4} \\ N_3 &= \frac{81x^2}{2L^2} - \frac{567x^3}{4L^3} + \frac{162x^4}{L^4} - \frac{243x^5}{4L^5} \\ N_4 &= -\frac{81x^2}{4L^2} + \frac{405x^3}{4L^3} - \frac{567x^4}{4L^4} \\ N_5 &= \frac{15x^2}{2L^2} - \frac{161x^3}{4L^3} + \frac{63x^4}{L^4} - \frac{117x^5}{4L^5} \\ N_6 &= -\frac{x^2}{L} + \frac{11x^3}{2L^2} - \frac{9x^4}{L^3} + \frac{9x^5}{2L^4} \end{aligned} \quad (27)$$

پس از انجام محاسبات لازم و با استفاده از توابع درون یاب، ماتریس سختی و بردار بار این جزء تحت بار گسترده یکنواخت مطابق

زیر در دسترس قرار می گیرند:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{216.23571}{L^3} EI + 0.13465 KL & \frac{43.02857}{L^2} EI + 0.00668 KL^2 & -\frac{335.86071}{L^3} EI + 0.03835 KL & \frac{171.83571}{L^3} EI - 0.02629 KL & -\frac{52.21071}{L^3} EI + 0.01578 KL & \frac{6.57857}{L^2} EI - 0.00165 KL^2 \\ \frac{43.02857}{L^2} EI + 0.00668 KL^2 & \frac{10.942857}{L} EI + 0.00043 KL^3 & -\frac{57.27857}{L^2} EI + 0.00219 KL^2 & \frac{20.82857}{L^2} EI - 0.00219 KL^2 & \frac{6.57857}{L^2} EI + 0.00165 KL^2 & \frac{0.842857}{L} EI - 0.00016 KL^3 \\ \frac{335.86071}{L^3} EI + 0.03835 KL & -\frac{57.27857}{L^2} EI + 0.00219 KL^2 & \frac{609.23571}{L^3} EI + 0.29586 KL & -\frac{445.21071}{L^3} EI + 0.02958 KL & \frac{171.83571}{L^3} EI - 0.02629 KL & -\frac{20.82857}{L^2} EI + 0.00219 KL^2 \\ \frac{171.83571}{L^3} EI - 0.02629 KL & \frac{20.82857}{L^2} EI - 0.00219 KL^2 & -\frac{445.21071}{L^3} EI + 0.02958 KL & \frac{609.23571}{L^3} EI + 0.29586 KL & -\frac{335.86071}{L^3} EI + 0.03835 KL & \frac{57.27857}{L^2} EI - 0.00219 KL^2 \\ \frac{52.21071}{L^3} EI + 0.01578 KL & -\frac{6.57857}{L^2} EI + 0.00165 KL^2 & \frac{171.83571}{L^3} EI - 0.02629 KL & -\frac{335.86071}{L^3} EI + 0.03835 KL & \frac{216.23571}{L^3} EI + 0.13465 KL & -\frac{43.02857}{L^2} EI - 0.00668 KL^2 \\ \frac{6.57857}{L^2} EI - 0.00165 KL^2 & \frac{0.842857}{L} EI - 0.00016 KL^3 & -\frac{20.82857}{L^2} EI + 0.00219 KL^2 & \frac{57.27857}{L^2} EI - 0.00219 KL^2 & -\frac{43.02857}{L^2} EI - 0.00668 KL^2 & \frac{10.942857}{L} EI + 0.00043 KL^3 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$[P] = \begin{pmatrix} \frac{13qL}{80} \\ \frac{qL^2}{120} \\ \frac{27qL}{80} \\ \frac{27qL}{80} \\ \frac{13qL}{80} \\ \frac{qL^2}{120} \end{pmatrix} \quad (29)$$

## ۵- نتایج عددی

پس از معرفی المان‌ها و داشتن ماتریس‌های سختی و بار و نیز توابع درون‌یاب هر یک از آن‌ها، به حل معادله دیفرانسیل حاکم بر تیر واقع بر بستر الاستیک یک پارامتری وینکلر پرداخته می‌شود. باید آگاه بود، هر ۴ المان ارائه شده در بخش قبل برای ۴ مدل تیر با تکیه‌گاه‌های متفاوت مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس مجهول‌هایی از قبیل خیز، شیب، لنگر و برش در هر نقطه از تیر، با توجه به نوع تیر و درجات آزادی آن به صورت عددی محاسبه می‌گردد.

همانطور که اشاره شد، تیرهای در نظر گرفته شده، شامل تیر دو سر مفصل، دو سر گیردار، یک سر گیردار - یک سر مفصل و تیر کنسول است. افزون بر این، مسأله در هر حالت تنها با استفاده از یک جزء حل خواهد شد. روش کار بدین صورت است که اعمال شرایط مرزی هر تیر، باعث حذف بعضی از درجات آزادی جزءها خواهد شد. در نتیجه، ماتریس‌های سختی و بردار بار با حذف سطر و ستون‌های مربوط به آن درجات آزادی حذف شده، اصلاح می‌گردد. سرانجام تابع تغییرمکان هر یک، با استفاده از رابطه  $u(x) = ND$  حاصل می‌شود که در این رابطه  $N$  بردار توابع درونیاب و  $D$  بردار تغییرمکان‌های گرهی است. در حالت‌هایی که پاسخ دقیق در آثار پیشینیان موجود است، پاسخ‌های پیشنهادی با آنها مقایسه می‌شود تا جزء با بیشترین دقت مشخص گردد. در تمامی مثال‌ها، برای سادگی کار، مقدار خیز بی‌بعد که از تقسیم خیز بر  $qL^4 / EI$  بدست می‌آید، ارائه شده است. به طور مشابه، سایر پارامترها مانند شیب، لنگر و برش بی‌بعد شده‌اند.

