

Development of the exact stiffness matrix for a curved beam element with quadratic parabolic geometry: An energy-based approach

Ali Keshmiri¹, Mohammad Rezaiee-Pajand², Amir R. Masoodi^{3*}

1- M.Sc. student, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

2- Professor, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

3- Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

ABSTRACT

Accurate analysis of curved structures, especially in engineering applications such as bridges, curved frames, and space structures, requires high-precision mechanical models. In this study, for the first time, an explicit method is presented for expanding the stiffness matrix of a curved beam element with a quadratic parabolic geometry. This method is developed based on energy principles and the application of the superposition principle. Since strain energy is a function of internal forces, its computation involves integration along the element. Additionally, shear deformations are considered in the formulation of the stiffness matrix components. Due to the complexity of the quadratic parabolic geometry, exact evaluation of the required integrals poses significant computational challenges. To overcome this and enhance both the accuracy and efficiency of the formulation, Gaussian numerical integration is employed, providing a precise approximation of the required quantities. Consequently, the stiffness matrix of the parabolic beam element with six degrees of freedom is explicitly obtained. This matrix is directly applicable to bending analysis and free vibration of curved structures. Finally, to validate the formulation and demonstrate the accuracy and efficiency of the proposed parabolic curved element, various numerical examples are solved. These examples provide the displacements, rotations, and natural frequencies of parabolic curved beams under different geometries, loading conditions, and boundary configurations.

ARTICLE INFO

Receive Date: 24 June 2025

Revise Date: 02 October 2025

Accept Date: 04 November 2025

Keywords:

Explicit stiffness matrix

Parabolic curved beam

Natural frequency

Bending behavior

Energy approach

Gaussian integration

All rights reserved to Iranian Society of Structural Engineering.

doi: 10.22065/jsce.2025.530704.3762

*Corresponding author: Amir R. Masoodi

Email address: ar.masoodi@um.ac.ir

گسترش ماتریس سختی دقیق جزء تیر خمیده با هندسه سهمی درجه دو: رویکردی مبتنی بر اصل انرژی

علی کشمیری^۱، محمد رضائی پزند^۲، امیررضا مسعودی^{۳*}

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

۲- استاد، گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

۳- استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

چکیده

تحلیل دقیق سازه‌های منحنی، به‌ویژه در کاربردهای مهندسی نظیر پل‌ها، قاب‌های خمیده و سازه‌های فضاکار، مستلزم استفاده از مدل‌های مکانیکی با دقت بالا است. در این پژوهش، روشی جدید برای گسترش ماتریس سختی جزء تیر خمیده با هندسه سهمی درجه دو ارائه شده است. این روش بر پایه‌ی اصول انرژی و به کارگیری اصل جمع آثار توسعه یافته است. از آنجا که انرژی کرنشی تابعی از نیروهای داخلی است، محاسبه آن مستلزم انتگرال‌گیری در راستای جزء می‌باشد. باید افزود، اثر تغییرشکل‌های برشی در برپایی درایه‌های ماتریس سختی وارد می‌شوند. با توجه به پیچیدگی هندسه سهمی درجه دو، حل دقیق این انتگرال‌چالش‌های محاسباتی قابل توجهی دارد. به منظور رفع چالش محاسباتی، افزایش دقت و کارایی رابطه‌سازی، از روش انتگرال‌گیری عددی گاوس استفاده شده است که تقریب دقیقی از مقادیر مورد نیاز را فراهم می‌آورد. از این رو، ماتریس سختی جزء تیر سهمی با ۶ درجه آزادی به صورت صریح به دست می‌آید. این ماتریس به طور مستقیم برای تحلیل خمشی و نوسان آزاد سازه‌های خمیده به کار می‌رود. در پایان، به منظور راست‌آزمایی رابطه‌سازی و نمایش دقت و کارایی جزء خمیده سهمی، نمونه‌های عددی گوناگونی حل می‌شوند. در این نمونه‌ها، تغییر مکان‌ها، دوران‌ها و بسامدهای طبیعی تیرهای خمیده سهمی با هندسه، شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی گوناگون در دسترس قرار خواهد گرفت.

کلمات کلیدی: ماتریس سختی صریح، تیر خمیده سهمی، بسامد طبیعی، رفتار خمشی، رویکرد انرژی، انتگرال‌گیری عددی گاوس

شناسه دیجیتال:		سابقه مقاله:				
doi:	شناسه دیجیتال:	چاپ	انتشار آنلاین	پذیرش	بازنگری	دریافت
10.22065/jsce.2025.530704.3762	10.22065/jsce.2025.530704.3762	۱۴۰۵/۰۳/۳۱	۱۴۰۴/۰۷/۱۳	۱۴۰۴/۰۷/۱۳	۱۴۰۴/۰۷/۱۰	۱۴۰۴/۰۴/۰۳
			*نویسنده مسئول: پست الکترونیکی: ar.masoodi@um.ac.ir		امیررضا مسعودی	

۱- مقدمه

تیرهای قوسی و خمیده به دلیل نقش مهمشان در سازه‌هایی مانند پل‌ها، قاب‌های صنعتی و سازه‌های فضاکار، همواره مورد توجه پژوهشگران بوده‌اند. پیچیدگی‌های ناشی از انحنا، هندسی، شرایط مرزی متنوع و اثر متقابل با تکیه‌گاه‌های الاستیک، تحلیل این تیرها را دشوار کرده و موجب شده است که روش‌های عددی مانند تحلیل اجزای محدود به‌عنوان ابزار مناسبی برای بررسی دقیق آن‌ها شناخته شوند. در همین راستا، بنان و همکاران [۱] در سال ۱۹۸۹ تحلیل اجزای محدودی را برای تیرهای خمیده بر بستر الاستیک ارائه کردند و با بهره‌گیری از فرمول‌بندی کامل و شرایط مرزی مناسب، پاسخ‌های مکانیکی از جمله جابجایی و تنش‌ها را به‌صورت عددی محاسبه نمودند. در سال ۱۹۸۵، پالانی‌ناتان و چندراسخاران^۱ [۲] ماتریس سختی المان تیر قوسی را با استفاده از روش اجزاء محدود فرمول‌بندی کردند. این تحقیق به تحلیل دقیق‌تر رفتار مکانیکی تیرهای قوسی در شرایط مختلف بارگذاری کمک کرده است.

در سال ۱۹۹۳، چوی و لیم^۲ [۳] المان‌های برشی ساده‌ای را برای تحلیل تیرهای خمیده معرفی کردند. در این مطالعه، با توسعه فرمول‌بندی المان محدود بر پایه تئوری برشی، پاسخ‌های مکانیکی سازه‌های منحنی با دقت قابل قبول مورد ارزیابی قرار گرفت. کیم و کیم^۳ [۴] در سال ۱۹۹۸ یک المان تیر خمیده با مرتبه بالاتر و فرم هیبرید-مخلوط ارائه کردند. این المان با هدف ارتقای دقت تحلیل در سازه‌های منحنی، به‌ویژه تحت شرایط بارگذاری پیچیده و تغییرات هندسی، توسعه یافته و عملکرد آن از حیث همگرایی و پایداری مورد ارزیابی قرار گرفته است. همچنین کسماکا و فریدمن^۴ [۵] بر توسعه‌ی المان‌های تیر خمیده دوگره‌ای تمرکز کردند که قادر به مدل‌سازی دقیق‌تر تغییرشکل‌های برشی بودند. این رویکرد باعث بهبود کارایی تحلیل سازه‌های منحنی تحت بارگذاری‌های مختلف شد. در سال ۲۰۰۲، شیخ^۵ [۶] یک رویکرد نوآورانه برای مدل‌سازی تغییرشکل‌های برشی در المان‌های تیر خمیده ارائه داد. این روش دقت تحلیل این نوع تیرها را در مواجهه با شرایط بارگذاری و هندسی متنوع به‌طور چشمگیری بهبود بخشید. در سال ۲۰۱۲، تارن و تسنگ^۶ [۷] با بهره‌گیری از رویکرد فضای حالت همیلتونی، تحلیل دقیقی برای تیرها و قوس‌های خمیده با شرایط مرزی دلخواه ارائه کردند. این روش به‌طور خاص برای تحلیل‌های پیچیده و دقیق سازه‌های منحنی توسعه یافته است. در سال ۲۰۱۷، توفکیچی^۷ و همکاران [۸] با توسعه‌ی یک فرمول‌بندی جدید برای المان‌های تیر خمیده دوگره‌ای، راه‌حلی دقیق برای تحلیل رفتار این تیرها تحت شرایط متنوع بارگذاری و هندسی ارائه کردند. در همان سال، گوکو و ساها^۸ [۹] نیز به بررسی تنش و تغییرمکان تیرهای خمیده در شرایط خیز زیاد پرداختند و با مرور نظام‌مند مطالعات پیشین، نقاط قوت و محدودیت‌های روش‌های موجود را تحلیل کردند.

در سال ۲۰۱۹، سید و غوغال^۹ [۱۰] تئوری تیر سینوسی را برای تحلیل تیرهای خمیده ساندویچی با مواد تابعی توسعه دادند. این تئوری، با بهره‌گیری از توزیع سینوسی کرنش برشی در راستای ضخامت، دقت پیش‌بینی رفتار ارتعاشی و پاسخ‌های مکانیکی این نوع سازه‌ها را نسبت به مدل‌های متداول به‌طور قابل‌توجهی افزایش می‌دهد. در ادامه‌ی این روند، بلاربی^{۱۰} و همکاران [۱۱] در سال ۲۰۲۲ با استفاده از یک تئوری تغییرشکل برشی بهبودیافته، تحلیل اجزاء محدود تیرهای خمیده ساندویچی با مواد تدریجی را ارائه کردند. این روش با لحاظ توزیع دقیق تنش‌ها و کرنش‌ها، موجب ارتقای قابل‌ملاحظه‌ای در دقت تحلیل این سازه‌ها شد. در سال ۲۰۲۳، ساوینو و توندولو^{۱۱} [۱۲] یک فرمول‌بندی معکوس برای المان محدود دوگره‌ای تیرهای خمیده مبتنی بر راه‌حل دقیق کرنش-جابجایی ارائه کردند. این رویکرد با هدف افزایش دقت مدل‌سازی در تحلیل‌های مستقیم و معکوس سازه‌های منحنی توسعه یافته است. در سال ۲۰۱۴، یانگ و همکاران

¹ Palaninathan and Chandrasekharan

² Choi and Lim

³ Kim and Kim

⁴ Kosmatka, J. and Friedman

⁵ Sheikh

⁶ Tarn and Tseng

⁷ Tufekci

⁸ Ghuku and Saha

⁹ Sayyad and Ghugal

¹⁰ Belarbi

¹¹ Savino, P. and Tondolo

[۱۳] با ترکیب موجک‌های بی‌اسپلاین و روش اجزای محدود، روشی دقیق برای تحلیل تیرهای خمیده تیموشنکو ارائه دادند. نتایج عددی نشان داد این رویکرد در تحلیل استاتیکی و ارتعاش آزاد عملکرد دقیقی دارد. در سال ۲۰۱۳، ماتیاهاگان و واسیراجا^{۱۲} [۱۴] با استفاده از تحلیل اجزاء محدود، رفتار مکانیکی تیرهای خمیده با مقاطع مختلف را بررسی کردند. نتایج نشان داد شکل مقطع تأثیر چشم‌گیری بر توزیع تنش و جابجایی دارد. در سال ۲۰۰۸، یانگ^{۱۳} و همکاران [۱۵] با استفاده از روش اجزاء محدود، تحلیل ارتعاش آزاد در صفحه برای تیرهای قوسی با اشکال هندسی مختلف را ارائه دادند. در سال ۲۰۰۳، وو و چیانگ^{۱۴} [۱۶] تحلیل ارتعاش آزاد قوس‌ها را با استفاده از المان‌های تیر خمیده انجام دادند. در این مطالعه، از فرمول‌بندی المانی دقیق برای پیش‌بینی فرکانس‌های طبیعی و مودهای ارتعاشی قوس‌ها بهره گرفته شد که باعث دقت بالا در مدل‌سازی رفتار دینامیکی سازه‌های منحنی گردید.

