

Undamped Free Vibration of Temperature-dependent Nanocomposite Annular Plates Reinforced with Carbon Nanotubes Considering Various Boundary Conditions

Amir R. Masoodi^{1*}, Moein A. Ghandehari², Hossein Mottaghi³

1- Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

2- Ph.D. Candidate, Department of Civil Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

3- M.Sc. Student, Department of Civil Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

ABSTRACT

In this study, the perspective of first-order shear deformations theory and Hamilton's principle are employed to derive the equations describing the vibrational behavior of an annular plates made of nanocomposite material. The semi-analytical method of Generalized Differential Quadrature (GDQ) is employed to solve these equations. Four different boundary conditions are considered for the studied annular plate. The primary material in the nanocomposite structure consists of a combination of polymethyl methacrylate (PMMA) as the matrix and single-walled carbon nanotubes (SWCNT) as the nanoreinforcer. The mechanical properties of this heterogeneous nanocomposite are determined using the well-known "rule of mixtures" homogenization method. It is noteworthy that the material properties of the nanocomposite are considered temperature-dependent. The obtained results reveal an increase in structure frequencies with an increase in the lateral wave number. In this study, five different patterns used for distribution of nanoreinforcer. The analysis shows that the arrangement of the nanoreinforcer plays a significant role in the vibrational response of the plates. The results present, the largest frequencies associated with the X pattern and the smallest frequencies associated with the O pattern. Furthermore, the natural frequencies of the structure under various temperatures are provided in the results. The frequencies of annular plate decrease as the environment temperature increase.

ARTICLE INFO

Receive Date: 13 May 2024

Revise Date: 18 July 2024

Accept Date: 06 November 2024

Keywords:

Annular plate

First-order shear deformation (FSDT)

Generalized differential quadrature method (GDQM)

Temperature-dependent

Single-walled carbon nanotubes (SWCNTs)

All rights reserved to Iranian Society of Structural Engineering.

doi: [10.22065/jsce.2024.456619.3410](https://doi.org/10.22065/jsce.2024.456619.3410)

*Corresponding author: Amir R. Masoodi
Email address: ar.masoodi@um.ac.ir

شبیه‌سازی بدون شبکه نوسان آزاد نامیرای صفحه‌ی حلقوی کامپوزیتی مسلح به نانولوله‌های کربنی با شرایط مرزی و دماهای محیطی گوناگون

امیررضا مسعودی^{۱*}، معین الرضا قندهاری^۲ و حسین متقی طرهبهی^۳

۱- استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

۲- دانشجوی دکتری، گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

۳- دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

چکیده

در این پژوهش، رفتار ارتعاشی صفحه‌های حلقوی به عنوان یک المان سازه‌ای مهم در حوزه‌های مختلف مهندسی، از جمله عمران و مکانیک، مورد بررسی قرار می‌گیرند. با استفاده از نگره‌ی تغییرشکل‌های برشی مرتبه‌ی نخست و اصل همپلتون، معادله‌هایی که رفتار ارتعاشی یک صفحه حلقوی ساخته شده از نانوکامپوزیت را توصیف می‌کنند، در دسترس قرار می‌گیرند. برای حل این معادله‌ها از روش نیمه تحلیلی مربعات تفاضلی تعمیم یافته استفاده شده است. صفحه حلقوی مورد نظر، با چهار شرط مرزی مختلف تحت بررسی قرار می‌گیرد. نانوکامپوزیت استفاده شده در ساختار این سازه، ترکیبی از پلی متیل متاکریلات به عنوان ماده زمینه و نانولوله‌های کربنی تک جداره به عنوان مسلح کننده است. برای یافتن ویژگی‌های مکانیکی معادل این نانوکامپوزیت ناهمگن، از روش همگن‌سازی معروف به «قانون ترکیب» استفاده شده است. خاطر نشان می‌سازد، ویژگی‌های ماده نانوکامپوزیت وابسته به دما پنداشته شده است. در این پژوهش، اثر شماره موج جانبی بر روی ارتعاش صفحه بررسی شده و مشاهده گردیده است که با افزایش شماره موج جانبی، مقدارهای فرکانس سازه افزایش پیدا می‌کنند. مسلح کننده‌ها بر اساس پنج طرح مختلف در مقطع صفحه توزیع شده است. بر پایه نتایج، بزرگترین فرکانس‌ها مربوط به طرح ضربدری و کمترین فرکانس مربوط به طرح لوزی است. باید افزود، فرکانس‌های طبیعی سازه با افزایش دمای محیط کاهش می‌یابند.

کلمات کلیدی: صفحه حلقوی، نگره‌ی تغییر شکل برشی مرتبه نخست، روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته، وابستگی به دما، نانولوله‌های کربنی تک‌جداره.