### مثال ۱: تیر دو سر مفصل تحت بار گسترده یکنواخت

در این مثال یک تیر دو سر مفصل بر بستر کشسان تحت بار گسترده یکنواخت بررسی می‌شود. یادآوری می‌شود، مقادیر خیز و لنگر در محل تکیه‌های این تیر برابر صفر می‌باشد. جدول ۱ مقادیر خیز، شیب، لنگر و برش این تیر در نقاط وسط دهانه، دو سوم دهانه و انتهای تیر را برای  $K = 1$  نمایش می‌دهد. افزون بر این، جدول ۲ همین مقادیر را برای حالت  $K = 10$  در دسترس قرار می‌دهد. ملاحظه می‌شود مقادیر بدست آمده توسط جزءهای پیشنهادی با دقت بسیار عالی به مقادیر دقیق نزدیک است و تا رقم ششم اعشار برابر هستند. از سوی دیگر، پاسخ مسأله با استفاده از جزء معمولی حدود ۲۲ درصد خطا در محاسبه خیز دارد. افزون بر این، با افزایش درجه مشتق پارامتر مورد مطالعه، دقت پاسخ‌های حاصل از جزء معمولی به شدت کاهش می‌یابد. یادآوری می‌شود، شیب، لنگر و برش به ترتیب مشتق‌های اول، دوم و سوم خیز هستند. به عنوان نمونه، جزء معمولی ناتوان در محاسبه برش در محل تکیه‌گاه انتهایی تیر دو سر مفصل است، اما هر سه جزء پیشنهادی پاسخ‌های بسیار دقیقی در اختیار می‌گذارند. با مقایسه دو جدول می‌توان دریافت افزایش سختی بستر سبب کاهش خیز، شیب، لنگر و برش در تیر شده است. تابع خیز دقیق تیر که از حل تحلیلی معادله دیفرانسیل مربوطه بدست آمده است در معادله (۱۲) ارائه گردیده است [۱۴]:

$$u(x) = \frac{q}{4\alpha^4 EI} \left[ 1 - \cos \alpha x \cosh \alpha x - \frac{\sin \alpha L \sinh \alpha x \cosh \alpha x}{\cos \alpha L + \cosh \alpha L} + \frac{\cos \alpha x \sinh \alpha L \sinh \alpha x}{\cos \alpha L + \cosh \alpha L} \right] \quad (30)$$

که در آن پارامتر  $\alpha$  مطابق زیر تعریف شده است:

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{K}{4EI}} \quad (31)$$

جدول ۱: مقادیر خیز، شیب، لنگر و برش تیر دو سر مفصل روی بستر با سختی  $K = 1$

محل مورد بررسی			نوع المان	پارامتر
$L/2$	$2L/3$	$L$		
-۰/۰۱۰۳۳۰۵۷۸۵۱۲۳۹۶۶۶۹۶	-۰/۰۰۹۱۸۲۷۳۶۴۵۵۴۶۳۷۲۸	۰	المان معمولی	خیز
-۰/۰۱۲۸۸۹۲	-۰/۰۰۹۶۶۶۳	۰	دو المان معمولی	
-۰/۰۱۲۸۸۸۷۰۷۰۳۷۶۴۳۰۲۹	-۰/۰۱۱۲۰۲۰۳۶۷۳۳۹۵۱۵۷۲	۰	المان اول پیشنهادی	
-۰/۰۱۲۸۸۸۳۶۷۲۰۵۱۰۸۹۹۷	-۰/۰۱۱۲۰۱۹۰۳۰۰۸۲۰۴۹۷۶	۰	المان دوم پیشنهادی	
-۰/۰۱۲۸۸۸۳۶۷۲۰۵۱۰۰۵۵۶	-۰/۰۱۱۲۰۱۹۰۳۰۰۸۱۹۷۹۳	۰	المان سوم پیشنهادی	
-۰/۰۱۲۸۸۸۰۱۶۴۳۵۱۴۵۲۱۴	-۰/۰۱۱۲۰۱۸۴۳۸۳۰۳۲۷۲۰۸	۰	حل دقیق	
۰	۰/۰۱۳۷۷۴۱۰۴۶۸۳۱۹۵۵۹۴	۰/۰۴۱۳۲۲۳۱۴۰۴۹۵۸۶۷۸۵	المان معمولی	شیب
۰	۰/۰۱۷۱۸۵۶	۰/۰۴۱۳۲۲۳۱۴۰۴۹۵۸۶۷۸۵	دو المان معمولی	
۰	۰/۰۱۹۸۵۸۱۵۶۰۲۸۳۶۸۱۲۶	۰/۰۴۱۲۴۳۸۶۲۵۲۰۴۵۸۵۱۶	المان اول پیشنهادی	
۰	۰/۰۱۹۸۵۵۹۳۵۲۶۸۳۴۴۶۷	۰/۰۴۱۲۴۹۳۲۱۲۶۸۸۰۹۵۵۶	المان دوم پیشنهادی	
۰	۰/۰۱۹۸۵۵۹۳۵۲۶۸۳۲۹۱۲	۰/۰۴۱۲۴۹۳۲۱۲۶۸۷۹۳۶۰۴	المان سوم پیشنهادی	
۰	۰/۰۱۹۸۵۳۱۵۳۱۷۲۰۲۵۵	۰/۰۴۱۲۴۹۳۲۳۴۵۷۱۹۱۴	حل دقیق	
۰/۰۸۲۶۴۴۶۲۸۰۹۹۱۷۳۵۷	۰/۰۸۲۶۴۴۶۲۸۰۹۹۱۷۳۵۷	۰/۰۸۲۶۴۴۶۲۸۰۹۹۱۷۳۵۷	المان معمولی	لنگر
۰/۲۸۸۶۵۶	۰/۰۵۶۸۶۲	۰/۰۲۰۶۸۴۵	دو المان معمولی	
۰/۱۲۳۷۳۱۵۸۷۵۶۱۲۷۳۰۹	۰/۱۰۹۹۸۳۶۳۳۲۸۷۸۹۰۸۶	۰	المان اول پیشنهادی	
۰/۱۲۳۷۱۵۲۳۲۷۴۴۱۲۹۴۶	۰/۱۰۹۹۷۶۳۶۹۳۴۱۹۶۲۲۳	۰/۰۰۰۰۶۵۴۶۲۱۲۴۵۹۸۱۵۳۴۸	المان دوم پیشنهادی	
۰/۱۲۳۷۱۵۲۳۲۷۴۴۰۳۴۷۴	۰/۱۰۹۹۷۶۳۶۹۳۴۱۸۸۶۱۳	۰/۰۰۰۰۶۵۴۶۲۱۲۴۷۰۹۵۳۶۶	المان سوم پیشنهادی	
۰/۱۲۳۶۸۹۶۷۳۰۵۰۶۴۸۷۵	۰/۱۰۹۹۷۶۳۶۹۳	۰	حل دقیق	
۰	۰	۰	المان معمولی	برش