در سال ۲۰۲۱، کوریا^{۱۵} و همکاران [۱۷] تحلیل ارتعاش آزاد درون‌صفحه‌ای تیرهای خمیده را با استفاده از روش اجزاء محدود تعمیم‌یافته انجام دادند. این رویکرد بدون نیاز به مش‌بندی مجدد، امکان مدل‌سازی دقیق هندسه و پاسخ دینامیکی تیرهای خمیده را فراهم کرده و انعطاف‌پذیری بالایی در تحلیل مسائل پیچیده ارائه می‌دهد. کارامانلی^{۱۶} و همکاران [۱۸] در تحقیق خود به تحلیل رفتار خمش، کمانش و ارتعاش آزاد تیرهای خمیده دوبعدی با خواص تابعی پرداختند. در این پژوهش، با استفاده از مدل‌سازی دقیق و در نظر گرفتن توزیع تدریجی خواص مواد، تأثیرات ویژگی‌های مکانیکی متغیر بر پاسخ‌های استاتیکی و دینامیکی تیرهای خمیده به‌طور کامل مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین روش‌های انتگرال‌گیری عددی از جمله روش گاوس در بسیاری از پژوهش‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. در سال ۱۹۶۶، ایرونز^{۱۷} [۱۹] به بررسی کاربردهای مهندسی از انتگرال‌گیری عددی در روش‌های سختی پرداخت. این مطالعه به توسعه و بهبود دقت تحلیل‌های سازه‌ای با استفاده از روش‌های عددی در اجزاء محدود کمک کرده است. در سال ۲۰۰۶، وو^{۱۸} و همکاران [۲۰] با رویکرد انتگرال‌گیری عددی، فیلترهای گاوسی را مورد بررسی قرار دادند. این تحقیق به بهبود دقت و کارایی فیلترهای گاوسی در پردازش داده‌ها و تحلیل‌های عددی کمک کرده است. تیرهای قوسی شکل با هندسه سهمی درجه دو نیز مورد بررسی پژوهشگران قرار گرفته‌اند. به طوری که مارکوئیس و وانگ^{۱۹} [۲۱] در سال‌های ۱۹۸۹، ماتریس سختی المان تیر سهمی را با استفاده از روش اجزاء محدود فرمول‌بندی کردند. این فرمول‌بندی به تحلیل دقیق‌تر تیرهای با هندسه پارابولیک در سازه‌های مهندسی کمک می‌کند. در سال ۲۰۱۶، رضائی‌پژند و رجبزاده [۲۲] ماتریس سختی صریحی برای المان تیر سهمی درجه دو توسعه دادند. این رویکرد با استفاده از روش اجزاء محدود، امکان تحلیل دقیق‌تر تیرهای سهمی شکل را فراهم می‌آورد و به‌ویژه در شرایط بارگذاری و هندسه‌های پیچیده کاربرد دارد. توسعه این ماتریس سختی به بهبود دقت محاسبات و افزایش کارایی در مدل‌سازی تیرهای با هندسه پارابولیک کمک کرده است. در سال ۲۰۱۴ [۲۳] یک مدل سه‌بعدی الاستوپلاستیک با استفاده از برنامه‌نویسی در متلب و روش المان محدود تحلیل شده است. این مطالعه با معیار تسلیم فون-مایرز آغاز و سپس به نظریه هیل توسعه یافته و همگرایی نتایج روی یک مکعب تحت بار گسترده بررسی شده است. دونگ و همکاران [۲۴] یک المان جدید تیر بر پایه توابع پایه NURBS برای تحلیل تغییرشکل‌های بزرگ در تیرهای خمیده ارائه کرده است. این المان که از فرمولاسیون لاگرانژی کلی بهره می‌برد، از دقت و کارایی بالایی بدون اثر قفل‌شدگی برخوردار بوده و نتایج آن در مقایسه با حل‌های تحلیلی و سایر المان‌های مرجع اعتبارسنجی شده است. در پژوهشی [۲۵] دیگر یک مدل ریاضی و برنامه کامپیوتری برای تحلیل ارتعاشات آزاد و پاسخ گذرای سازه‌های متشکل از تیرهای خمیده و مستقیم جاسازی‌شده از جنس مواد تابعی متخلخل ارائه شده است. با استفاده از یک المان تیر مرتبه بالا و اعمال شرایط پیوستگی در اتصال، ماتریس‌های سختی و جرم کل سازه استخراج و صحت‌سنجی نتایج در مقایسه با منابع معتبر و نرم‌افزار ANSYS با تطابق عالی تأیید شده است. هونگ [۲۶] یک مدل ایزوژئومتریکی برای تحلیل کمانش، ارتعاشات آزاد و پاسخ گذرای تیرهای دولایه خمیده تابعی دو جهته متخلخل ارائه کرده است که شرایط مرزی کشسان و لغزش بین لایه‌ها

¹² Mathiyazhagan, G. and Vasiraja

¹³ Yang

¹⁴ Wu and Chiang

¹⁵ Corrêa

¹⁶ Karamanli

¹⁷ Irons

¹⁸ Wu

¹⁹ Marquis, J. and Wang

را در نظر می‌گیرد. این مدل با استفاده از توابع شکل پارابولیک، توزیع تنش برشی را به‌طور دقیق نمایش داده و نتایج آن برای طراحی سازه‌های مرکب خمیده در کاربردهای مهندسی مفید است. وانگ و همکاران [۲۷] نیز به تحلیل ارتعاشات تیر خمیده دایره‌ای با سختی متغیر تحت شرایط مرزی کشسان پرداخته و با استفاده از روش دیفرانسیل کوادرچر (DQM)، اثر پارامترهایی مانند نیروی محوری، زاویه مرکزی و ضریب تغییرات مقطع را بر ویژگی‌های مودال بررسی کرده است. نتایج نشان می‌دهد که افزایش کشش محوری فرکانس‌های طبیعی را افزایش می‌دهد، در حالی که برخی پارامترهای دیگر اثر معکوس دارند.

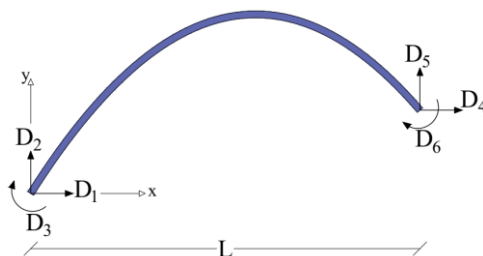
با توجه به اهمیت تیرهای خمیده با هندسه سهمی درجه دو در کاربردهای مهندسی نظیر پل‌ها، قاب‌های صنعتی و سازه‌های فضاکار، و همچنین چالش‌های محاسباتی ناشی از پیچیدگی‌های هندسی و تغییرشکل‌های برشی، نیاز به توسعه روش‌های دقیق و کارآمد برای تحلیل این سازه‌ها بیش از پیش آشکار است. پژوهش‌های پیشین بر فرمول‌بندی ماتریس سختی برای تیرهای سهمی تمرکز کرده‌اند، اما رویکردهای موجود اغلب با محدودیت‌هایی در دقت یا کارایی محاسباتی مواجه بوده‌اند. نوآوری پژوهش حاضر علاوه بر تغییر روش انتگرال‌گیری، شامل ترکیب اصول انرژی با فرمول‌بندی سهموی درجه دو و محاسبه صریح ماتریس سختی با در نظر گرفتن تغییرشکل‌های محوری، برشی و خمشی است. استفاده از انتگرال‌گیری گاوس به‌عنوان ابزار محاسباتی، کلید اصلی برای رفع چالش محاسبه انتگرال‌های پیچیده بوده است، اما دست‌آورد اصلی پژوهش در این است که ماتریس سختی یک تیر سهموی با ۶ درجه آزادی به‌صورت صریح و کاربردی به دست آمده است. در این پژوهش، با بهره‌گیری از اصول انرژی و روش انتگرال‌گیری عددی گاوس، ماتریس سختی صریحی برای المان تیر خمیده با هندسه سهمی درجه دو توسعه داده شده است که ضمن غلبه بر چالش‌های محاسباتی، دقت و کارایی تحلیل‌های خمشی و ارتعاشی را به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای ارتقا می‌دهد. این مطالعه با ارائه نتایج عددی متنوع، قابلیت اطمینان و دقت این رویکرد را در تحلیل رفتار مکانیکی و دینامیکی تیرهای سهمی تحت شرایط مختلف بارگذاری و تکیه‌گاهی نشان خواهد داد.

۲- معرفی جزء سهمی درجه دو

شکل ۱ نمای شماتیک از یک المان تیر خمیده با هندسه سهمی مرتبه دوم را نمایش می‌دهد که دارای شش درجه آزادی است. این درجات آزادی شامل سه مؤلفه در هر گره (دو جابه‌جایی و یک دوران) بوده و همگی در دستگاه مختصات سراسری تعریف شده‌اند. هندسه منحنی این عضو با استفاده از یک تابع سهمی مرتبه دوم همانند رابطه (۱) مدل‌سازی شده است:

$$y = ax^2 + bx \quad (1)$$

در این رابطه، ضرایب a و b پارامترهایی هستند که شکل منحنی را تعیین می‌کنند. از سوی دیگر، جمله‌ی ثابت c در تابع عمومی سهمی $y=ax^2+bx+c$ به دلیل انتخاب مبدأ مختصات در ابتدای عضو، صفر در نظر گرفته شده است. این فرض منجر به ساده‌سازی روابط هندسی و تحلیلی می‌گردد. در این مدل‌سازی، فرض بر آن است که انحنا تنها در صفحه xy رخ می‌دهد و عضو تحت خمش درون صفحه‌ای قرار دارد. با این تعریف هندسی، و موقعیت‌یابی دقیق درجات آزادی در دو گره ابتدایی و انتهایی، بستر لازم برای تدوین ماتریس سختی بر پایه اصول انرژی فراهم می‌شود.



شکل ۱: نمای شماتیک از المان تیر خمیده با هندسه سهمی مرتبه دوم

در ادامه، به بررسی نیروهای داخلی حاکم بر تیر پرداخته می‌شود. شکل ۲ یک تیر سهمی مرتبه دوم را نشان می‌دهد که در ابتدای آن سه نیروی متمرکز وارد شده‌اند: یک نیروی افقی، یک نیروی قائم و یک لنگر خمشی. با در نظر گرفتن یک برش فرضی در نقطه‌ای دلخواه از تیر، سه مؤلفه از نیروهای داخلی در سطح مقطع ظاهر می‌شوند که شامل نیروی محوری N ، نیروی برشی V و لنگر خمشی M هستند. جهت نیروی محوری N در این تحلیل، مماس بر منحنی تیر در محل مقطع در نظر گرفته می‌شود. زاویه بین این نیرو و محور افقی، که با نماد θ مشخص می‌شود، در واقع همان زاویه‌ی مماس بر منحنی سهموی در نقطه مورد نظر است. با توجه به تابع هندسی معرفی شده، مشتق آن نسبت به x شیب منحنی را در هر نقطه نشان می‌دهد و در نتیجه، مؤلفه‌های مثلثاتی زاویه θ به صورت روابط (۲) تا (۴) تعریف می‌شوند:

$$\tan(\theta) = \frac{dy}{dx} = y' = 2ax + b \quad (2)$$

$$\sin(\theta) = \frac{\tan(\theta)}{\sqrt{1 + \tan^2(\theta)}} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \quad (3)$$

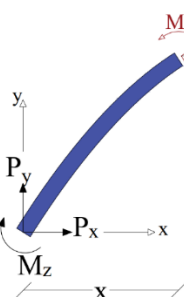
$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(\theta)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} \quad (4)$$

با استفاده از شرایط تعادل ایستا، روابط بین نیروهای داخلی مقطع و نیروهای اعمال شده در گره ابتدایی تیر قابل استخراج هستند. این روابط در معادلات (۵) تا (۷) ارائه شده‌اند و مبنای محاسبه انرژی کرنشی عضو و در نهایت، استخراج ماتریس سختی المان قرار می‌گیرند. لازم به ذکر است که مقادیر مثلثاتی زاویه θ که در این معادلات به کار رفته‌اند، مستقیماً از مشتق تابع هندسی سهمی به دست آمده و از روابط (۲) تا (۴) به دست می‌آیند؛ این انسجام، تداوم منطقی تحلیل هندسی و مکانیکی را تضمین می‌نماید.

$$N_{(x)} = -P_x \cos(\theta) - P_y \sin(\theta) \quad (5)$$

$$V_{(x)} = -P_x \sin(\theta) + P_y \cos(\theta) \quad (6)$$

$$M_{(x)} = -P_x(ax^2 + bx) + P_y x + M_z \quad (7)$$

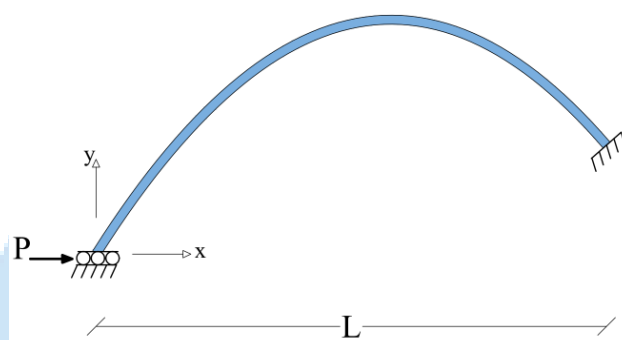


شکل ۲: نمای شماتیک از مقطع برش خورده در تیر سهمی مرتبه دوم

۳- نیروهای داخلی و تغییر مکان‌های تیر

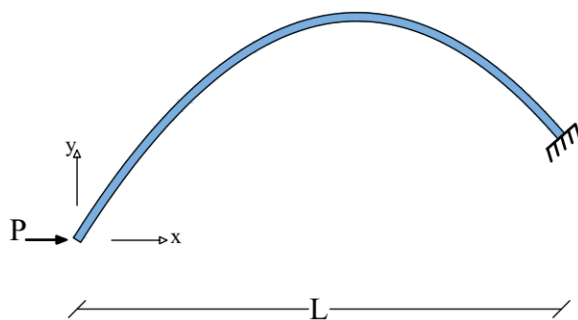
بر اساس تعریف بنیادین ماتریس سختی در روش اجزای محدود، هر سطر (یا به طور معادل، هر ستون) از ماتریس سختی متناظر با مجموعه‌ای از نیروهایی است که در پاسخ به اعمال یک تغییر مکان واحد در یک درجه آزادی مشخص، در حالی که سایر درجات آزادی بدون تغییر باقی مانده‌اند، در نقاط گرهی المان ایجاد می‌شوند. به بیان دقیق‌تر، ستون i ام از ماتریس سختی متناظر با نیروهایی است که به‌ازای اعمال یک تغییر مکان واحد در درجه آزادی i ، و نگه‌داشتن سایر درجات آزادی در مقدار صفر، در سایر گره‌ها و درجات آزادی پدید