شناسه دیجیتال:		شماره مقاله:				
doi:	10.22065/jsce.2024.456619.3410	چاپ	انتشار آنلاین	پذیرش	بازنگری	دریافت
	https://doi.org/10.22065/jsce.2024.456619.3410	۱۴۰۴/۰۳/۳۱	۱۴۰۳/۰۸/۱۶	۱۴۰۳/۰۸/۱۶	۱۴۰۳/۰۴/۲۸	۱۴۰۳/۰۲/۲۴
			*نویسنده مسئول:		امیررضا مسعودی	
			پست الکترونیکی:		ar.masoodi@um.ac.ir	

۱- مقدمه

یکی از اجزای مهم سازه‌ای که در علوم مهندسی عمران، مکانیک و هوافضا کاربرد دارد، صفحه‌های دایره‌ای حلقوی^۱ هستند. از این صفحه‌ها در قسمت‌های انتهایی سیلوها، در سازه کشتی‌ها و هواپیماها استفاده می‌شود. مثال دیگری از کاربرد این صفحه‌ها، مدلسازی پی-های حلقوی با این نوع از صفحه‌ها در مهندسی ژئوتکنیک است. برتری این صفحه‌ها نسبت به صفحه‌های حلقوی، اقتصادی بودن به دلیل استفاده کمتر از مصالح، همخوانی بیشتر با هندسه سازه و ایجاد امکان دسترسی است. پژوهش‌های فراوانی برای بررسی رفتار دینامیکی صفحه‌های حلقوی انجام شده است، که در ادامه به مواردی از آن اشاره می‌شود. نای و ژونگ [۱] با کمک از روش مربعات تفاضلی^۲ (DQM) به بررسی رفتار دینامیکی این صفحه‌ها با مصالح تابعی پرداختند. آن‌ها نشان دادند که این روش عددی توانایی خوبی برای محاسبه فرکانس‌های صفحه‌ی حلقوی دارد. مرکان و همکاران [۲] با کمک دو روش مربعات تفاضلی (DQM) و الگوریتم همپیچی منفرد گسسته^۳ (DSC) فرکانس‌های این نوع از صفحه را محاسبه کردند. آن‌ها نشان دادند که این دو روش می‌تواند با تقریب بسیار خوبی فرکانس‌های صفحه‌های دایروی و حلقوی را محاسبه کند. مشیر و همکاران [۳] با استفاده از نگره تغییر شکل برشی مرتبه نخست^۴ (FSDT) به بررسی رفتار ارتعاشی صفحه حلقوی با رفتار گرانروا-کشسان^۵ پرداختند. ترابی و انصاری [۴] در پژوهش خود رفتار ارتعاشی ناخطی ورق‌های حلقوی را بررسی کردند. آن‌ها مشاهده کردند که اعمال نیروی دمایی تأثیر بسزایی بر روی رفتار ارتعاشی صفحه خواهد داشت. وو و همکاران [۵] به بررسی ارتعاش‌های دامنه بزرگ یک صفحه حلقوی ساخته شده از مصالح مرکب پرداختند. آن‌ها مشاهده کردند که نحوه توزیع مواد مسلح کننده در مقطع صفحه باعث تغییر در فرکانس‌ها می‌شود. الفرجان و همکاران [۶] در پژوهش خود رفتار ارتعاشی یک صفحه حلقوی لایه‌ای به صورت سه بُعدی بررسی کردند. آن‌ها دریافتند که با افزایش تنش کششی باقیمانده، فرکانس‌های صفحه کاهش پیدا می‌کند. در پژوهش بعدی، واسارا و همکاران [۷] رفتار ارتعاشی صفحه‌های دایره‌ای و حلقوی دارای مقطع متخلخل را مطالعه کردند. در پژوهش مذکور مشاهده گردید که با افزایش ضریب تخلخل در صفحه، فرکانس‌ها کاهش پیدا می‌کنند. بابایی و ژلویکا [۸] اثر تکانه‌های دمایی^۶ را بر روی رفتار ارتعاشی صفحه حلقوی بررسی کردند. آن‌ها دریافتند که تنش تکانه‌های دمایی بسیار بیشتر از تکانه گرمایی است. جعفری نژاد و همکاران [۹] در پژوهش خود به مطالعه رفتار ارتعاشی و استاتیکی صفحه حلقوی پرداختند. ینگ و همکاران [۱۰] ارتعاش آزاد متقارن و نامتقارن صفحه حلقوی خارج از مرکز چرخان در محیط حرارتی یکنواخت مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها نشان دادند که افزایش دما موجب تغییر شکل مود ارتعاشی بنیادی از متقارن به نامتقارن می‌شود.