۰/۴۹۴۵۷۴	-۰/۰۹۳۲۶۳۵	-۰/۲۴۷۲۸۷	دو المان معمولی
۰	-۰/۱۶۴۹۷۵۴۵۰۰۸۱۸۱۴۲۲	-۰/۴۹۴۹۲۶۳۵۰۲۴۵۵۴۱۷	المان اول پیشنهادی
۰	-۰/۱۶۴۸۶۶۳۶۰۸۲۶۰۳۳	-۰/۴۹۴۵۹۹۰۸۲۴۷۸۱۵۱۷	المان دوم پیشنهادی
۰	-۰/۱۶۴۸۶۶۳۶۰۸۲۵۷۹۰۹	-۰/۴۹۴۵۹۹۰۸۲۴۷۷۲۲۹۱	المان سوم پیشنهادی
۰	-۰/۱۶۴۶۱۳۰۴۵۵۴۰۸۳۶۱	-۰/۴۹۵۸۷۵۶۱۳۱۴۱۷۴۷۴	حل دقیق

جدول ۲: مقادیر خیز، شیب، لنگر و برش تیر دو سر مفصل روی بستر با سختی  $K = 10$ 

محل مورد بررسی			نوع المان	پارامتر
$L/2$	$2L/3$	$L$		
-۰/۰۰۹۶۱۵۳۸۴۶۱۵۳۸۴۶۱۴	-۰/۰۰۸۵۴۷۰۰۸۵۴۷۰۰۸۵۴۶	۰	المان معمولی	خیز
-۰/۰۱۱۸۱۰۱۳۷۹۷۲۴۰۵۳۶۵	-۰/۰۱۰۲۶۴۶۱۳۷۴۳۹۱۷۸۴۱	۰	المان اول پیشنهادی	
-۰/۰۱۱۸۰۷۱۰۹۲۸۸۸۵۴۳۹	-۰/۰۱۰۲۶۳۴۶۱۶۲۴۶۱۹۰۱۸	۰	المان دوم پیشنهادی	
-۰/۰۱۱۸۰۷۱۰۹۲۸۸۸۴۷۲۹۸	-۰/۰۱۰۲۶۳۴۶۱۶۲۴۶۱۳۱۱۴	۰	المان سوم پیشنهادی	
-۰/۰۱۱۸۰۳۹۵۹۵۸۶۹۹۰۷۳	-۰/۰۱۰۲۶۲۹۷۱۰۱۹۸۰۵۱۱۳	۰	حل دقیق	
۰	۰/۰۱۲۸۲۰۵۱۲۸۲۰۵۱۲۸۱۷	۰/۰۳۸۴۶۱۵۳۸۴۶۱۵۳۸۴۶	المان معمولی	شیب
۰	۰/۰۱۸۱۹۶۳۶۰۷۲۷۸۵۳۸۳۴	۰/۰۳۷۷۹۲۴۴۱۵۱۱۶۹۷۹۱۶	المان اول پیشنهادی	
۰	۰/۰۱۸۱۷۶۱۵۲۰۲۲۶۱۴۶۹	۰/۰۳۷۸۴۲۶۹۸۵۵۳۷۲۶۰۲۴	المان دوم پیشنهادی	
۰	۰/۰۱۸۱۷۶۱۵۲۰۲۲۶۰۱۴۴۳	۰/۰۳۷۸۴۲۶۹۸۵۵۳۷۱۳۴۱۶	المان سوم پیشنهادی	
۰	۰/۰۱۸۱۵۰۷۹۷۷۰۲۶۲۰۵۸	۰/۰۳۷۸۴۲۸۷۹۸۴۳۴۲۰۸۹	حل دقیق	
۰/۰۷۶۹۲۳۰۷۶۹۲۳۰۷۶۹۱	۰/۰۷۶۹۲۳۰۷۶۹۲۳۰۷۶۹۱	۰/۰۷۶۹۲۳۰۷۶۹۲۳۰۷۶۹۱	المان معمولی	لنگر
۰/۱۱۳۳۷۷۳۲۴۵۳۵۰۹۱۵	۰/۱۰۰۷۷۹۸۴۴۰۳۱۱۹۵۸	۰	المان اول پیشنهادی	
۰/۱۱۳۲۲۸۳۵۱۵۱۴۲۲۲۴۶	۰/۱۰۰۷۱۴۰۳۳۳۷۸۶۳۴۹۵	۰/۰۰۰۵۹۹۴۸۸۲۹۴۰۱۲۸۷۸۷	المان دوم پیشنهادی	
۰/۱۱۳۲۲۸۳۵۱۵۱۴۱۴۱۸۷	۰/۱۰۰۷۱۴۰۳۳۳۷۸۵۷۰۶۴	۰/۰۰۰۵۹۹۴۸۸۲۹۴۰۱۲۸۷۸۷	المان سوم پیشنهادی	
۰/۱۱۲۹۹۵۱۶۴۳۴۵۰۱۹۸۸	۰/۱۰۰۷۰۹۶۴۸۸۲۴۴۹۶۰۴	۰	حل دقیق	
۰	۰	۰	المان معمولی	برش
۰	-۰/۱۵۱۱۶۹۷۶۶۰۴۶۷۷۳۶۲	-۰/۴۵۳۵۰۹۲۹۸۱۴۰۴۱۱۱	المان اول پیشنهادی	
۰	-۰/۱۵۰۱۷۱۸۱۷۶۲۷۰۷۳۸۸	-۰/۴۵۰۵۱۵۴۵۲۸۸۱۲۶۸۹۳	المان دوم پیشنهادی	