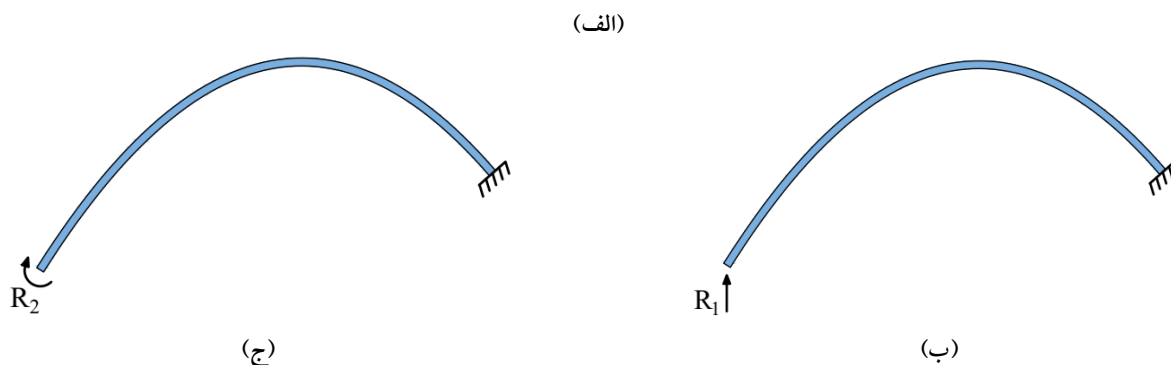
می‌آیند. بر این اساس، به منظور استخراج کامل ماتریس سختی، کافی است تحلیل نیروهای داخلی و عکس‌العمل‌های گرهی ناشی از اعمال تغییر مکان واحد در هر یک از درجات آزادی، به صورت جداگانه انجام شده و نتایج حاصل در قالب بردارهای نیرو گردآوری شوند. هر یک از این بردارها به عنوان یک ستون از ماتریس سختی ایفای نقش کرده و در نهایت، با کنار هم قرار گرفتن آن‌ها، ساختار کامل ماتریس سختی المان حاصل خواهد شد. این فرآیند، به ویژه در هندسه‌های غیرخطی مانند تیرهای خمیده سهموی، نیازمند محاسبه دقیق انرژی کرنشی و اعمال اصول تعادل استاتیکی بر پایه‌ی روش انرژی مجازی است. در این پژوهش، از اصل کار مجازی برای محاسبه دقیق انرژی کرنشی و در نتیجه استخراج درایه‌های ماتریس سختی استفاده شده است. بر این اساس، برای محاسبه سطر (یا به طور معادل ستون) اول از ماتریس سختی، سیستم تحت یک جابه‌جایی واحد در درجه آزادی اول قرار گرفته و سایر درجات آزادی در وضعیت مقید (صفر) باقی می‌مانند. به منظور ایجاد این جابه‌جایی مجازی، یک بار متمرکز فرضی به مقدار P در راستای درجه آزادی مورد نظر اعمال می‌شود. پیکربندی حاصل از این بارگذاری مجازی در شکل ۳ نمایش داده شده است.



شکل ۳: اعمال نیروی متمرکز در راستای درجه آزادی اول جهت استخراج سطر اول ماتریس سختی المان

با توجه به آنکه سازه ارائه شده در شکل ۳ دارای دو درجه نامعینی است، تحلیل مستقیم آن به تنهایی با استفاده از روابط تعادل کافی نخواهد بود. به منظور تحلیل دقیق این سازه و محاسبه عکس‌العمل‌های ناشی از اعمال بار P ، از اصل جمع آثار استفاده می‌شود. بر این اساس، مطابق با شکل ۴، سازه به سه حالت مستقل تقسیم می‌گردد؛ در هر حالت تنها یکی از بارهای خارجی یا عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی اعمال شده و سایر اثرات حذف می‌شوند. در حالت اول (شکل ۴-الف)، تنها نیروی متمرکز P وارد شده است و تکیه‌گاه‌های ابتدا به صورت آزاد در نظر گرفته شده‌اند. در حالت دوم (شکل ۴-ب)، تنها نیروی عمودی عکس‌العمل تکیه‌گاه، که با R_1 نمایش داده می‌شود، به سازه وارد می‌شود. در نهایت، در حالت سوم (شکل ۴-ج)، فقط لنگر تکیه‌گاه، با نماد R_2 ، بر سازه اثر می‌گذارد. با جمع نتایج حاصل از این سه حالت، پاسخ کلی سازه اصلی قابل محاسبه خواهد بود. با استفاده از روابط (۵) تا (۷)، می‌توان نیروهای داخلی در هر یک از حالات تحلیل شده در شکل ۴ را محاسبه نمود. این نیروهای داخلی شامل نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی در امتداد طول المان سهموی می‌باشند. در ادامه، با بهره‌گیری از این مقادیر و به کارگیری اصل انرژی کرنشی، تغییر مکان ایجاد شده در ابتدای تیر در هر یک از سه حالت تحلیل، قابل محاسبه خواهد بود. روابط (۸) بیانگر نحوه محاسبه این تغییر مکان‌ها بر پایه‌ی انتگرال‌گیری از انرژی کرنشی در طول المان می‌باشند.





شکل ۴: تجزیه سازه نامعین به سه حالت مستقل بر اساس اصل جمع آثار، (الف) تیر طره تحت نیروی افقی، (ب) تیر طره تحت نیروی قائم، (ج) تیر طره تحت لنگر خمشی

$$\begin{aligned} \delta_{ix} &= \int_s \left(\frac{N_i}{EA} \frac{\partial N_1}{\partial P} + \frac{M_i}{EI} \frac{\partial M_1}{\partial P} + \frac{f_s V_i}{GA} \frac{\partial V_1}{\partial P} \right) ds \\ \delta_{iy} &= \int_s \left(\frac{N_i}{EA} \frac{\partial N_2}{\partial R_1} + \frac{M_i}{EI} \frac{\partial M_2}{\partial R_1} + \frac{f_s V_i}{GA} \frac{\partial V_2}{\partial R_1} \right) ds \\ \delta_{i\phi} &= \int_s \left(\frac{N_i}{EA} \frac{\partial N_3}{\partial R_2} + \frac{M_i}{EI} \frac{\partial M_3}{\partial R_2} + \frac{f_s V_i}{GA} \frac{\partial V_3}{\partial R_2} \right) ds \end{aligned} \quad (۸)$$

در روابط ارائه شده، مقادیر δ_{ix} ، δ_{iy} و $\delta_{i\phi}$ به ترتیب بیانگر مؤلفه‌های تغییر مکان سازه‌ی نام در راستای محور x ، محور y ، و چرخش حول محور عمود بر صفحه خمشی (دوران) در محل ابتدایی المان می‌باشند. همچنین، نمادهای N_i ، V_i و M_i به ترتیب نشان‌دهنده نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی ایجاد شده در سازه‌ی نام هستند. ضرایب EA ، EI و GA به ترتیب مدول الاستیسیته خمشی، مدول سختی محوری و مدول برشی بوده و مقدار f_s ضریب اصلاح برشی است. مقادیر P ، R_1 و R_2 نیز همان نیروها و عکس‌العمل‌هایی هستند که در شکل ۴ به صورت مجزا در سه حالت مختلف وارد سازه شده‌اند و در محاسبات اصل جمع آثار لحاظ می‌شوند. با توجه به هندسه منحنی المان سهمی، لازم است تغییر متغیر در فرآیند انتگرال‌گیری انجام شود. از آنجا که انتگرال‌گیری اولیه بر حسب طول قوس ds تعریف شده است، با در نظر گرفتن رابطه بین طول قوس و مختصات افقی، دیفرانسیل ds به صورت رابطه (۹) بازنویسی می‌شود:

$$ds = \frac{dx}{\cos(\theta)} \quad (۹)$$

که در آن θ زاویه مماس بر منحنی نسبت به محور افق در هر نقطه از تیر می‌باشد. بنابراین، بازه انتگرال‌گیری نیز از مختصات قوسی به مختصات افقی تبدیل شده و از $x=0$ تا $x=L$ تغییر می‌یابد. این تغییر متغیر موجب تسهیل محاسبات عددی و تحلیلی، به‌ویژه در هنگام استفاده از روش‌های انتگرال‌گیری عددی مانند انتگرال‌گیری گاوسی، خواهد شد. با توجه به روابط مثلثاتی معرفی شده در معادلات (۲) تا (۴) و وابستگی آن‌ها به هندسه غیرخطی تیر سهموی، محاسبه تحلیلی انتگرال‌های مربوط به نیروهای داخلی در رابطه (۸) با پیچیدگی‌های قابل توجهی همراه است. از این‌رو، به منظور افزایش دقت محاسبات و کاهش پیچیدگی‌های تحلیلی، از روش انتگرال‌گیری عددی گاوس برای محاسبه این انتگرال‌ها استفاده می‌شود. در ادامه، شرح مختصری از اصول و مراحل این روش ارائه خواهد شد.

۴- روش انتگرال گیری گاوس

انتگرال گیری عددی گاوس یکی از روش های پرکاربرد و دقیق برای تقریب انتگرال های معین در مسائل مهندسی و مکانیک محاسباتی است. این روش مبتنی بر تغییر بازه انتگرال گیری به دامنه مرجع $[-1,1]$ و تقریب مقدار انتگرال از طریق مجموع وزنی مقادیر تابع در چند نقطه نمونه گیری (نقاط گاوسی) است.

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i) \quad (10)$$

در آن ξ_i نقاط نمونه گیری (ریشه های چندجمله ای های متعامد لژاندر) و w_i وزن های مربوط به این نقاط هستند که به صورت جدول بندی شده برای درجات مختلف n در دسترس اند. دقت این روش با افزایش تعداد نقاط نمونه گیری به طور قابل توجهی افزایش می یابد و برای توابع با رفتار هموار، تنها با چند نقطه می توان تقریب بسیار دقیقی از مقدار انتگرال به دست آورد. در این پژوهش، از انتگرال گیری گاوس برای محاسبه انرژی کرنشی و استخراج دقیق درایه های ماتریس سختی استفاده شده است. در ادامه، در جدول ۱ مقادیر نقاط و وزن های روش انتگرال گیری گاوس برای مقادیر مختلف n (تعداد نقاط گاوسی) ارائه شده است. این جدول شامل نقاط نمونه گیری و وزن های مربوط به این نقاط برای مقادیر مختلف n از ۱ تا ۳ است. استفاده از این مقادیر در محاسبات انتگرال ها، دقت محاسبات عددی را به طور قابل توجهی افزایش می دهد و امکان تقریب دقیق تری از مقادیر مورد نظر را فراهم می آورد. در این پژوهش، برای محاسبه انتگرال های انرژی کرنشی و نیروهای داخلی، از روش انتگرال گیری عددی گاوس با سه نقطه استفاده شده است. انتخاب سه نقطه گاوسی تعادلی مناسب میان دقت و هزینه محاسباتی فراهم می آورد و برای توابع پدید آمده در هندسه سهمی درجه دو، تقریب دقیقی از انتگرال ها ارائه می دهد.