در دهه‌های اخیر، استفاده از مواد مرکب^۷ در اجزای سازه‌ها مورد توجه زیادی قرار گرفته است. نانوکامپوزیت‌ها موادی هستند که از دو بخش اصلی تشکیل شده‌اند. بخش اول که درصدی بیشتر از حجم را اشغال کرده است، ماده زمینه‌ای^۸ و بخش دیگر مواد مسلح کننده یا پرکننده ریز مقیاس^۹ است. ترکیب این دو بخش باعث می‌شود که مصالح جدیدتری با خواص بهبود یافته تولید شود. پژوهش‌های زیادی به بررسی رفتار ارتعاشی صفحه‌ها/پوسته‌ها/تیرها ساخته شده از مواد نانو کامپوزیت پرداختند. سبحانی و مسعودی [۱۱] به بررسی اثر ارتعاشی رفتار ارتعاشی پوسته‌های منحنی ساخته شده از نانوکامپوزیت‌ها پرداختند. قندهاری و همکاران [۱۲] در پژوهش خود رفتار ارتعاشی تیر-های مستقیم به هم پیوسته را بررسی کردند. هی و همکاران [۱۳] پارامترهای ارتعاشی صفحه حلقوی کامپوزیت لایه‌ای را مطالعه کردند.

¹ Annular Plate

² Differential Quadrature Method

³ Discrete Singular Convolution Method

⁴ First Shear Deformation Theory

⁵ Viscoelastic

⁶ Thermal Shock

⁷ Composite Materials

⁸ Matrix

⁹ Nanofillers

رضائی پژند و همکاران [۱۴] ه بررسی رفتار کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی با گرادیان تابعی محوری (AFG-CNTRC) پرداخته‌اند. در چارچوب نظریه تیر تیموشنکو، این مقاله به توسعه مدل Hencky bar-chain برای بررسی کمانش تیرهای AFG-CNTRC می‌پردازد.

برای حل معادله‌های حاکم بر مسئله در علوم مهندسی روش‌های عددی مختلفی ارائه شده است. از جمله این روش‌ها می‌توان به روش اجزای محدود، تفاضل محدود، المان‌های مرزی و روش‌های بدون شبکه نظیر مربعات تفاضلی و الگوریتم همپچی گسسته اشاره کرد. روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته^{۱۰} (GDQ) با استفاده از مجموعه‌ای از توابع پایه، مقادیر هر تابع را در هر نقطه از شبکه^{۱۱} محاسبه می‌کند. این توابع پایه به طور معمول چندجمله‌ای هستند. این روش مشتق‌های متغیر وابسته در هر نقطه را با ترکیب‌های خطی وزن‌دار از مقادیر در نقاط مجاور تخمین می‌زند. مزیت روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته نسبت به دیگر روش‌های عددی اجرای آسان و انجام محاسبات سبک‌تر است. همچنین، با این روش می‌توان با مجموعه محاسبات سبک‌تر به ماتریس سختی دست پیدا کرد. مزیت دیگر این روش، کاربرد آن در شبکه‌های نامنظم است. باید خاطر نشان کرد این روش دقت بالایی داشته و در علوم مختلفی نظیر دینامیک سیالات، انتقال حرارت، مکانیک و الکترومغناطیس کاربرد دارد. در مهندسی عمران و مکانیک، پژوهش‌های بسیاری نظیر [۱۵-۳۲] از این روش برای بررسی رفتارهای استاتیکی و دینامیکی تیرها، پوسته‌ها و صفحه‌ها استفاده کرده‌اند. هُنْگ [۳۳] به کمک نگره تغییر شکل برشی مرتبه سوم^{۱۲} (TSDT) و روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته به بررسی ارتعاش حرارتی صفحات ضخیم از جنس مواد با گرادیان تابعی پرداخت.

در پژوهش حاضر، رفتار ارتعاشی صفحه‌ی حلقوی ساخته شده از نانو کامپوزیت‌ها در شرایط دمایی مختلف بررسی شده است. در این پژوهش، از مصالح وابسته به دما استفاده شده است. مصالح این صفحه متیل متاکریلات^{۱۳} (PMMA) به عنوان ماده زمینه‌ای و نانولوله‌های کربنی تک جداره^{۱۴} (SWCNTs) به عنوان مسلح کننده هستند. معادله‌های حاکم بر مسئله به کمک روش نیمه تحلیلی مربعات تفاضلی تعمیم یافته حل و فرکانس‌های صفحه محاسبه می‌گردد. بر اساس مطالعات نویسندگان این مقاله، رفتار ارتعاشی صفحه‌های حلقوی ناقص در دماهای مختلف با در نظر گرفتن مصالح وابسته به دما، تاکنون مورد بررسی قرار نگرفته است. از این رو، در این پژوهش به این مهم پرداخته شده است و نوآوری اصلی این تحقیق در بررسی جامع و دقیق رفتار ارتعاشی صفحه‌های حلقوی ناقص در شرایط دمایی متغیر است. مراحل که در این پژوهش دنبال می‌شود در ادامه آورده شده است:

- در شروع، مشخصه‌های مکانیکی نانو کامپوزیت‌های با فن همگن سازی محاسبه می‌شود.
- با کمک از نگره تغییر شکل‌های برشی مرتبه اول و اصل همپلتون، معادله‌های حاکم بر مسئله بدست می‌آید.
- استفاده از فن مربعات تفاضلی تعمیم یافته برای حل معادله‌های حاکم بر مسئله.
- اعتبار سنجی معادله‌های و روش توسعه یافته برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی صفحه حلقوی
- حل مثال‌های عددی مختلف برای بررسی رفتار ارتعاشی این صفحه در شرایط مختلف دمایی، مرزی و هندسی.

¹⁰ Generalized Differential Quadrature Method

¹¹ Grid

¹² Third-order Shear Deformation Theory

¹³ Poly(methyl methacrylate)

¹⁴ Single-Walled Carbon Nanotube

۲- فن همگن سازی

برای مدل سازی یک صفحه‌ی حلقوی متشکل از ماده‌ی زمینه‌ای و نانو لوله‌های کربنی تک جداره، ابتدا باید مشخصات مکانیکی معادل محاسبه گردد. روش‌های مختلفی برای بدست آوردن مشخصات مکانیکی معادل نانوکامپوزیت‌های ارائه شده است. در این پژوهش، از قانون ترکیب^{۱۵} (ROM) برای محاسبه مشخصه‌های مصالح معادل^{۱۶} استفاده شده است.

$$V_r + V_{Matrix} = 1 \quad (۱)$$

$$V_r = \mu V_{CN} \quad (۲)$$

$$E_R^{11} = \eta_1 V_{CN} E_{CN}^{11} + V_M E_M \quad (۳)$$

$$E_R^{22} = \frac{\eta_2}{\frac{V_{CN}}{E_{CN}^{22}} + \frac{V_M}{E_M}} \quad (۴)$$

$$G_R^{12} = \frac{\eta_3}{\frac{V_{CN}}{G_{CN}^{12}} + \frac{V_M}{G_M}} \quad (۵)$$

$$E_M = \{3.52 - 0.0034(300 + \Delta T)\} \text{ GPa} \quad (۶)$$

$$E_{CNT}^{11} = 6.565376 - 1.76156 \left(\frac{T}{T_0}\right) + 1.13347 \left(\frac{T}{T_0}\right)^2 - 0.32260 \left(\frac{T}{T_0}\right)^3 + 0.03193 \left(\frac{T}{T_0}\right)^4 \text{ TPa} \quad (۷)$$

$$E_{CNT}^{22} = 8.22710 - 2.19725 \left(\frac{T}{T_0}\right) + 1.41176 \left(\frac{T}{T_0}\right)^2 - 0.40125 \left(\frac{T}{T_0}\right)^3 + 0.03964 \left(\frac{T}{T_0}\right)^4 \text{ TPa} \quad (۸)$$

$$G_{CNT}^{12} = 1.10442 + 1.88427 \left(\frac{T}{T_0}\right) - 1.47623 \left(\frac{T}{T_0}\right)^2 + 0.49029 \left(\frac{T}{T_0}\right)^3 - 0.05829 \left(\frac{T}{T_0}\right)^4 \text{ TPa} \quad (۹)$$

$$\nu_R = \nu_{CN} V_r + \nu_M V_M \quad (۱۰)$$

$$\rho_R = \rho_{CN} V_r + \rho_M V_M \quad (۱۱)$$

$$\kappa_R = \kappa_{CN} V_r + \kappa_M V_M \quad (۱۲)$$

$$\alpha_R = \frac{V_r E_{CN}^{11} \alpha_{CN} + V_M E_M \alpha_M}{V_r E_{CN}^{11} + V_M E_M} \quad (۱۳)$$

که در این روابط، V_{CN} و V_M به ترتیب نشان دهنده نسبت حجمی ماده زمینه‌ای و مسلح کننده است. مدول کشسان و برشی مسلح کننده‌ها با علامت‌های E_{CN}^{11} ، E_{CN}^{22} و G_{CN}^{12} نشان داده شده است. E_M و G_M مدول کشسان و برشی ماده زمینه‌ای است. η_i ($i = 1, 2, 3$) ضریب‌های بدون بُعدی هستند که بسته به حجم ماده مسلح کننده تعیین می‌شوند. مقادیر این ضرایب برای نسبت‌های

¹⁵ Rule of Mixture

¹⁶ Equivalent Material Properties






حجمی مختلف در جدول ۱ آورده شده است. K ضریب هدایت حرارتی معادل و μ ضریب نشان دهنده گونه‌ی توزیع مسلح کننده در مقطع عضو و α_{CN} ، α_R و α_M ضرایب انبساط حرارتی هستند. T و T . به ترتیب دمای محیط و دمای اتاق (۳۰۰ درجه کلوین) است.