•	۰/۱۵۰۱۷۱۸۱۷۲۶۲۶۸۶۹۷	۰/۴۵۰۵۱۵۴۵۲۸۸۰۴۴۹	المان سوم پیشنهادی
•	۰/۱۴۷۸۵۵۸۱۷۲۳۵۵۵۵۱۳	۰/۴۶۲۲۰۷۰۵۰۱۰۷۸۴۵	حل دقیق

### مثال ۲: تیر یک سر گیردار - یک سر مفصل تحت بار گسترده یکنواخت

تیر مورد مطالعه در این مثال یک تیر نامعین است. خیز و شیب در محل تکیه‌گاه گیردار و خیز و لنگر در محل تکیه‌گاه مفصلی برابر صفر هستند. مقادیر خیز، شیب، لنگر و برش تیر در سه نقطه منتخب به ازای سختی‌های بستر ۱ و ۱۰ به ترتیب در جدول‌های ۳ و ۴ ارائه شده‌اند. نتایج جدول نشان می‌دهند مقدار خیز در وسط دهانه حدود نصف مقدار دقیق بدست آمده و ۱۰۰ درصد خطا با استفاده از جزء معمولی ایجاد می‌گردد. خوشبختانه، جزء‌های اول و سوم پیشنهادی دقت بسیار عالی داشته و تنها جزء پیشنهادی دوم در این تیر دارای حدود ۶ درصد خطا در محاسبه خیز نقطه دو سوم دهانه است. البته خطای این جزء پیشنهادی در محاسبه لنگر و برش قابل توجه می‌باشد. دلیل این خطا می‌تواند حساسیت بیشتر این جزء به شرایط مرزی باشد. ناگفته نماند، جزء معمولی مقدار برش را در طول تیر با خطای چندصد درصدی در دسترس قرار می‌دهد. افزون بر این، مقادیر هر چهار پارامتر خیز، شیب، لنگر و برش با افزایش سختی بستر، کاهش می‌یابند که البته این کاهش، کمتر از تیر دو سر مفصل بر بستر کشسان است.

جدول ۳: مقادیر خیز، شیب، لنگر و برش تیر یک سر گیردار - یک سر مفصل روی بستر با سختی  $K = 1$

محل مورد بررسی			نوع المان	پارامتر
$L/2$	$2L/3$	$L$		
۰/۰۰۲۵۹۷۹۸۰۹۹۷۶۲۴۷۰۳	۰/۰۰۳۰۷۹۰۸۸۵۸۹۷۷۷۴۲۵۵	•	المان معمولی	خیز
۰/۰۰۵۱۸۶۶۵۸۲۱۶۲۸۱۳۹۷۵	۰/۰۰۵۱۲۲۴۱۷۹۶۸۵۱۸۶۴۵	•	المان اول پیشنهادی	
۰/۰۰۵۱۸۶۶۵۹۴۰۱۳۴۹۷۳۷۹	۰/۰۰۴۸۲۵۸۱۰۵۶۹۰۱۶۲۸۳	•	المان دوم پیشنهادی	
۰/۰۰۵۱۸۶۵۹۴۰۱۳۴۹۶۶۹۱۵	۰/۰۰۵۱۲۲۳۵۰۳۲۷۳۷۵۷۳	•	المان سوم پیشنهادی	
۰/۰۰۵۱۸۶۴۳۴۱۱۵۶۶۵۲	۰/۰۰۵۱۲۲۳۱۲۸۵۷۹۴۹۲۱۸	•	حل دقیق	
۰/۰۰۵۱۹۵۹۶۱۹۹۵۲۴۹۴۰۶	•	۰/۰۲۰۷۸۳۸۴۷۹۸۰۹۹۷۶۲۵	المان معمولی	شیب
۰/۰۰۵۱۸۵۳۰۸۰۶۷۴۱۹۶۸۰۵	۰/۰۰۶۱۴۸۰۳۹۴۶۵۴۶۰۵۷۷	۰/۰۲۰۷۴۴۸۳۲۶۶۶۶۴۳۳۶	المان اول پیشنهادی	
۰/۰۰۵۱۸۴۹۲۲۳۱۴۷۷۳۸۵۹	۰/۰۰۹۵۷۱۱۹۱۵۸۶۲۳۷۶۵۵	•	المان دوم پیشنهادی	
۰/۰۰۵۱۸۴۹۲۲۳۱۴۷۷۲۰۶۱	۰/۰۰۶۱۴۷۶۳۳۰۴۸۹۵۲۵۶۷	۰/۰۲۰۷۴۶۸۹۱۲۲۲۰۸۵۶	المان سوم پیشنهادی	
۰/۰۰۵۱۸۴۷۹۳۸۷۸۷۶۳۶۶۸	۰/۰۰۶۱۴۶۳۲۳۴۴۶۶۱۲۰۵	۰/۰۲۰۷۴۶۸۹۱۷۳۸۹۱۵۲۰۷	حل دقیق	
۰/۰۲۰۷۸۳۸۴۷۹۸۰۹۹۷۶۲۵	۰/۰۴۱۵۶۷۶۹۵۹۶۱۹۹۵۲۵	۰/۰۸۳۱۳۵۳۹۱۹۲۳۹۹۰۵	المان معمولی	لنگر
۰/۰۶۲۲۴۱۶۹۸۷۹۳۸۵۹۰۹	۰/۰۶۹۱۴۸۳۷۵۴۳۷۸۵۸۶۲	•	المان اول پیشنهادی	
۰/۰۸۲۹۸۵۵۰۴۲۱۵۹۵۸۰۶	۰/۰۸۵۴۷۸۸۸۰۴۰۱۰۰۶۴۹	۰/۲۴۸۹۲۹۷۶۵۴۶۸۲۹۷۸۷	المان دوم پیشنهادی	
۰/۰۶۲۲۳۸۶۱۲۹۹۳۸۵۱۰۸۳	۰/۰۶۹۱۴۳۱۹۳۷۵۹۷۲۲۱	۰/۰۰۰۰۳۲۹۲۹۱۹۶۸۰۳۷۸۲۵۹	المان سوم پیشنهادی	