جدول ۱: نقاط و وزن های انتگرال گیری گاوس برای مقادیر مختلف n [23]

n	ξ_i	w_i
1	0	2
2	$\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$	1
3	$0, \pm\sqrt{0.6}$	$\frac{8}{9}, \frac{5}{9}$

۵- استخراج ماتریس سختی بر پایه اصول انرژی

با محاسبه تغییر مکان های عمودی و دورانی در محل ابتدایی تیر برای هر یک از سه حالت تحلیل شده و با در نظر گرفتن شرایط تکیه گاهی سازه اصلی، می توان قیودی بر این تغییر مکان ها اعمال نمود. بر اساس این شرایط، مجموع تغییر مکان قائم و مجموع دوران های حاصل از سه حالت باید برابر صفر باشد. از این تساوی ها، دو معادله به دست می آید که با حل آن ها، مقادیر عکس العمل های ناشی از قیود، یعنی R_1 و R_2 ، به صورت تابعی از نیروی متمرکز P محاسبه می گردند.

$$\begin{aligned} \delta_{1y} + \delta_{2y} + \delta_{3y} &= 0 \\ \delta_{1\phi} + \delta_{2\phi} + \delta_{3\phi} &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

پس از تعیین مقادیر نیروهای واکنش R_1 و R_2 از حل همزمان دو معادله حاصل از شرایط تکیه گاهی، می توان مقدار نیروی متمرکز P را نیز به دست آورد. برای این منظور، مطابق رابطه (۱۲)، شرطی در نظر گرفته می شود که تغییر مکان افقی نقطه ابتدایی تیر (که برابر با مجموع تغییر مکان های افقی حاصل از سه سازه ی جزئی مطابق شکل ۴ است) برابر با یک واحد فرض شود. با جایگذاری مقادیر R_1 و R_2 در این

رابطه، مقدار دقیق P قابل محاسبه خواهد بود. این فرآیند در واقع متناظر با اعمال یک تغییر مکان واحد در جهت درجه آزادی اول و استخراج پاسخ سیستم تحت این بارگذاری است.

$$\delta_{1x} + \delta_{2x} + \delta_{3x} = 1 \quad (12)$$

پس از محاسبه مقدار نیروی P و جایگذاری آن در روابط مربوط به واکنش‌های تکیه‌گاهی، مقادیر R_1 و R_2 نیز به دست می‌آیند. به این ترتیب، سه مؤلفه‌ی نخست از ردیف اول ماتریس سختی استخراج می‌شوند؛ به گونه‌ای که مقدار P بیانگر نیرو متناظر با جابجایی واحد در درجه آزادی اول، مقدار R_1 متناظر با واکنش عمودی ناشی از این جابجایی، و مقدار R_2 نشان‌دهنده‌ی ممان عکس‌العملی خواهد بود. سایر مؤلفه‌های ردیف اول نیز با بهره‌گیری از شرایط تعادل استاتیکی طبق روابط (۱۳) به دست آمده و در نتیجه، کل ردیف اول ماتریس سختی به طور کامل تعیین می‌گردد.

$$\begin{aligned} S_{11} &= P \\ S_{12} &= S_{21} = R_1 \\ S_{13} &= S_{31} = R_2 \\ S_{14} &= S_{41} = -S_{11} \\ S_{15} &= S_{51} = -S_{12} \\ S_{16} &= S_{61} = S_{11}(aL^2 + bL) - S_{12}L - S_{13} \end{aligned} \quad (13)$$

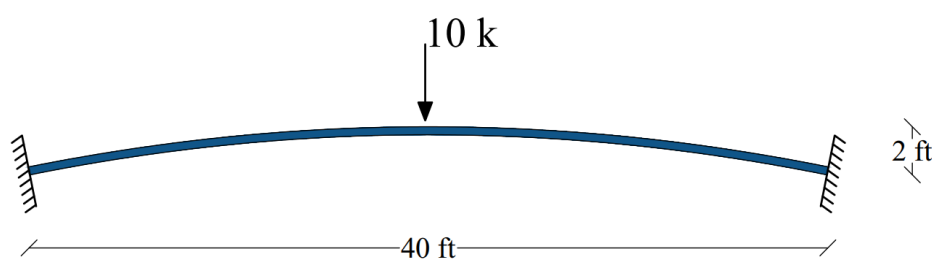
با انجام مراحل محاسباتی فوق، مؤلفه‌های متناظر با سطر و ستون اول ماتریس سختی استخراج شدند. درایه اول ماتریس سختی در پیوست آمده است. به صورت مشابه، با اعمال جابجایی واحد در سایر درجات آزادی و استفاده از همان رویکرد مبتنی بر اصل انرژی و جمع آثار، می‌توان سایر مؤلفه‌های ماتریس سختی را نیز محاسبه کرد. در نهایت، با تکمیل تمام سطر و ستون‌ها، ماتریس سختی کامل المان تیر با هندسه سهمی درجه دو به صورت صریح به دست می‌آید.

۶- نمونه‌های عددی

در این بخش، مجموعه‌ای از مثال‌های عددی به منظور صحت‌سنجی و ارزیابی دقت ماتریس سختی استخراج‌شده مورد بررسی قرار گرفته‌اند. سه مثال نخست (نمونه‌های ۱-۶ تا ۳-۶) به مقایسه پاسخ‌های حاصل از ماتریس سختی پیشنهادی با نتایج دقیق تحلیلی اختصاص یافته‌اند تا دقت و قابلیت اعتماد این روش مشخص شود. در ادامه، دو مثال دیگر (نمونه‌های ۴-۶ و ۵-۶) با شرایط پیچیده‌تر و بارگذاری‌های متنوع، به منظور نمایش گستره کاربرد و توانمندی این ماتریس در تحلیل هندسه‌ها و شرایط مرزی مختلف، ارائه شده‌اند.

۱-۶- تیر سهمی دو سر گیردار تحت بار متمرکز میانی

یک تیر خمیده با هندسه سهمی مرتبه دوم و تکیه‌گاه‌های گیردار در دو انتها مورد بررسی قرار می‌گیرد. این تیر در شکل ۵ نمایش داده شده است. مقطع تیر از نوع مستطیلی بوده که عرض آن برابر با 1 in و ارتفاع آن 6 in در نظر گرفته شده است. مدول الاستیسیته مصالح تیر برابر با 30000 k/in^2 می‌باشد. بارگذاری به صورت یک نیروی متمرکز شعاعی با مقدار 10k در نقطه میانی دهانه اعمال شده است. هندسه خمیده تیر توسط تابع سهمی $y = -0.0004167 x^2 + 0.2 x$ توصیف می‌شود. با توجه به اینکه تمامی مقادیر سختی و تغییر مکان بر حسب اینچ بیان شده‌اند، تابع سهمی تعریف‌کننده هندسه تیر نیز به صورت منسجم و هم‌واحد، بر حسب اینچ تنظیم شده است. هدف از تحلیل، محاسبه تغییر مکان در نقطه میانی تیر، درست در محل اعمال بار متمرکز است. در این تحلیل، اثر تغییر شکل‌های برشی نادیده گرفته شده و تمرکز صرفاً بر روی تغییر مکان‌های ناشی از خمش و نیروهای محوری است. مدل سازی عددی در این مسئله با استفاده از دو المان سهمی انجام شده و دقت مناسبی در تعیین پاسخ سازه فراهم می‌گردد.



شکل ۵: تیر خمیده سهمی با دو سر گیردار و بار متمرکز شعاعی در وسط دهانه

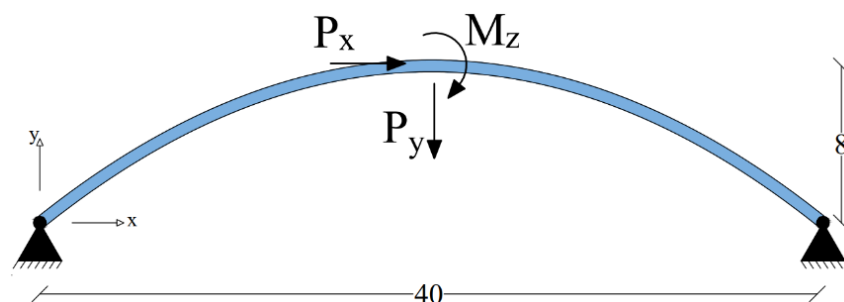
مقایسه‌ی نتایج تغییر مکان زیر بار برای تیر سهمی دو سر گیردار در جدول ۲ ارائه شده است.

جدول ۲: تغییر مکان شعاعی در وسط تیر سهمی دو سر گیردار تحت بار متمرکز شعاعی در میان دهانه

خطا	پژوهش مرجع [۲۱]	پژوهش حاضر	نوع اثرات در نظر گرفته شده
1.33%	6.701×10^{-4}	6.793×10^{-4}	فقط اثر خمشی
0.65%	1.231×10^{-3}	1.239×10^{-3}	اثرات خمشی و محوری

۲-۶- تیر سهمی با پیکربندی‌های مختلف بارگذاری و شرایط تکیه‌گاهی

در شکل ۶، تیر سهمی با معادله هندسی $y = -0.02 x^2 + 0.8 x$ نمایش داده شده است که تحت تأثیر سه نوع بار متمرکز در وسط دهانه مورد بررسی قرار گرفته است. این تحلیل برای دو نوع شرایط تکیه‌گاهی، شامل دو سر گیردار و دو سر مفصل، انجام شده و هدف از آن محاسبه و مقایسه تغییر مکان‌های عمودی و افقی، و همچنین دوران در نقطه میانی تیر، برای نسبت‌های لاغری مختلف است. شعاع انحنای تیر در محل $\phi=0$ برابر ۲۵، عرض مقطع نیز برابر ۱ می‌باشد و برای تحلیل، مدول الاستیسیته خمشی $E=10.5 \times 10^6$ و مدول برشی $G=4 \times 10^6$ فرض شده‌اند. برای تحلیل این تیر از دو المان استفاده شده است. نتایج به دست آمده از تحلیل با مقادیر گزارش شده در پژوهش مرجع در جدول ۳ مقایسه می‌شوند تا دقت و کارایی مدل پیشنهادی مورد ارزیابی قرار گیرد.



شکل ۶: تیر سهمی با بارگذاری متمرکز در وسط دهانه

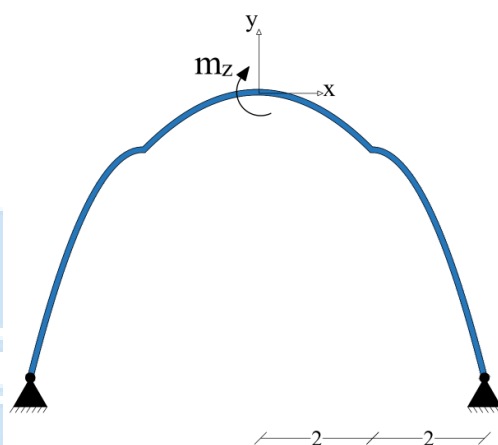
جدول ۳: مقادیر تغییر مکان در وسط تیر سهمی تحت بارگذاری‌های مختلف و شرایط تکیه‌گاهی متفاوت

شرایط تکیه‌گاهی	P_x	P_y	M_z	R/t	پژوهش حاضر			پژوهش مرجع [۲۲]			حداکثر خطا
					u	v	ϕ	u	v	ϕ	
1	0	0	0	5	4.738E-7	0	-6.017E-8	4.743E-7	0	-6.016E-8	0.11%
				50	2.139E-4	0	-6.463E-5	2.145E-4	0	-6.461E-5	0.28%
				100	1.696E-3	0	-5.173E-4	1.700E-3	0	-5.171E-4	0.24%
دو سر ساده	0	1	0	5	0	1.350E-6	0	0	1.352E-6	0	0.15%
				50	0	3.125E-4	0	0	3.148E-4	0	0.73%
				100	0	2.434E-3	0	0	2.453E-3	0	0.77%
0	0	1	0	5	-6.017E-8	0	3.287E-8	-6.016E-8	0	3.287E-8	0.02%
				50	-6.463E-5	0	3.143E-5	-6.461E-5	0	3.143E-5	0.03%
				100	-5.173E-4	0	2.513E-4	-5.172E-4	0	2.513E-4	0.02%
1	0	0	0	5	3.319E-7	0	-3.062E-8	3.324E-7	0	-3.060E-8	0.15%
				50	8.395E-5	0	-3.301E-5	8.441E-5	0	-3.300E-5	0.54%
				100	6.566E-4	0	-2.643E-4	6.603E-4	0	-2.641E-4	0.56%
دو سر گیردار	0	1	0	5	0	1.339E-6	0	0	1.341E-6	0	0.15%
				50	0	2.155E-4	0	0	2.184E-4	0	1.33%
				100	0	1.638E-3	0	0	1.662E-3	0	1.44%
0	0	1	0	5	-3.062E-8	0	2.671E-8	-3.060E-8	0	2.671E-8	0.07%
				50	-3.301E-5	0	2.374E-5	-3.300E-5	0	2.374E-5	0.03%
				100	-2.643E-4	0	1.897E-4	-2.641E-4	0	1.897E-4	0.08%

نتایج حاصل از تحلیل این مثال با داده‌های ارائه شده در پژوهش مرجع [۲۲] مقایسه شده‌اند و اختلاف مقادیر به دست آمده در اغلب موارد کمتر از ۱٪ بوده است که بیانگر دقت بالای مدل پیشنهادی در بازتولید پاسخ‌های واقعی تیرهای منحنی است. خطای دوران (ϕ) نسبت به جابجایی‌ها کمتر بوده که نشان‌دهنده توانایی بالای مدل در پیش‌بینی دقیق تغییر شکل‌های دورانی است. بیشترین خطا در شرایط گیردار و نسبت لاغری $R/t=100$ تحت بار عمودی مشاهده شده که مقدار آن نیز از ۱.۴۴٪ فراتر نرفته و همچنان در محدوده قابل قبول قرار دارد. علاوه بر این، بررسی تأثیر نسبت لاغری $100, 50, R/t=5$ نشان می‌دهد که با افزایش لاغری، مقادیر جابجایی نیز افزایش می‌یابند، که این نتیجه کاملاً منطبق با رفتار مورد انتظار سازه‌های نازک‌تر است.