جدول ۱: ضرایب بدون بُعد برای نسبت‌های حجمی مختلف CNTs

کسر حجمی CNTs	η_1	η_2	η_3
۰/۱۲	۰/۱۲۷۰	۱/۰۲۲	۰/۷۱۵۴
۰/۱۷	۰/۱۴۲۰	۱/۶۲۶	۱/۱۳۳۸
۰/۲۸	۰/۱۴۱۰	۱/۵۸۵	۱/۱۰۹۰

در این پژوهش، مسلح کننده‌ها با پنج طرح مختلف در مقطع صفحه حلقوی مدلسازی می‌شوند. برای مدلسازی ریاضی هر یک از این طرح‌ها، ضریبی در نسبت حجمی مسلح کننده اعمال می‌شود. جدول ۲ مقادیر این ضریب‌ها را برای هر کدام از این طرح‌ها نشان می‌دهد.

جدول ۲- ضرایب توزیع CNTs در مقطع صفحه

شماره طرح	۱	۲	۳	۴	۵
شماره طرح	یکنواخت	مثلی-۲	مثلی-۱	دایره‌ای	ضربدری
ضریب	۱	$\left(1+2\frac{z}{h}\right)$	$\left(1-2\frac{z}{h}\right)$	$4\left(0.5-\frac{ z }{h}\right)$	$4\left(\frac{ z }{h}\right)$
طرح					

در این پژوهش، اثر نقص^{۱۷} در مقطع صفحه نیز به کمک روابط ریاضی زیر بررسی شده است.

$$E_R^{\text{Imperfect}} = E_R(1-n) \quad (۱۴)$$

$$\nu_R^{\text{Imperfect}} = \nu_R(1-n) \quad (۱۵)$$

$$\rho_R^{\text{Imperfect}} = \rho_R(1-n) \quad (۱۶)$$

که در این روابط، n ضریب نقص مصالح است که می‌تواند مقداری بین صفر تا یک داشته باشد.

¹⁷ Imperfection

۳- مدلسازی صفحه حلقوی

قدم اول برای تحلیل رفتار ارتعاشی صفحه حلقوی، توصیف هندسی این صفحه است. با به کارگیری نگره تغییر شکل برشی مرتبه نخست، میدان جابه‌جایی سازه را می‌توان با کمک رابطه‌ی زیر محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} U(x, \theta, t) &= u(x, \theta, t) + \eta \phi_x(x, \theta, t) \\ V(x, \theta, t) &= v(x, \theta, t) + \eta \phi_\theta(x, \theta, t) \\ W(x, \theta, t) &= w(x, \theta, t) \end{aligned} \quad (17)$$

در این روابط، ϕ نشان دهنده‌ی تغییر شکل‌های چرخشی^{۱۸} در صفحه است. تغییر شکل‌ها در راستای طولی، شعاعی و ضخامت با U ، V و W نشان داده شده است. در صفحه میانی^{۱۹} مقادیر تغییر شکل‌ها در راستای طولی، شعاع و ضخامت با u ، v و w نشان داده شده است. با به کارگیری نگره تغییر شکل‌های برشی مرتبه نخست روابط کرنش‌های کلی^{۲۰} به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \\ \gamma_{x\eta} \\ \gamma_{x\eta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^M \\ \varepsilon_\theta^M \\ \gamma_{x\theta}^M \\ \gamma_{x\eta}^M \\ \gamma_{x\eta}^M \end{Bmatrix} + \eta \begin{Bmatrix} \psi_x \\ \psi_\theta \\ \psi_{x\theta} \\ \psi_{x\eta} \\ \psi_{x\eta} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