حل دقیق	۰	۰/۰۶۹۱۴۱۷۳۹۷۴۲۰۹۴۵۵	۰/۰۶۲۲۲۶۷۸۲۰۳۰۷۹۶۳۷
برش	المان معمولی	۰/۱۲۴۷۰۳۰۸۷۸۸۵۹۸۵۷۵	۰/۱۲۴۷۰۳۰۸۷۸۸۵۹۸۵۷۵
	المان اول پیشنهادی	۰/۳۷۳۳۲۰۵۷۸۴۷۲۴۲۹۸	۰/۰۴۱۵۳۷۶۷۰۶۲۶۱۴۷۴۴
	المان دوم پیشنهادی	۰/۹۹۵۴۸۰۳۵۶۳۶۷۸۴۷۶	۰/۱۳۳۹۰۳۱۱۱۹۶۱۷۵۰۳۴
	المان سوم پیشنهادی	۰/۳۷۳۰۷۳۶۱۹۷۰۴۷۶۹۷	۰/۰۴۱۵۲۳۹۵۰۲۲۳۸۶۹۴۵۵
	حل دقیق	۰/۳۷۳۷۴۰۴۲۴۷۶۶۶۴۸۷	۰/۰۴۱۴۰۱۶۹۸۵۲۳۷۸۱۲۴

جدول ۴: مقادیر خیز، شیب، لنگر و برش تیر یک سر گیردار - یک سر مفصل روی بستر با سختی  $K = 10$