۳-۶- تحلیل سازه مرکب از سه قوس سهمی با لاغری یکسان و بارگذاری لنگر متمرکز در رأس

در این بخش، سازه‌ای متشکل از سه قوس سهمی شکل مورد تحلیل قرار می‌گیرد. مطابق شکل ۷، هندسه قوس میانی (المان اول) با تابع $y = -0.25x^2$ تعریف شده و دو قوس جانبی (المان دوم) هر کدام به صورت نیم‌قوس تابع $y = -x^2$ مدل‌سازی شده‌اند. المان میانی در مرکز سازه قرار گرفته و دارای شعاع انحنای $R_0 = 2$ و ضخامت $t = 0.01$ است، در حالی که المان‌های جانبی دارای شعاع انحنای $R_0 = 0.5$ و ضخامت $t = 0.0025$ می‌باشند. نسبت لاغری R_0/t در هر دو نوع المان یکسان و برابر با ۲۰۰ است. در این تحلیل، یک گشتاور متمرکز به مقدار $m_z = 2$ در رأس قوس مرکزی اعمال می‌شود. در این مثال از اثر برش صرفه نظر شده است و سایر مشخصات مکانیکی مقطع، نظیر مدول الاستیسیته همانند شرایط تعریف‌شده در مثال ۲-۶ منظور شده‌اند. هدف از این مطالعه، محاسبه تغییرمکان عمودی و دوران رأس تحت اثر این نوع بارگذاری است.



شکل ۷: نمای شماتیک از سازه متشکل از سه قوس سهمی شکل با بارگذاری گشتاور متمرکز در رأس قوس میانی

همانطور که در جدول ۴ مشخص شده است، در هر دو خروجی خطای کمتر از ۰.۴٪ نشان می‌دهد که روش تحلیلی استفاده‌شده در پژوهش حاضر از دقت بالایی برخوردار است و نتایج آن با مرجع معتبر [۲۲] همخوانی دارد. با وجود تفاوت در ابعاد فیزیکی قوس‌ها (شعاع انحنای و ضخامت)، یکسان بودن نسبت لاغری (R_0/t) منجر به رفتار مکانیکی مشابه در المان‌ها شده است. این موضوع اهمیت کنترل پارامترهای بی‌بعد را در تحلیل سازه‌های مرکب نشان می‌دهد.

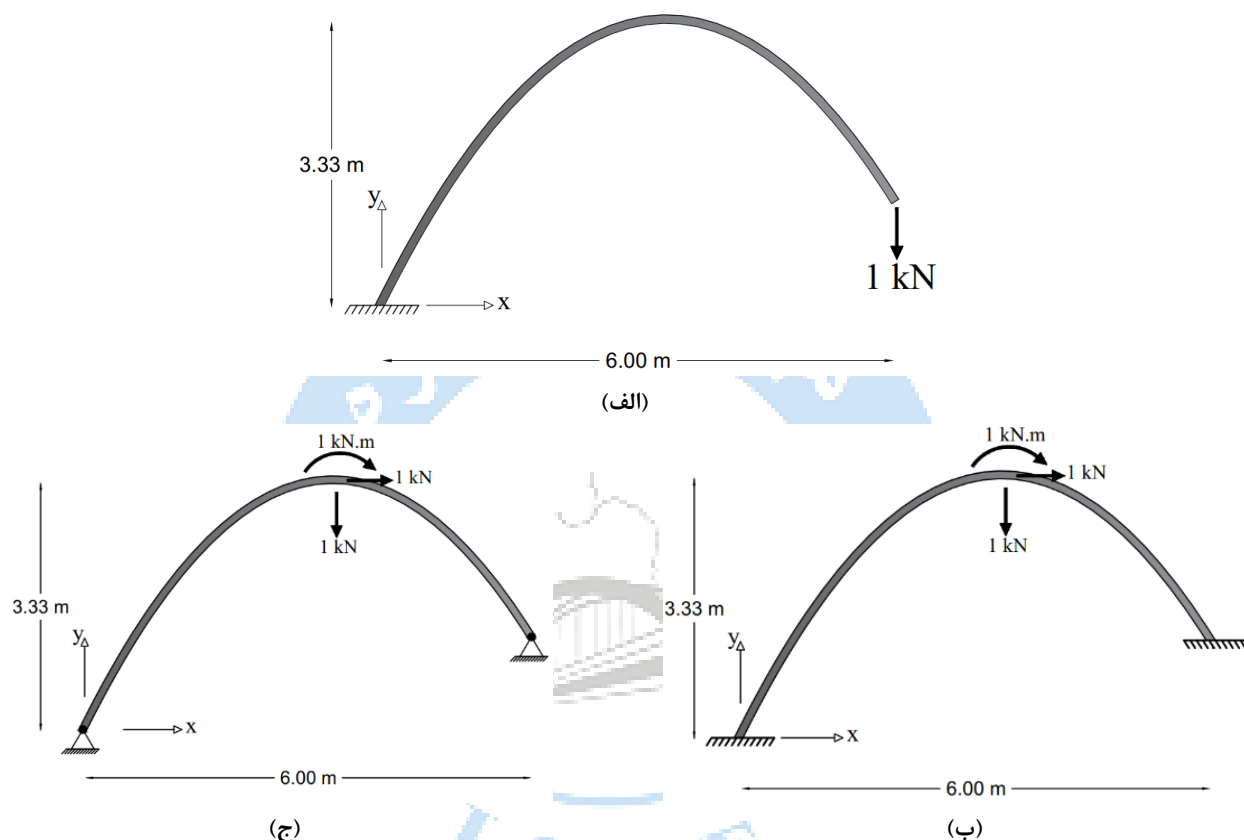
جدول ۴: تغییرمکان‌های راس سازه متشکل از ۳ قوس سهمی

تغییر مکان	پژوهش حاضر	پژوهش مرجع [۲۲]	خطا
u	-104.327	-104.265	0.06%
ϕ	19.805	19.881	0.38%

۴-۶- تحلیل تیر سهمی شکل تحت بار متمرکز و شرایط تکیه گاهی مختلف

تیر نشان داده‌شده در شکل ۸-الف یک تیر یک‌سر گیردار و یک‌سر آزاد با انحنای سهمی درجه دو است که تحت تأثیر یک بار متمرکز عمودی به مقدار ۱ کیلونیوتن ($P = 1\text{kN}$) در انتهای آزاد خود قرار دارد. معادله هندسه تیر به صورت $y = -0.3x^2 + 2x$ تعریف شده است که در بازه $[0, 6]$ قرار دارد. مقطع تیر مستطیلی شکل بوده و عرض و ارتفاع آن به ترتیب برابر ۱۰ و ۱۵ سانتی‌متر است. مدول الاستیسیته مصالح تیر برابر با ۲۱۰ گیگاپاسکال در نظر گرفته شده است. در این مثال $\nu = 0.3$ فرض شده است. هدف یافتن تغییرمکان‌های انتهای آزاد تیر (u تغییر مکان افقی، ν تغییر مکان عمودی و ϕ دوران) می‌باشد. پاسخ‌های عددی حاصل از تحلیل تیر سهمی در جدول ۵

ارائه شده‌اند. این جدول مقادیر تغییرمکان انتهای آزاد تیر را در حالت‌های مختلف تفکیک شده بر حسب تعداد المان‌های به‌کاررفته نمایش می‌دهد. نتایج نشان می‌دهند که حتی با استفاده از تنها یک المان، پاسخ‌ها از دقت قابل‌قبولی برخوردار بوده و میزان خطا در تمامی موارد کمتر از 5% است. با افزایش تعداد المان‌ها به دو، دقت نتایج به‌طور قابل توجهی بهبود یافته و خطا به مقادیر کمتر از 0.1% کاهش می‌یابد. این امر بیانگر کارایی و دقت بالای ماتریس سختی استخراج‌شده است، به‌گونه‌ای که با استفاده از تنها دو المان، پاسخ‌های بسیار نزدیک به حل دقیق به دست می‌آید. جدول ۵ تأیید می‌کند که ماتریس سختی استخراج‌شده برای تیر سهمی درجه دو، با وجود پیچیدگی هندسی، قادر است با دقت بالا رفتار مکانیکی سازه را بازنمایی کند و حتی با حداقل تفکیک المانی نیز پاسخ‌هایی دقیق تولید کند.



شکل ۸: تیر با انحنای سهمی شکل تحت اثر بارگذاری متمرکز و شرایط تکیه‌گاهی متغیر، (الف) تیر یک سر گیردار، (ب) تیر دو سر گیردار، (ج) تیر دو سر ساده

به‌منظور بررسی جامع‌تر عملکرد ماتریس سختی ارائه‌شده، علاوه بر تیر کنسولی بررسی شده در مثال پیشین، دو تیر دیگر با همان هندسه و مشخصات مقطع و مصالح نیز مورد بررسی قرار می‌گیرند. در این مجموعه‌ی جدید، مشابه شکل ۸-ب و شکل ۸-ج دو تیر دیگر به‌صورت دو سر گیردار و دو سر مفصل مدل‌سازی شده‌اند و در آن‌ها بارگذاری به شکل اعمال نیروی افقی، نیروی عمودی به مقدار ۱ کیلو نیوتن و لنگر متمرکز به مقدار ۱ کیلو نیوتن‌متر در نقطه رأس تیر در نظر گرفته شده است.

جدول ۵: مقایسه نتایج تغییرمکان و دوران انتهای تیر سهمی درجه دو با پاسخ دقیق تیر یک سر گیردار

تعداد المان	پاسخ‌های ماتریس سختی ارائه شده			پاسخ دقیق			خطا		
	u (mm)	v (mm)	ϕ (deg)	u (mm)	v (mm)	ϕ (deg)	u	v	ϕ
1	-3.224	-19.402	0.258	-3.350	-19.445	0.260	3.75%	0.22%	0.56%
2	-3.352	-19.446	0.260	-3.350	-19.445	0.260	0.06%	0.01%	0.00%

هدف از این تحلیل‌ها، ارزیابی دقت و توانایی ماتریس سختی در شرایط مرزی و نوع بارگذاری متنوع است. نتایج ارائه شده در جدول ۶ و به‌طور مشابه، در **Error! Not a valid bookmark self-reference.** که پاسخ تیر دو سر مفصل تحت اثر بارگذاری در قله (شکل ۸-ج) بررسی شده است، با دو المان حداکثر خطا در مؤلفه افقی برابر 5.56% بوده و با چهار المان، دقت پاسخ‌ها به حد قابل توجهی افزایش یافته و خطاها عملاً ناچیز شده‌اند. این نتایج نشان می‌دهند که حتی با تعداد کم المان نیز می‌توان پاسخ‌هایی با دقت بالا به دست آورد که بیانگر کارایی بالای ماتریس سختی پیشنهادی در تحلیل تیرهای با انحنای سهمی است.

جدول ۷ نشان می‌دهند که ماتریس سختی استخراج شده برای تیر سهمی درجه دو، در شرایط مختلف بارگذاری و تکیه‌گاهی نیز عملکرد دقیقی از خود نشان می‌دهد. در جدول ۶ که مربوط به تیر دوسر گیردار تحت بار در قله است (شکل ۸-ب)، مشاهده می‌شود که استفاده از تنها دو المان سهمی منجر به خطای حداکثر 2.86% در مؤلفه افقی تغییرمکان شده است، در حالی که با افزایش تعداد المان‌ها به چهار، تمامی خطاها به کمتر از 0.05% کاهش یافته‌اند.

جدول ۶: مقایسه نتایج تغییرمکان و دوران وسط تیر سهمی درجه دو با پاسخ دقیق تیر دو سر گیردار

تعداد المان	پاسخ‌های ماتریس سختی ارائه شده			پاسخ دقیق			خطا		
	u (mm)	v (mm)	φ (deg)	u (mm)	v (mm)	φ (deg)	u	v	φ
2	-0.01213	-0.01521	0.00239	-0.01179	-0.01548	0.00240	2.86%	1.75%	0.26%
4	-0.01180	-0.01547	0.240	-0.01179	-0.01548	0.00240	0.05%	0.03%	0.00%

به‌طور مشابه، در **Error! Not a valid bookmark self-reference.** که پاسخ تیر دو سر مفصل تحت اثر بارگذاری در قله (شکل ۸-ج) بررسی شده است، با دو المان حداکثر خطا در مؤلفه افقی برابر 5.56% بوده و با چهار المان، دقت پاسخ‌ها به حد قابل توجهی افزایش یافته و خطاها عملاً ناچیز شده‌اند. این نتایج نشان می‌دهند که حتی با تعداد کم المان نیز می‌توان پاسخ‌هایی با دقت بالا به دست آورد که بیانگر کارایی بالای ماتریس سختی پیشنهادی در تحلیل تیرهای با انحنای سهمی است.