که در آن، ε_x کرنش طولی، ε_θ کرنش شعاعی، $\gamma_{x\theta}$ ، $\gamma_{x\eta}$ و $\gamma_{x\eta}$ کرنش‌های برشی هستند. ψ_i ها شاخصه‌های نشان دهنده‌ی خمیدگی سازه^{۲۱} است. ε_x^M ، ε_θ^M ، $\gamma_{x\theta}^M$ و $\gamma_{x\eta}^M$ نشان دهنده مقادیر کرنش در صفحه میانی است. با به کارگیری نگره دونل^{۲۲} کرنش‌های میان صفحه و شاخصه‌های خمیدگی صفحه به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^M \\ \varepsilon_\theta^M \\ \gamma_{x\theta}^M \\ \gamma_{x\eta}^M \\ \gamma_{x\eta}^M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{1}{R(x)} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\sin(\alpha)}{R(x)} u + \frac{\cos(\alpha)}{R(x)} w \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R(x)} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\sin(\alpha)}{R(x)} v \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \\ \frac{1}{R(x)} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\cos(\alpha)}{R(x)} v + \phi_\theta \end{Bmatrix} \quad (19)$$

¹⁸ Rotational Displacement

¹⁹ Middle Surface

²⁰ General Strains

²¹ Curvatures of the Structures

²² Donell's Theory

$$\begin{Bmatrix} \psi_x \\ \psi_\theta \\ \psi_{x\theta} \\ \psi_{x\eta} \\ \psi_{\theta\eta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{1}{R(x)} \frac{\partial \phi_\theta}{\partial \theta} + \frac{\sin(\alpha)}{R(x)} \phi_x \\ \frac{\partial \phi_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R(x)} \frac{\partial \phi_x}{\partial \theta} - \frac{\sin(\alpha)}{R(x)} \phi_\theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

با به کارگیری قانون هوک، می توان به شکل کرنش ها و تنش ها را به هم مرتبط ساخت

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_{x\theta} \\ \tau_{x\eta} \\ \tau_{\theta\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \\ \gamma_{x\eta} \\ \gamma_{\theta\eta} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

که در آن،

$$\begin{cases} Q_{11} = \frac{E_R^{11}}{1-(\nu_R)^2}, Q_{22} = \frac{E_R^{22}}{1-(\nu_R)^2} \\ Q_{12} = \frac{\nu_R E_R^{22}}{1-(\nu_R)^2} \\ Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = G_R^{12} \end{cases} \quad (22)$$

نیروهای داخلی را می توان با انتگرال گیری در راستای x بدست آورد.

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_{\zeta\theta} \end{pmatrix} d\eta \quad \begin{pmatrix} M_x \\ M_\theta \\ M_{\zeta\theta} \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \eta \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_{\zeta\theta} \end{pmatrix} d\eta \quad (23)$$

$$\begin{pmatrix} T_{x\eta} \\ T_{\theta\eta} \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \kappa \begin{pmatrix} \sigma_{x\eta} \\ \sigma_{\theta\eta} \end{pmatrix} d\eta$$

در رابطه‌های بالا، κ ضریب اصلاح برش^{۲۳} است که در این پژوهش مقدار آن برابر با $\frac{5}{6}$ در نظر گرفته شده. با در هم آمیختن رابطه‌های

۱۸، ۲۱ و ۲۳ می‌توان مقادیر نیروها و لنگرهای داخلی را با کمک از کرنش‌های صفحه میانی و شاخص‌های خمیدگی بدست آورد.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \\ T_{\theta\eta} \\ T_{x\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \gamma_{x\theta}^0 \\ \psi_x \\ \psi_\theta \\ \psi_{x\theta} \\ \gamma_{\theta\eta}^0 \\ \gamma_{x\eta}^0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

که در آن،

$$(A_i, B_i, D_i) = \int_{-0.5h}^{0.5h} (1, z, z^2) Q_i dz \quad (25)$$

با کمک از نگره همیلتون^{۲۴} می‌توان معادله‌های مرتبط با حرکت سازه را به شیوه‌ی زیر استخراج کرد.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [K - (\Gamma + \Theta)] dt = 0 \quad \text{at } t = t_1, t_2; \delta u = \delta v = \delta w = \delta f_x = \delta f_\theta = 0 \quad (26)$$

که در این رابطه، δK بیانگر انرژی جنبشی^{۲۵} مرتبط به سازه است که با کمک از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید.

$$\delta K = \int_V \rho (\dot{U} \delta \dot{U} + \dot{V} \delta \dot{V} + \dot{W} \delta \dot{W}) dV, \quad dV = R(x) dx d\theta d\eta \quad (27)$$

انرژی کرنشی^{۲۶} در رابطه‌ی ۲۵ به شیوه زیر محاسبه می‌شود،

$$\delta \Theta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^{2\pi L} \int_0^{\theta} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \tau_{x\theta} \delta \gamma_{x\theta} + \kappa \tau_{x\eta} \delta \gamma_{x\eta} + \kappa \tau_{\theta\eta} \delta \gamma_{\theta\eta}) R(x) dx d\theta d\eta \quad (28)$$

همچنین، مقدار کار مجازی^{۲۷} با استفاده از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌گردد.

²³ Shear Correction Factor

²⁴ Hamilton's Method

²⁵ Kinetic Energy

²⁶ Strain Energy

²⁷ Virtual Work

$$\delta \Gamma = \int_0^{2\pi} \int_0^L (\delta w) R(x) dx d\theta \quad (29)$$

در پایان، با کمک از نگره گرین-گوس و انتگرال گیری در راستای x می توان معادله های حاکم بر مسئله را بدست آورد.

$$\frac{1}{R(x)^2} \left[\begin{aligned} &(A_{11} FU + B_{11} FX)R(x)^2 + (-CWN(B_{12} + B_{66})FT - CWN(A_{12} + A_{66})FV) \\ &+ FU A_{11} + FX B_{11})R(x) + CWN(B_{22} + B_{66})FT + (-CWN^2 A_{66} - A_{22})FU \\ &+ CWN(A_{22} + A_{66})FV - FX(CWN^2 B_{66} + B_{22}) \end{aligned} \right] \quad (30)$$

$$= -FU I_1 - FX I_2$$

$$\frac{1}{R(x)^2} \left[\begin{aligned} &(FT B_{66} + FV A_{66})R(x)^2 + (CWN(A_{12} + A_{66})FU + CWN(B_{12} + B_{66})FX) \\ &+ FT B_{66} + FV A_{66})R(x) + (-CWN^2 B_{22} - B_{66})FT + CWN(A_{22} + A_{66})FU \\ &+ (-CWN^2 A_{22} - A_{66})FV + CWN FX (B_{22} + B_{66}) \end{aligned} \right] \quad (31)$$

$$= -FV I_1 - FT I_2$$

$$\frac{1}{R(x)^2} \left[\begin{aligned} &((\kappa A_{55} + NT)FW + FX \kappa A_{55})R(x)^2 - \kappa(CWN FT A_{44} - FX A_{55}) \\ &- A_{55} FW)R(x) - FW \kappa CWN^2 A_{44} \end{aligned} \right] \quad (32)$$

$$= -FW I_1$$

$$\frac{1}{R(x)^2} \left[\begin{aligned} &(FX \kappa A_{55} - FW \kappa A_{55} + D_{11} FX + B_{11} FU)R(x)^2 + (CWN(D_{12} + D_{66})FT) \\ &- CWN(B_{12} + B_{66})FV + D_{11} FX + B_{11} FU)R(x) + (-CWN^2 D_{66} - D_{22})FX \\ &+ CWN(D_{22} + D_{66})FT + (-CWN^2 B_{66} - B_{22})FX + CWN(D_{22} + D_{66})FT \\ &+ (-CWN^2 B_{66} - B_{22})FU + CWN FV (B_{22} + B_{66}) \end{aligned} \right] \quad (33)$$

$$= -FU I_2 - FX I_3$$

$$\frac{1}{R(x)^2} \left[\begin{aligned} &(-FT \kappa A_{44} + D_{66} FT + FV B_{66})R(x)^2 + (CWN(B_{12} + B_{66})FU + \\ &CWN(D_{12} + D_{66})FX - CWN FW \kappa A_{44} + D_{66} FT + B_{66} FV)R(x) \\ &+ (-CWN^2 D_{22} - D_{66})FT + CWN(B_{22} + B_{66})FU \\ &+ (-CWN^2 B_{22} - B_{66})FV + CWN FX (D_{22} + D_{66}) \end{aligned} \right] \quad (34)$$

$$= -FV I_2 - FT I_3$$

که در این رابطه ها، CWN همان شماره موج محیطی²⁸ و به ترتیب FU، FV، FW، FT و FX مقادیر مشتق ها در راستای u، v، w، ϕ_x و ϕ_θ است. همچنین، در این رابطه سازی از رابطه ی زیر نیز استفاده شده است.

²⁸ Circumferential Wave Number

$$\begin{cases} u(x, \theta, t) \\ v(x, \theta, t) \\ w(x, \theta, t) \\ \phi_x(x, \theta, t) \\ \phi_\theta(x, \theta, t) \end{cases} = \cos(\omega_n t) \begin{cases} \sin(CWN \theta)FU(x) \\ \cos(CWN \theta)FV(x) \\ \sin(CWN \theta)FW(x) \\ \sin(CWN \theta)FX(x) \\ \cos(CWN \theta)FT(x) \end{cases} \quad (35)$$