پارامتر	نوع المان	محل مورد بررسی		
		$L$	$2L/3$	$L/2$
خیز	المان معمولی	۰	۰/۰۰۳۰۱۴۶۴۲۵۴۹۵۲۶۲۷۰۵	۰/۰۰۲۵۴۳۶۰۴۶۵۱۱۶۲۷۹۱
	المان اول پیشنهادی	۰	۰/۰۰۴۹۳۵۷۱۶۸۴۳۲۲۳۴۱	۰/۰۰۴۹۹۹۴۳۰۴۱۷۸۷۲۱۰۱۵
	المان دوم پیشنهادی	۰	۰/۰۰۴۶۶۹۲۰۶۰۹۵۳۶۲۷۲	۰/۰۰۴۹۹۸۸۲۱۲۱۸۵۵۸۷۲۶
	المان سوم پیشنهادی	۰	۰/۰۰۴۹۳۵۰۷۴۷۲۳۱۲۳۲۴	۰/۰۰۴۹۹۸۸۲۱۲۱۸۵۵۷۵۳۱
	حل دقیق	۰	۰/۰۰۴۹۳۴۷۲۸۰۹۸۵۹۵۳۷۶	۰/۰۰۴۹۹۷۲۸۹۴۴۰۳۹۷۶۱۲
شیب	المان معمولی	۰/۰۲۰۳۴۸۸۳۷۲۰۹۳۰۲۳۲۷	۰	۰/۰۰۵۰۸۷۲۰۹۳۰۲۳۲۵۵۸۲
	المان اول پیشنهادی	۰/۰۱۹۹۸۰۴۳۲۱۲۱۹۷۸۶۰۷	۰/۰۰۵۹۳۳۷۸۸۹۱۴۷۶۶۸۶۲	۰/۰۰۴۹۸۶۴۶۳۲۵۵۷۳۹۷۲۸
	المان دوم پیشنهادی	۰	۰/۰۰۹۲۳۰۲۴۳۳۱۴۴۳۸۵۵۸	۰/۰۰۴۹۸۲۷۵۸۳۶۳۷۱۵۴۳۹
	المان سوم پیشنهادی	۰/۰۲۰۰۰۰۳۰۴۰۲۹۲۶۴۲۲۳	۰/۰۰۵۹۲۹۸۸۳۲۳۲۷۸۹۶۶۱	۰/۰۰۴۹۸۲۷۵۸۳۶۳۷۱۳۷۵۷
	حل دقیق	۰/۰۲۰۰۰۰۳۵۱۴۱۷۳۷۶۲۷	۰/۰۰۵۹۱۷۲۹۵۲۷۳۸۷۸۹۷۶	۰/۰۰۴۹۸۱۵۳۷۱۶۰۷۲۲۸۹۳
لنگر	المان معمولی	۰/۰۸۱۳۹۵۳۴۸۸۳۷۲۰۹۳۱	۰/۰۴۰۶۹۷۶۷۴۴۱۸۶۰۴۶۵۴	۰/۰۲۰۳۴۸۸۳۷۲۰۹۳۰۲۳۲۷
	المان اول پیشنهادی	۰	۰/۰۶۶۵۹۱۱۹۴۷۴۷۶۲۶۵۵	۰/۰۶۰۱۰۴۵۴۵۶۳۹۷۵۰۸
	المان دوم پیشنهادی	۰/۲۳۹۶۸۶۴۱۲۸۱۳۲۲۶۲۶	۰/۰۸۲۲۸۹۲۴۹۱۴۱۴۸۴۶۷	۰/۰۷۹۹۸۱۱۳۹۴۹۶۶۹۳۹۶۲
	المان سوم پیشنهادی	۰/۰۰۳۱۷۲۳۵۵۳۷۹۱۳۸۰۹۷	۰/۰۶۶۵۴۱۴۱۰۳۰۳۶۰۳۲۴	۰/۰۰۹۹۸۰۸۳۵۴۶۷۶۵۵۵۵
	حل دقیق	۰	۰/۰۶۶۵۲۷۶۳۰۳۳۱۶۰۷۳۳	۰/۰۰۹۸۶۷۱۰۷۱۵۷۱۹۸۶۸
	المان معمولی	۰/۱۲۲۰۹۳۰۲۳۲۵۵۸۱۳۹۶	۰/۱۲۲۰۹۳۰۲۳۲۵۵۸۱۳۹۶	۰/۱۲۲۰۹۳۰۲۳۲۵۵۸۱۳۹۶
	المان اول پیشنهادی	۰/۳۵۸۸۱۷۸۷۹۸۱۹۱۴۲۸	۰/۰۴۰۴۲۱۹۱۸۸۹۷۵۵۲۳۷	۰/۱۱۹۴۶۷۶۴۳۵۴۳۶۳۵۷۹

۰/۱۷۹۱۷۱۴۸۹۳۷۰۵۴۱۶۴	-۰/۱۲۹۳۴۵۰۹۶۳۲۷۳۸۹۴۳	-۰/۹۰۶۴۴۸۶۸۶۳۹۱۸۴۹	المان دوم پیشنهادی	برش
۰/۱۱۹۱۷۰۵۷۷۲۸۲۶۶۹۵۸	-۰/۰۴۰۲۸۹۷۴۴۶۴۱۴۹۷۳۱۶	-۰/۳۵۶۴۳۹۵۶۵۰۱۳۴۴۱۴۷	المان سوم پیشنهادی	
۰/۱۱۹۰۲۲۸۸۰۱۰۷۶۷۵۶۷	-۰/۰۳۹۱۱۳۱۲۳۵۶۷۲۳۹۴۳۶	-۰/۳۶۲۸۶۲۴۷۸۷۶۹۰۱۹۱۷	حل دقیق	

### مثال ۳: تیر کنسول تحت بار گسترده یکنواخت

در آخرین مثال، به تحلیل تیر یک سر گیردار - یک سر آزاد یا تیر کنسول (طره) پرداخته می‌شود. آشکار است، مقادیر خیز و شیب در تکیه‌گاه گیردار و لنگر و برش در سر آزاد برابر صفر می‌باشند. در جدول‌های ۵ و ۶ می‌توان مقادیر خیز، شیب، لنگر و برش این تیر را برای سختی‌های بستر ۱ و ۱۰ مشاهده نمود. بر پایه این جدول، مشاهده می‌شود در این مثال بر خلاف دو مثال قبلی، جزء معمولی دقت قابل قبولی در محاسبه خیز داشته و حداکثر خطای آن حدود ۶ درصد است. البته دقت پاسخ‌های این جزء در انتهای تیر بسیار بالاست که دلیل آن وجود داشتن درجات آزادی در این نقطه بر خلاف دو نقطه دیگر، می‌باشد. در محاسبه مقادیر لنگر و برش، جزء‌های پیشنهادی دوم و سوم کمی خطا دارند که بیشتر از دو مثال قبل می‌باشد. جزء پیشنهادی اول مقدار لنگر را در سر آزاد به درستی برابر صفر بدست می‌دهد اما این جزء هم مقدار برش را به جای صفر نزدیک صفر ارائه می‌دهد. شایان توجه است، اثر سختی بستر در این مثال کاملاً چشمگیر است به طوری که خیز انتهای دهانه با افزایش سختی بستر از ۱ به ۱۰، حدود ۴۰ درصد کاهش می‌یابد. این کاهش در لنگر بسیار بیشتر و حدود ۷۰ درصد می‌باشد. دلیل این امر را شاید بتوان کمتر بودن سختی تیر کنسول نسبت به دو تیر دیگر دانست که در این حالت سختی بستر کمک فراوانی به تیر برای کاهش خیز، شیب، لنگر و برش می‌نماید.