جدول ۷: مقایسه نتایج تغییرمکان و دوران وسط تیر سهمی درجه دو با پاسخ دقیق تیر دو سر مفصل

تعداد المان	پاسخ‌های ماتریس سختی ارائه شده			پاسخ دقیق			خطا		
	u (mm)	v (mm)	φ (deg)	u (mm)	v (mm)	φ (deg)	u	v	φ
2	-0.00749	-0.01873	0.002129	-0.00709	-0.01896	0.002134	5.56%	1.22%	0.25%
4	-0.00711	-0.01895	0.002134	-0.00709	-0.01896	0.002134	0.10%	0.02%	0.00%

۶-۵- تحلیل تیر متشکل از دو المان سهمی شکل تحت بارگذاری متمرکز در نقطه اتصال

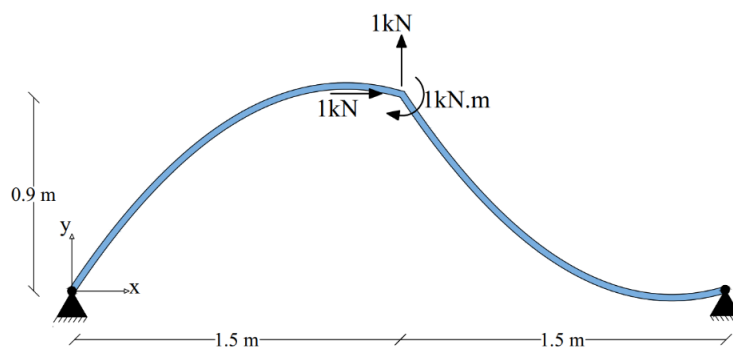
در این مثال، یک تیر منحنی متشکل از دو المان پیوسته با انحنای سهمی درجه دو مورد بررسی قرار می‌گیرد. معادله هندسی بخش اول تیر به صورت $y = -0.6x^2 + 1.5x$ تعریف شده و در بازه $[0, 1.5]$ قرار دارد. بخش دوم تیر نیز دارای تابع هندسی $y = 0.6x^2 - 3.3x + 4.5$ بوده و بازه $[1.5, 3]$ را پوشش می‌دهد. شایان ذکر است که تمام روابط استخراج شده برای محاسبه ماتریس سختی، بر مبنای حالتی توسعه یافته‌اند که در آن مبدأ دستگاه مختصات در ابتدای المان قرار دارد. بنابراین، در مورد المان دوم که بازه آن $[1.5, 3]$ می‌باشد، لازم است پیش از استفاده از روابط استخراج شده، ابتدا محور مختصات به ابتدای المان منتقل شود. پس از اعمال این تغییر، تابع هندسی به‌روز شده و با استفاده از آن، محاسبه ماتریس سختی برای المان دوم انجام می‌پذیرد. این مرحله برای حفظ دقت محاسبات و سازگاری تحلیلی بین المان‌ها ضروری است. شکل کلی تیر در شکل ۹ نشان داده شده است. بارگذاری تیر شامل سه نیروی متمرکز در محل اتصال دو المان

در نقطه $x=1.5m$ می باشد که شامل یک نیروی افقی ۱ کیلونیوتن، یک نیروی عمودی ۱ کیلونیوتن و یک لنگر متمرکز به مقدار ۱ کیلونیوتن متر است. شعاع انحنای نسبی در رأس تیر (R_0) برابر 0.833 m محاسبه شده است.

برای ارزیابی اثر لاغری، تحلیل در سه نسبت مختلف شعاع به ضخامت (R/t) انجام گرفته است: ۲، ۵۰ و ۱۰۰ که به ترتیب نشان دهنده وضعیت های بسیار ضخیم، معمولی و بسیار لاغر در رفتار سازه ای می باشند. مابقی مشخصات مقطع همانند مثال ۶-۴ می باشد. پاسخ های سازه از نظر تغییر مکان های انتقالی و دورانی در محل بارگذاری برای هر سه حالت لاغری به دست آمده و در ادامه مورد مقایسه و تحلیل قرار خواهند گرفت. نتایج تغییر مکان در محل اعمال بار و واکنش های تکیه گاهی را برای تیر سهمی دوتکه تحت اثر بارگذاری متمرکز در جدول ۸ نشان داده می شود. این مقادیر برای شرایط تکیه گاهی متفاوت و در سه نسبت مختلف شعاع به ضخامت ارائه شده اند. مقایسه نتایج نشان می دهد که افزایش نسبت R/t (لاغرتر شدن المان ها) موجب افزایش محسوس تغییر مکان ها می گردد. همچنین، سیستم با تکیه گاه های گیردار تغییر مکان های کمتری نسبت به حالت دو سر مفصل از خود نشان می دهد که بیانگر افزایش سختی کلی سیستم در حالت گیردار است. علاوه بر تغییر مکان های حاصل از بارگذاری، مقادیر واکنش های تکیه گاهی نیز در جدول ۸ گزارش شده اند. این واکنش ها نشان دهنده سهم هر تکیه گاه در تحمل بارهای اعمالی بوده و تطابق آن ها با شرایط تعادل استاتیکی، صحت تحلیل عددی را تأیید می کند.

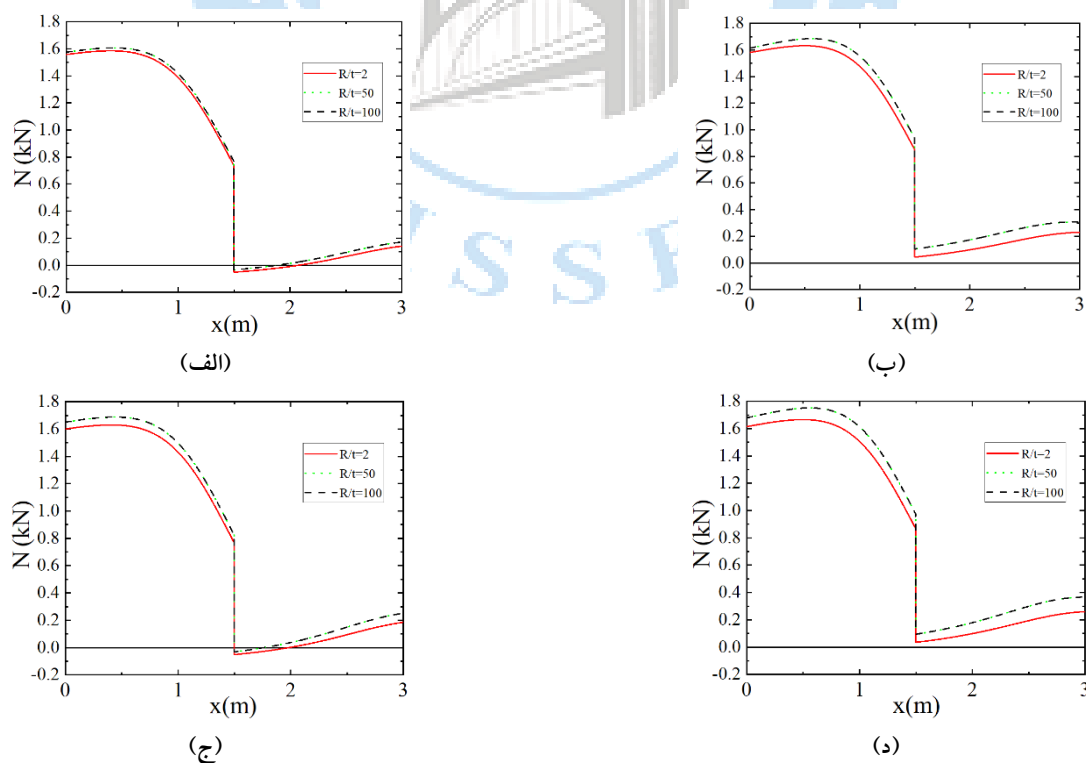
جدول ۸: مقادیر تغییر مکان در محل اعمال بار و واکنش های تکیه گاهی برای تیر سهمی دوتکه

شرایط تکیه گاهی	R/t	تغییر مکان زیر بار			واکنش های تکیه گاهی					
		$u(mm)$	$v(mm)$	$\phi(Rad)$	$R_{xL}(kN)$	$R_{yL}(kN)$	$M_L(kN.m)$	$R_{xR}(kN)$	$R_{yR}(kN)$	$M_R(kN.m)$
S-S	2	3.919E-4	-3.531E-5	1.577E-6	-1.108	-1.133	0	0.108	0.133	0
	50	3.136	-6.343	0.022	-1.139	-1.133	0	0.139	0.133	0
	100	25.056	-50.805	0.173	-1.140	-1.133	0	0.140	0.133	0
C-S	2	3.220E-4	-2.805E-5	1.571E-6	-1.214	-1.090	-0.129	0.214	0.090	0
	50	2.020	-7.020	0.022	-1.299	-1.073	-0.181	0.299	0.073	0
	100	16.131	-56.234	0.173	-1.299	-1.073	-0.181	0.299	0.073	0
S-C	2	3.309E-4	1.349E-4	1.428E-6	-1.146	-1.159	0	0.146	0.159	0.077
	50	1.520	-2.178	0.017	-1.210	-1.177	0	0.210	0.177	0.131
	100	12.130	-17.467	0.139	-1.210	-1.177	0	0.210	0.177	0.131
C-C	2	2.764E-4	1.151E-4	1.446E-6	-1.237	-1.115	-0.119	0.237	0.115	0.065
	50	0.655	-3.178	0.018	-1.348	-1.118	-0.165	0.348	0.118	0.119
	100	5.202	-25.480	0.142	-1.348	-1.118	-0.165	0.348	0.118	0.119

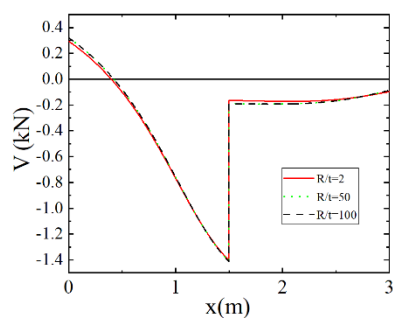


شکل ۹: تیر سهمی دوتکه، تحت بارگذاری متمرکز افقی، عمودی و لنگر در نقطه اتصال

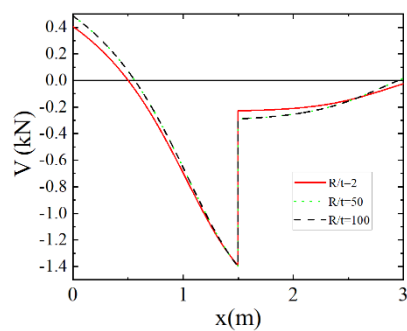
در ادامه، نمودارهای نیروهای داخلی شامل نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی برای تیر دو قسمتی مورد بررسی ارائه می‌شوند. نمودارهای نیروهای داخلی محوری، برشی و لنگر به ترتیب در شکل ۱۰، شکل ۱۱ و شکل ۱۲ نمایش داده شده است. این نمودارها به صورت مجزا برای شرایط تکیه‌گاهی از تیر رسم شده‌اند و تغییرات نیروهای داخلی در طول هر عضو به وضوح نمایش داده شده است. تحلیل این نمودارها امکان درک دقیق‌تری از توزیع تنش‌ها، نقاط بحرانی و رفتار مکانیکی تیر در برابر بارگذاری ترکیبی را فراهم می‌سازد. همچنین مقایسه نمودارها در شرایط مرزی مختلف و نسبت‌های لاغری متفاوت، تأثیر پارامترهای هندسی و مرزی را بر پاسخ سازه‌ای به خوبی نشان می‌دهد. در ادامه، نمودار تغییر شکل تیر دو بخشی تحت اثر بارگذاری ترکیبی شامل نیروی افقی، نیروی عمودی و لنگر متمرکز در محل اتصال دو المان در شکل ۱۳ نمایش داده شده است. این نمودار، پاسخ واقعی سازه به بارهای اعمالی را از نظر تغییر مکان و دوران نمایش می‌دهد و نحوه توزیع تغییر شکل در امتداد هر یک از بخش‌های سهموی تیر را تحت شرایط تکیه‌گاهی مختلف به تصویر می‌کشد. لازم به ذکر است که تغییر شکل‌ها به منظور نمایش واضح‌تر رفتار خمشی سازه، بزرگ‌نمایی شده ترسیم شده‌اند.