جدول ۵: مقادیر خیز، شیب، لنگر و برش تیر کنسول روی بستر با سختی  $K = 1$

پارامتر	نوع المان	محل مورد بررسی		
		$L / 2$	$2L / 3$	$L$
خیز	المان معمولی	-۰/۰۳۸۶۰۵۰۷۸۰۵۵۰۶۲۸	-۰/۰۶۲۸۸۹۳۱۹۴۲۰۳۶۸۶۸	-۰/۱۱۵۶۲۲۲۰۴۳۴۳۸۳۸
	المان اول پیشنهادی	-۰/۰۴۱۰۴۹۰۷۴۸۳۴۰۳۲۵۱	-۰/۰۶۴۷۷۲۳۴۰۸۳۴۵۳۸	-۰/۱۱۵۵۲۳۷۶۶۷۸۲۷۹۸۶
	المان دوم پیشنهادی	-۰/۰۴۱۰۴۹۱۹۲۷۷۸۹۱۰۲۵	-۰/۰۶۴۷۷۲۳۵۸۴۹۰۱۳۸۲	-۰/۱۱۵۵۲۳۷۶۷۲۳۶۷۱۱۵
	المان سوم پیشنهادی	-۰/۰۴۱۰۴۹۱۹۲۷۷۶۱۰۹۷	-۰/۰۶۴۷۷۲۳۵۸۴۹۷۱۰۳۶	-۰/۱۱۵۵۲۳۷۶۷۲۲۹۷۳۲۹
	حل دقیق	-۰/۰۴۱۰۴۹۵۷۶۶۲۴۹۴۶۶۴	-۰/۰۶۴۷۷۲۳۸۶۵۲۳۴۰۶۵۶	-۰/۱۱۵۵۲۳۷۷۰۷۰۰۱۶۵۹
شیب	المان معمولی	-۰/۱۳۵۰۴۱۲۹۷۰۳۲۷۳۱۷۷	-۰/۱۵۴۲۱۶۳۷۶۰۵۷۹۱۷۸۳	-۰/۱۵۳۸۰۸۵۰۴۱۲۹۷۰۳۳۴
	المان اول پیشنهادی	-۰/۱۳۴۸۰۹۳۵۳۶۳۱۲۰۶۷	-۰/۱۴۸۰۹۹۸۳۸۷۴۸۴۵۸۴	-۰/۱۵۳۶۳۱۱۰۱۵۹۶۴۸۰۴۷
	المان دوم پیشنهادی	-۰/۱۳۴۸۱۰۰۶۱۴۰۳۴۱۵۲	-۰/۱۴۸۰۹۹۰۹۵۴۶۱۶۶۸۵۲	-۰/۱۵۳۶۳۴۸۷۴۳۲۳۴۵۳
	المان سوم پیشنهادی	-۰/۱۳۴۸۱۰۰۶۱۴۰۲۵۳۴۲۶	-۰/۱۴۸۰۹۹۰۹۵۴۶۰۷۹۴۳	-۰/۱۵۳۶۳۴۸۷۴۳۲۴۵۳۲
	حل دقیق	-۰/۱۳۴۸۰۹۵۸۶۰۰۹۷۵۱۲	-۰/۱۴۸۰۹۹۱۹۹۷۷۶۷۲۹۴	-۰/۱۵۳۶۳۴۸۷۹۰۵۶۰۵۵۸۶
لنگر	المان معمولی	-۰/۱۵۳۸۰۸۵۰۴۱۲۹۷۰۳۳۷	-۰/۰۷۶۲۹۲۴۴۴۱۷۲۵۲۹۹۵	-۰/۰۷۸۷۳۹۶۵۷۴۱۸۱۶۹۲
	المان اول پیشنهادی	-۰/۱۱۳۷۳۸۳۵۲۳۱۳۸۸۱۸	-۰/۰۵۰۸۹۱۸۱۵۰۹۷۰۲۲۶۵	۰



۰/۲۶۸۱۵۸۴۳۶۷۰۰۱۲۴۳	۰/۱۵۶۰۶۴۸۵۵۵۶۹۶۱۰۷	-۰/۰۰۳۲۵۳۶۷۵۹۳۷۲۳۲۴۸۲	المان اول پیشنهادی
۰/۲۶۸۴۵۳۶۵۷۸۵۵۳۷۹	۰/۱۵۵۹۳۳۶۳۴۱۴۶۹۰۶۰۳	-۰/۰۰۵۶۲۰۱۳۳۸۲۰۷۴۸۳۳	المان دوم پیشنهادی
۰/۲۶۸۴۵۳۶۵۷۸۳۳۳۹۱	۰/۱۵۵۹۳۳۶۳۴۱۴۵۹۶۷۸۴	-۰/۰۰۵۶۲۰۱۳۳۸۱۶۴۲۷۸۴۱	المان سوم پیشنهادی
۰/۲۶۸۱۱۳۶۹۹۸۵۶۹۰۸۴۷	۰/۱۵۴۶۱۰۱۲۵۹۷۹۵۲۱۶۲	.	حل دقیق

## ۶- نتیجه گیری

در این پژوهش به واکاوی استاتیکی تیر اوپلر - برنولی بر بستر کشسان به کمک روش اجزاء محدود پرداخته شد. از نگره وینکلر برای الگوسازی بستر کشسان استفاده گردید. پس از معرفی مسأله و جزء کلاسیک موجود که در اکثر تحلیل‌های موجود استفاده می‌شود، سه جزء جدید برای مطالعه تیر مذکور پیشنهاد گردیدند. هر سه جزء دارای شش درجه آزادی بودند اما تعداد گره‌های جزء‌ها به ترتیب دو، سه و چهار بودند. ماتریس سختی هر جزء به صورت دقیق ارائه گردید. با حل سه مثال شامل دو تیر معین و یک تیر نامعین و مقایسه نتایج بدست آمده با پاسخ دقیق مشخص شد:

۱- المان‌های پیشنهاد شده نسبت به المان معمولی از دقت بالاتری برخوردارند و پاسخ‌های دقیق‌تری ارائه می‌دهند. نکته قابل توجه آن است که تنها با استفاده از یک جزء، پاسخ مطلوب با دقت کافی در اختیار قرار می‌گیرد در حالی که با استفاده از تعداد زیادی المان معمولی، می‌توان به این پاسخ‌ها دست یافت که خود مستلزم صرف زمان و هزینه بیشتر و نیز دشواری حل خواهد بود.

۲- افزون بر این، نتایج نشان دادند، افزایش سختی بستر سبب کاهش خیز، شیب، لنگر و برش می‌شود که این کاهش در تیرهای با سختی بیشتر مانند یک سر گیردار - یک سر مفصل کمتر، و در تیرهای با سختی کمتر مانند تیر کنسول چشمگیر می‌باشد.

۳- همچنین، اگرچه هر سه جزء پیشنهادی بسیار بهتر از جزء معمولی در حل مسأله بکار رفتند اما در میان این سه جزء، به نظر می‌رسد جزء پیشنهادی اول که دارای دو گره و شش درجه آزادی شامل خیز، شیب و انحنا در ابتدا و انتهای جزء بود، بهترین عملکرد را در واکاوی سازه دارد.

۴- عملکرد جزء‌های پیشنهادی می‌تواند با توجه به شرایط مرزی تیر متفاوت باشد. به عنوان نمونه، جزء دوم پیشنهادی که در واقع از گسترش جزء معمولی و افزایش یک گره میانی ایجاد شده است، دقت کمتری در تیر یک سر گیردار - یک سر مفصل از دو جزء دیگر دارد. البته، باز هم این جزء از جزء معمولی دو گرهی با چهار درجه آزادی نتایج بسیار بهتری بدست می‌دهد.

۵- با توجه به دقت عالی این سه جزء، پژوهش‌های آینده می‌توانند این روش‌ها را برای مسائل دینامیکی یا تیرهای سراسری گسترش دهند. افزون بر این، با توجه به محدودیت مدل برای تیرهای بر بستر وینکلر، پژوهشگران می‌توانند به مدلسازی خاک با تئوری‌های پیشرفته‌تری همچون پاسترناک در مطالعات آتی بپردازند. سرانجام، بکارگیری نگره تیموشنکو به جای اوپلر - برنولی، که در این کار به آن پرداخته شد، می‌تواند موضوع جذاب دیگری برای علاقمندان باشد.

## مراجع

- [1] Zakeri, J. A., Motieyan, M. E., Shadfar, M. (2012). Study on lifted-up length of rail on modified Winkler model. *Journal of Civil and Environmental Engineering*, 42 (1), 21-28.
- [2] RoshanBaksh, M. Z., Navayi Neya, B. (2016). Free vibration of beam-like media in three-dimensional mode resting on a Pasternak elastic foundation. *Modares Civil Engineering Journal of Civil and Environmental Engineering*, 16 (5), 89-100.
- [3] Karkon, M., Karkon, H. (2016). New element formulation for free vibration analysis of Timoshenko beam on Pasternak elastic foundation. *Asian Journal of Civil Engineering*, 17 (4), 427-442.
- [4] Zhang, Y., Liu, X., Wei, Y. (2018). Response of an infinite beam on a bilinear elastic foundation: Bridging the gap between the Winkler and tensionless foundation models. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 71, 394-403.

- [5] Babar, A. B., Sahoo, R. (2024). Static, buckling and free vibration analysis of CNT reinforced composite beams with elastic foundation using IHSDT. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*, 12, 8131-8150.
- [6] Previati, G., Ballo, F., Stabile, P. (2025) Beams on elastic foundation: A variable reduction approach for nonlinear contact problem. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 111, 105514.
- [7] Chen, Z., Cheng, Q., Jin, X., Borodich, F. (2024) Dynamic stiffness for a Levinson beam embedded within a Pasternak Medium subjected to axial load at both ends. *Buildings*, 14, 4008.
- [8] Lamprea-Pineda, A., Connolly, D., Hussein, M. (2022) Beams on elastic foundations – A review of railway applications and solutions. *Transportation Geotechnics*, 33, 100696.
- [9] Erofeev, V., Lisenkova, E., Tsarev, I. (2021) Dynamic behavior of a beam lying on a generalized elastic foundation and subject to a moving load. *Mechanics of Solids*, 56, 1295-1306.
- [10] Rezaiee-Pajand, M., Rajabzadeh-Safaei, N., Hozhabrossadati, S. M. (2023) On the damping influence on the dynamic analysis of functionally graded beams resting on elastic foundation by Green's function method. *Mechanics Based design of Structures and Machines*, 51, 1666-1683.
- [11] Chen, H., Cai, Y., Zhang, J., Lv, X., Li, X. (2024) Analytical solutions for out-of-plane response of curved beams resting on an elastic foundation under a random moving load. *Engineering Structures*, 318, 118753.
- [12] Jiang, J., Lian, C., Meng, B., Jing, H., Fang, X., Wang, J. (2025) An approximate solution of the bending of the beams on a nonlinear elastic foundation with the Galerkin method. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 11, 285-293.
- [13] Ma, W., Li, X. (2024) Dynamic stability of rectangular and circular cantilevers on Winkler-Pasternak elastic foundation by a higher-order beam theory. *Mechanics Based design of Structures and Machines*, 52, 6698-6726.
- [14] Barber, J. A. (2011) Intermediate Mechanics of Materials, Solid Mechanics and Its Applications. *Springer Science*, 2<sup>nd</sup> edition, chapter 7, Germany.