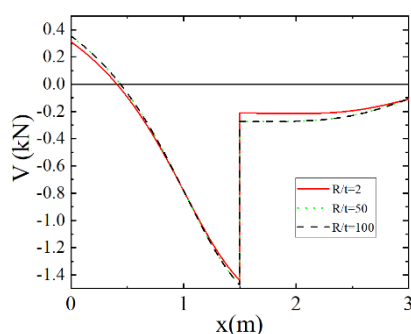
شکل ۱۰: نمودارهای نیروی داخلی محوری برای چهار حالت مختلف تکیه‌گاهی، (الف) دو سر مفصل (S-S)، (ب) گیردار-مفصل (C-S)، (ج) مفصل-گیردار (C-C)، (د) دو سر گیردار (S-C)



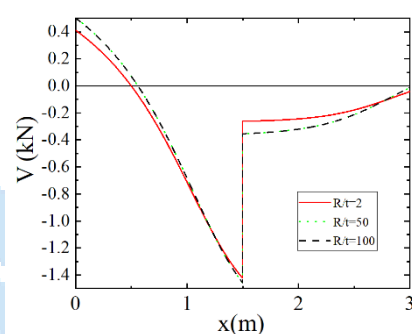
(الف)



(ب)

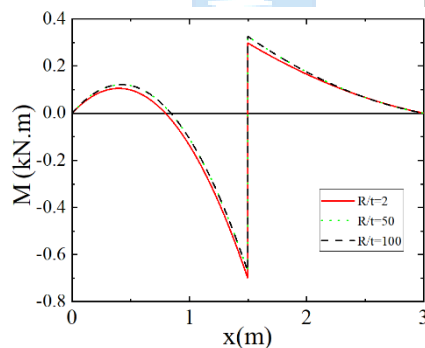


(ج)

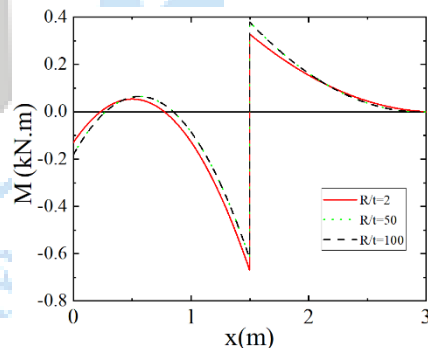


(د)

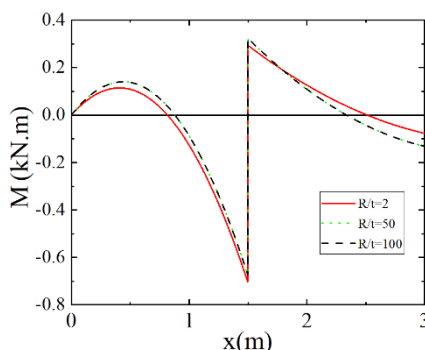
شکل ۱۱: نمودارهای نیروی داخلی برشی برای چهار حالت مختلف تکیه‌گاهی، (الف) دو سر مفصل (S-S)، (ب) گیردار-مفصل (C-S)، (ج) مفصل-گیردار (S-C)، (د) دو سر گیردار (C-C)



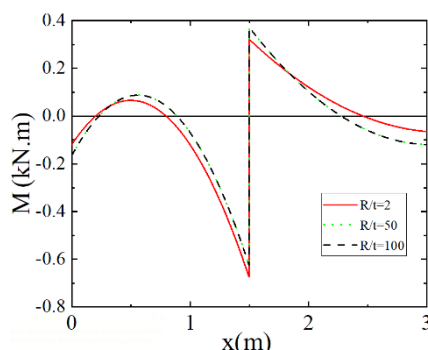
(الف)



(ب)

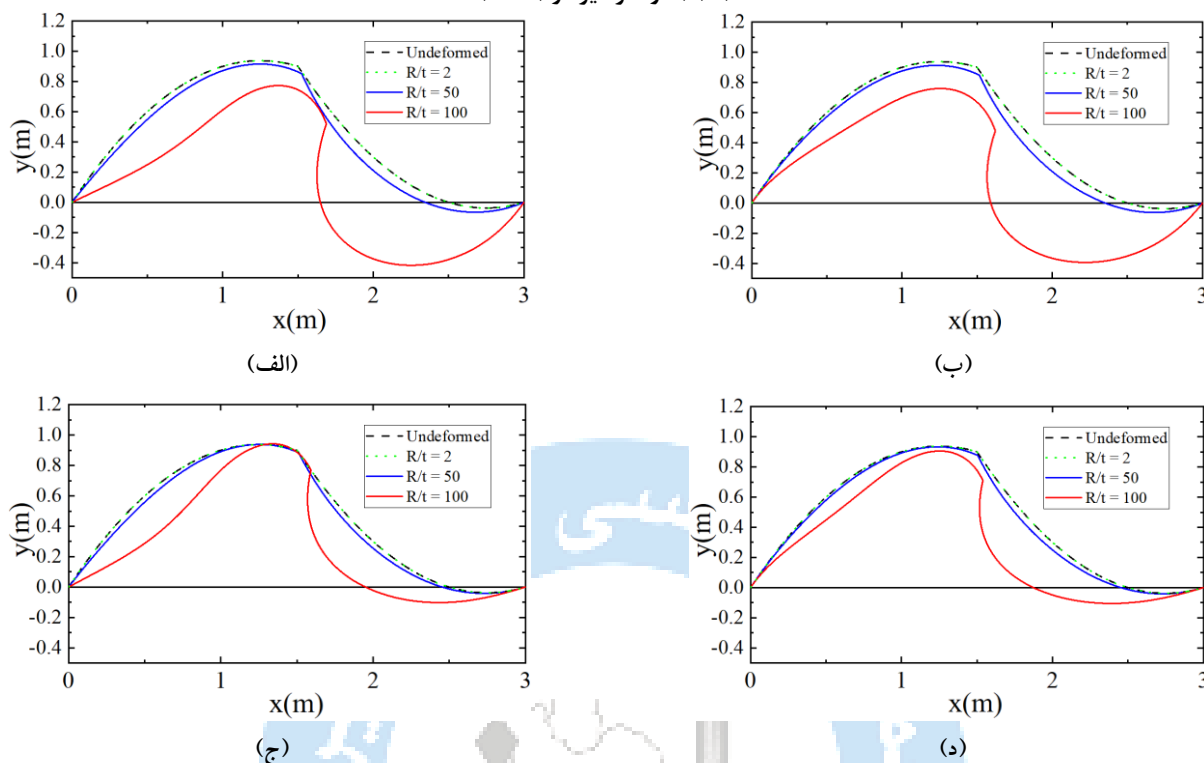


(ج)



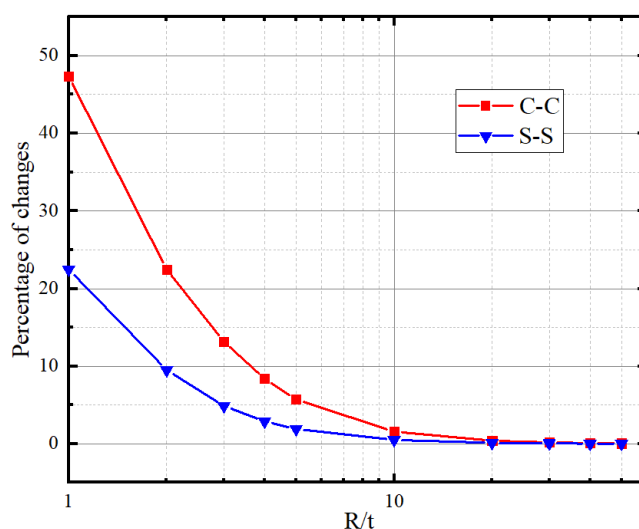
(د)

شکل ۱۲: نمودارهای لنگر داخلی برای چهار حالت مختلف تکیه‌گاهی، (۱) دو سر مفصل (S-S)، (۲) گیردار-مفصل (C-S)، (۳) مفصل-گیردار (S-C) و (۴) دو سر گیردار (C-C)



شکل ۱۳: تغییر شکل تیر تحت بارگذاری ترکیبی، (۱) دو سر مفصل (S-S)، (۲) گیردار-مفصل (C-S)، (۳) مفصل-گیردار (S-C)، (۴) دو سر گیردار (C-C)

نمودارهای ۱۰ تا ۱۲ به ترتیب توزیع نیروی محوری، برشی و لنگر خمشی را در طول تیر نمایش می‌دهند. مقایسه این نتایج نشان می‌دهد که مقادیر نیروهای داخلی به‌طور مستقیم به شرایط تکیه‌گاهی وابسته‌اند؛ به‌عنوان مثال، در نمودار لنگر خمشی، مقدار لنگر در تکیه‌گاه‌های مفصلی صفر بوده، در حالی که در شرایط گیردار مقادیری لنگر در تکیه‌گاه ایجاد می‌شود. از سوی دیگر، نمودار ۱۳ تغییر شکل تیر تحت بارگذاری را نشان می‌دهد. همان‌طور که انتظار می‌رود، در حالت گیردار به دلیل سختی بیشتر، تغییر شکل کمتری رخ داده و در حالت مفصلی میزان جابجایی‌ها به مراتب بزرگ‌تر است.



شکل ۱۴: درصد تغییرات جابجایی عمودی با و بدون اثر برشی برای تکیه‌گاه‌های مختلف

به‌منظور بررسی تأثیر لاغری و نقش مؤلفه برشی در تغییرشکل، در این بخش تنها یک بار متمرکز عمودی به مقدار ۱ کیلونیوتن در محل اتصال دو بخش تیر برای دو شرایط تکیه‌گاهی دو سر گیردار و دو سر مفصل اعمال شده است. سپس مقدار تغییر مکان عمودی در همین نقطه برای طیفی از لاغری‌های مختلف، در دو حالت با در نظر گرفتن اثر برشی و بدون آن، محاسبه شده و نتایج حاصل در جدول ۹ گردآوری شده‌اند. این مقایسه به‌خوبی نشان‌دهنده اهمیت لحاظ کردن سختی برشی در تیرهای نسبتاً ضخیم و همچنین کاهش تدریجی این اثر با افزایش نسبت لاغری است. در شکل ۱۴، نمودار درصد تغییرات تغییر مکان عمودی در محل اتصال دو تیر برحسب نسبت لاغری (R/t) برای دو نوع شرایط تکیه‌گاهی مختلف ترسیم شده است. این نمودار امکان مقایسه تأثیر لاغری و اثر سختی برشی در هر حالت را فراهم می‌سازد.

جدول ۹: مقادیر جابجایی عمودی در محل اتصال دو تیر برای لاغری‌های مختلف، با و بدون اثر برشی

شرایط تکیه‌گاهی	R/t	با اثر برش	بدون اثر برش	درصد تغییرات
S-S	1	3.086E-04	2.520E-04	22.47%
	2	1.413E-03	1.291E-03	9.50%
	3	4.047E-03	3.858E-03	4.88%
	4	8.977E-03	8.724E-03	2.90%
	5	1.697E-02	1.666E-02	1.91%
	10	1.298E-01	1.291E-01	0.49%
	20	1.026	1.025	0.12%
	30	3.455	3.453	0.06%
	40	8.184	8.181	0.03%
	50	15.978	15.975	0.02%
C-C	1	1.914E-04	1.299E-04	47.33%
	2	6.798E-04	5.552E-04	22.45%
	3	1.671E-03	1.477E-03	13.15%
	4	3.414E-03	3.150E-03	8.38%
	5	6.159E-03	5.826E-03	5.72%
	10	4.373E-02	4.305E-02	1.57%
	20	3.386E-01	3.372E-01	0.40%

30	1.136	1.134	0.18%
40	2.686	2.683	0.10%
50	5.241	5.238	0.06%

۷- نتیجه گیری

در این پژوهش، روشی دقیق برای استخراج ماتریس سختی تیرهای خمیده با هندسه سهمی درجه دو ارائه شد. با استفاده از انتگرال گیری عددی گاوس و در نظر گرفتن مؤلفه‌های مختلف جابجایی شامل تغییر مکان‌های افقی، عمودی و دوران، فرمول بندی ماتریس سختی برای تیرهای منحنی توسعه داده شد. صحت روش پیشنهادی با استفاده از چندین مثال عددی مورد بررسی قرار گرفت و نتایج حاصل از تحلیل اجزاء محدود با پاسخ‌های دقیق تحلیلی مقایسه شد. در تمامی مثال‌ها مشاهده شد که حتی با به کارگیری تعداد محدودی المان، پاسخ‌های به دست آمده دقت بالایی دارند. این موضوع نشان دهنده توانمندی بالای ماتریس سختی استخراج شده در ارائه نتایج دقیق با کمترین هزینه محاسباتی است. همچنین، تحلیل خطاها نشان داد که دقت در پیش بینی تغییر مکان دورانی نسبت به جابجایی‌های انتقالی بیشتر است. در ادامه، کارایی روش برای شرایط مرزی و بارگذاری‌های متنوع، از جمله تیرهای چندبخشی با بارهای مرکب، مورد ارزیابی قرار گرفت. اثر پارامترهای هندسی مانند شعاع انحنا و لاغری (R/t) نیز در نتایج تغییر مکان و توزیع نیروهای داخلی بررسی شد. علاوه بر آن، تأثیر تغییر شکل برشی در شرایط مختلف تکیه گاهی تحلیل گردید و نشان داده شد که در تیرهای با لاغری پایین، در نظر گرفتن برش می‌تواند اثر قابل توجهی بر پاسخ‌ها داشته باشد. در مجموع، نتایج این تحقیق حاکی از آن است که ماتریس سختی استخراج شده، نه تنها در مسائل ساده و کلاسیک عملکرد قابل قبولی دارد، بلکه در تحلیل سازه‌های منحنی پیچیده با شرایط مرزی و بارگذاری ترکیبی نیز دقت و پایداری بالایی از خود نشان می‌دهد. این ویژگی‌ها، آن را به ابزاری مناسب برای کاربرد در تحلیل سازه‌های انحنادار در محیط‌های مهندسی و صنعتی تبدیل می‌کند. همچنین، نتایج موردی بر اساس این پژوهش در دسترس قرار گرفتند:

- دقت پیش بینی تغییر مکان دورانی (چرخش) به طور کلی بالاتر از تغییر مکان‌های انتقالی (افقی و عمودی) بوده و خطای آن معمولاً کمتر از ۰/۵٪ گزارش شده است.
- استفاده از تنها یک المان دقت قابل قبولی (خطای کمتر از ۰/۵٪) فراهم کرد، اما با افزایش تعداد المان‌ها به ۲ یا ۴ المان، دقت به طور قابل توجهی بهبود یافت و خطاها در تمامی مؤلفه‌های تغییر مکان (افقی، عمودی و دورانی) به کمتر از ۰/۱٪ رسید.
- در شرایط تکیه گاهی مختلف (دو سر گیردار، دو سر مفصل، یک سر گیردار - یک سر آزاد، گیردار - مفصل)، خطای حداکثر تغییر مکان در حالت دو سر مفصل و بارگذاری افقی تا ۵/۵۶٪ (با ۲ المان) گزارش شد، اما با ۴ المان به کمتر از ۰/۰۵٪ کاهش یافت.
- برای بارگذاری‌های مرکب (نیروی افقی، عمودی و لنگر متمرکز)، توزیع نیروهای داخلی (محوری، برشی و لنگر خمشی) با دقت بیش از ۹۸٪ نسبت به نتایج تحلیلی یا مرجع هم خوانی داشت.
- در تیرهای با لاغری پایین ($R/t \leq 5$)، لحاظ کردن تغییر شکل برشی دقت پیش بینی تغییر مکان عمودی را تا ۱۵٪ بهبود داد. در لاغری‌های بالا ($R/t \geq 100$)، اثر برش ناچیز بود و خطای مرتبط کمتر از ۰/۵٪ گزارش شد.

۸- مراجع

- [1] Banan M. R., Karami G., Farshad M. (1989). Finite element analysis of curved beams on elastic foundations. Computers & Structures, 32(1), p. 45-53

- [2] Palaninathan R., Chandrasekharan P. (1985). Curved beam element stiffness matrix formulation. *Computers & structures*, 21(4), p. 663-9
- [3] Choi J. K., Lim J. K. (1993). Simple curved shear beam elements. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 9(8), p. 659-69
- [4] Kim J. G., Kim Y. Y. (1998). A new higher-order hybrid-mixed curved beam element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43(5), p. 925-40
- [5] Kosmatka J., Friedman Z. An accurate two-node shear-deformable curved beam element. 39th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit.
- [6] Sheikh A. H. (2002). New Concept to Include Shear Deformation in a Curved Beam Element. *Journal of Structural Engineering*, 128(3), p. 406-10
- [7] Tarn J.-Q., Tseng W.-D. (2012). Exact Analysis of Curved Beams and Arches with Arbitrary End Conditions: A Hamiltonian State Space Approach. *Journal of Elasticity*, 107(1), p. 39-63
- [8] Tufekci E., Eroglu U., Aya S. A. (2017). A new two-noded curved beam finite element formulation based on exact solution. *Engineering with Computers*, 33(2), p. 261-73
- [9] Ghuku S., Saha K. (2017). A Review on Stress and Deformation Analysis of Curved Beams under Large Deflection. *International Journal of Engineering and Technologies*, 11, p. 13-39
- [10] Sayyad A. S., Ghugal Y. M. (2019). A sinusoidal beam theory for functionally graded sandwich curved beams. *Composite Structures*, 226, p. 111246
- [11] Belarbi M.-O., Houari M. S. A., Hirane H., Daikh A. A., Bordas S. P. A. (2022). On the finite element analysis of functionally graded sandwich curved beams via a new refined higher order shear deformation theory. *Composite Structures*, 279(p. 114715
- [12] Savino P., Tondolo F. (2023). Two-node Curved Inverse Finite Element Formulations based on Exact Strain-displacement Solution. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 9(1), p. 259-73
- [13] Yang Z., Chen X., He Y., He Z., Zhang J. (2014). The Analysis of Curved Beam Using B-Spline Wavelet on Interval Finite Element Method. *Shock and Vibration*, 2014(1), p. 738162
- [14] Mathiyazhagan G., Vasiraja N., editors. Finite element analysis on curved beams of various sections. 2013 International Conference on Energy Efficient Technologies for Sustainability; 2013 10-12 April 2013.
- [15] Yang F., Sedaghati R., Esmailzadeh E. (2008). Free in-plane vibration of general curved beams using finite element method. *Journal of sound and vibration*, 318(4-5), p. 850-67
- [16] Wu J.-S., Chiang L.-K. (2003). Free vibration analysis of arches using curved beam elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58(13), p. 1907-36
- [17] Corrêa R. M., Arndt M., Machado R. D. (2021). Free in-plane vibration analysis of curved beams by the generalized/extended finite element method. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 88, p. 104244
- [18] Karamanli A., Wattanasakulpong N., Lezgy-Nazargah M., Vo T. P. (2023). Bending, buckling and free vibration behaviours of 2D functionally graded curved beams. *Structures*, 55(p. 778-98
- [19] Irons B. M. (1966). Engineering applications of numerical integration in stiffness methods. *AIAA journal*, 4(11), p. 2035-7
- [20] Wu Y., Hu D., Wu M., Hu X. (2006). A numerical-integration perspective on Gaussian filters. *IEEE transactions on signal processing*, 54(8), p. 2910-21
- [21] Marquis J., Wang T. (1989). Stiffness matrix of parabolic beam element. *Computers & structures*, 31(6), p. 863-70.
- [22] Rezaiee-Pajand M., Rajabzadeh-Safaei N. (2016). An explicit stiffness matrix for parabolic beam element. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 13(9), p. 1782-801
- [23] Vasheghani Farahani B., Berardo J., Andrade Pires F. (2014). An Investigation on Three Dimensional Plasticity through Using von-Mises and Hill Yield Criteria in Matlab and Ansys.
- [24] Huu Duong N., Matsumoto T., Nanakorn P. (2025). A planar curved Euler-Bernoulli beam element for large-displacement and small-strain analysis using NURBS curves with varying weights. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, p. 1-19
- [25] Jafari-Talookolaei R. A., Ghandvar H., Jumaev E., Khatir S., Cuong-Le T. (2025). Free vibration and transient response of double curved beams connected by intermediate straight beams. *Applied Mathematics and Mechanics*, 46(1), p. 37-62
- [26] Hong N. T. (2025). A novel isogeometric model for free vibration, buckling, and transient response of double-layer BFGP curved beams with elastic boundary condition using modified first-order shear theory. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 53(7), p. 5119-51
- [27] Wang Q., Wang Z., Chen T. Coupled out-of-plane bending and torsion vibration characteristics of variable stiffness circular curved beam under elastic constraints. *Journal of Vibration and Control*, 0(0), p. 10775463251332724

۹- پیوست

درایه اول تا سوم، سطر یکم ماتریس سختی به صورت زیر می باشد:

$$S_{11} = \frac{\begin{pmatrix} 3673.219EAa_2a_3L(1+\lambda^2)(1+\beta^2)(1+\mu^2)(\psi+\gamma+1.6\eta) \\ \left(-0.001L^2(\psi+7.098\eta+7.873\gamma)^2 + \frac{0.123L^2}{a_3\psi\gamma\eta}(\psi+\gamma+1.6\eta) \right) \\ \left(a_1(\psi\gamma+0.625\psi\eta+0.625\gamma\eta)+0.625a_2(\lambda^2\gamma\eta+\psi\mu^2\eta+1.6\psi\gamma\beta^2) \right) \\ \left(a_3(0.008\psi^2\gamma\eta+0.492\psi\gamma^2\eta+0.25\psi\gamma\eta^2) \right) \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \left(a_3L^2\psi\eta\gamma(\psi+7.098\eta+7.873\gamma)(0.113(b+0.113aL)\psi+(0.8b+0.4aL)\eta+0.887(b+0.887aL)\gamma)-L^2(\psi+1.6\eta+\gamma) \right)^2 \\ \left(8.873a_1\eta(\mu\psi+\lambda\gamma)-8.873a_2\eta(\mu\psi+\lambda\gamma)+14.197\beta\psi\gamma(a_1-a_2)+a_3(0.113b+0.013aL) \right) \\ \left((1+\lambda^2)\eta\gamma+7.098a_3(0.5b+0.25aL)\psi(1+\beta^2)\gamma+7.873a_3(0.887b+0.787aL)\psi\eta(1+\mu^2) \right) \\ \left(a_3L^2\psi\eta\gamma(\psi+7.098\eta+7.873\gamma)^2-78.730L^2(\psi+1.6\eta+\gamma) \right) \\ \left(a_1\psi\eta+a_2\mu^2\psi\eta+1.6a_1\psi\gamma+1.6a_2\beta^2\psi\gamma+a_1\eta\gamma+a_2\lambda^2\eta\gamma+0.0127a_3(1+\lambda^2)\eta\gamma+0.4a_3\psi(1+\beta^2)\gamma+0.787a_3\psi\eta(1+\mu^2) \right) \\ \left(a_3L^2\psi\eta\gamma(0.113(b+0.113aL)\psi+(0.8b+0.4aL)\eta+0.887(b+0.887aL)\gamma)^2 - \right. \\ \left. L^2(\psi+1.6\eta+\gamma) \left(a_2\psi\eta+a_1\mu^2\psi\eta+1.6a_2\psi\gamma+1.6a_1\beta^2\psi\gamma+a_2\eta\gamma+a_1\lambda^2\eta\gamma+a_3(0.113b+0.013aL)^2 \right) \right) \\ \left((1+\lambda^2)\eta\gamma+a_3(0.8b+0.4aL)^2\psi(1+\beta^2)\gamma+a_3(0.887b+0.787aL)^2\psi\eta(1+\mu^2) \right) \end{pmatrix}} \quad (14)$$

$$S_{13} = \left(\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} -0.061L^2(\gamma + 0.902\eta + 0.127\psi)^2 + \frac{L^2}{a_3\gamma\eta\psi} 0.061(\gamma + 1.6\eta + \psi) \\ a_3\gamma\eta(\gamma + 0.508\eta + 0.016\psi)\psi + a_1(1.270\gamma\eta + 2.032\gamma\psi + 1.270\eta\psi) + \\ a_2(1.270\gamma\eta\lambda^2 + 2.032\beta^2\gamma\psi + 1.270\eta\mu^2\psi) \end{array} \right) \\ -0.246b\gamma - 0.219aL\gamma - 2b\eta/9 - aL\eta/9 - 0.031b\psi - 0.003aL\psi - \\ \left(\begin{array}{l} 0.246(\gamma + 0.902\eta + 0.127\psi) \\ a_2(\eta\mu(0.123\eta + 0.077\psi)\psi + \gamma^2(0.077\eta\lambda + 0.123\beta\psi) + \gamma(0.123\eta^2\lambda + \eta(0.198\beta + 0.077\lambda + 0.077\mu)\psi + 0.123\beta\psi^2)) + \\ a_3\gamma\eta\psi(b(-0.018\eta\gamma - 0.046\gamma\psi - 0.018\eta\psi) + aL(-0.026\eta\gamma - 0.046\gamma\psi - 0.011\eta\psi)) + \\ a_1(\eta\mu(-0.123\eta - 0.077\psi)\psi + \gamma^2(-0.077\eta\lambda - 0.123\beta\psi) + \gamma(-0.123\eta^2\lambda + \eta(-0.198\beta - 0.077\lambda - 0.077\mu)\psi - 0.123\beta\psi^2)) \end{array} \right) \\ a_2(\eta\mu^2(0.123\eta + 0.077\psi)\psi + \gamma^2(0.077\eta\lambda^2 + 0.123\beta^2\psi) + \gamma(0.123\eta^2\lambda^2 + \eta(0.197\beta^2 + 0.077\lambda^2 + 0.077\mu^2)\psi + 0.123\beta^2\psi^2)) + \\ a_3\gamma\eta\psi(0.018\eta\gamma + 0.046\gamma\psi + 0.018\eta\psi) + a_1(\gamma^2(0.077\eta + 0.123\psi) + \eta(0.123\eta + 0.077\psi)\psi + \gamma(0.123\eta^2 + 0.352\eta\psi + 0.123\psi^2)) \end{array} \right) \quad (16)$$

که در آن‌ها،

$$\mu = (b + (1 + \sqrt{6})aL), \lambda = (b + (1 - \sqrt{6})aL), \beta = b + aL \quad (17)$$

$$\gamma = \sqrt{1 + \mu^2}, \psi = \sqrt{1 + \lambda^2}, \eta = \sqrt{1 + \beta^2} \quad (18)$$

$$a_1 = EA EI f_s, a_2 = EI GA, a_3 = EA GA L^2 \quad (19)$$