همچنین،

$$R(x) = R_{in} + x_i \quad (36)$$

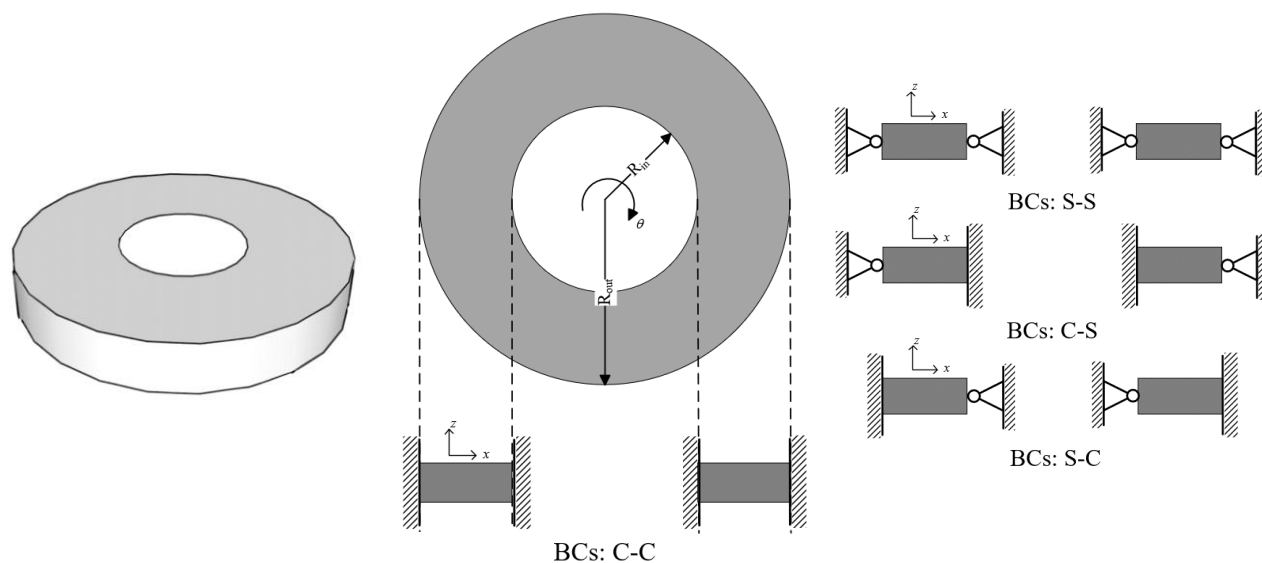
$R(x)$ مقادیر مختلف شعاع صفحه برای نقاط مختلف شبکه است. x_i مختصات نقاط شبکه بندی است که با کمک از رابطه‌ی زیر تعیین می‌گردد.

$$x_i = \left[(R_{out} - R_{in}) \frac{1 - \cos\left(\frac{i-1}{N-1}\pi\right)}{2} \right] \quad (37)$$

که در این رابطه N تعداد نقاط شبکه است که در این پژوهش ۱۵ عدد نقطه انتخاب شده است. همچنین مقادیر I_i ($i=1, 2, 3$) با کمک از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌گردد.

$$(I_1, I_2, I_3) = \int_{-0.5h}^{0.5h} \rho(z) (1, z, z^2) dz \quad (38)$$

شکل ۱ شمایی از این صفحه حلقوی شرایط مرزی مختلف را نشان می‌دهد.



شکل ۱: شماتیکی از صفحه‌ی حلقوی و شرایط مرزی مختلف این صفحه

برای مدل‌سازی شرایط مرزی، رابطه‌های ریاضی زیر به کار رفته است.

Clamped :

$$u = v = w = \phi_x = \phi_\theta = 0$$

Simple :

$$N_x = M_x = v = w = \phi_\theta = 0$$

(۳۹)

روابط مربوط به N_x و M_x در رابطه‌ی شماره‌ی ۴۵ ارائه گردیده است.

۴- روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته (GDQ)

در این پژوهش، از روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته برای حل معادله‌های حاکم بر مسئله استفاده شده است. این روش توسط شو [۲۷] برای حل معادله‌ها در مکانیک سیالات معرفی و سپس در سال ۲۰۰۵ برای دیگر علوم توسعه یافت [۲۸]. در این روش، ضرایب وزنی به کمک رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$W_j(x) = \frac{w(x)}{(x-x_j)w^{(1)}(x)}, \quad j=1, 2, \dots, N \quad (۴۰)$$

که در اینجا:

$$w(x) = \prod_{i=1}^N (x-x_i) \quad (۴۱)$$

$$w^{(1)}(x) = \prod_{i=1, i \neq j}^N (x_j - x_i)$$

سپس، با در نظر گرفتن روابط بازگشتی، معادلات زیر برای تعیین ضریب وزنی برای مشتق اول و مشتق‌های بالاتر (n) معرفی می‌شوند:

$$c_{ji}^{(1)} = \begin{cases} \frac{w^{(1)}(x_j)}{(x_j - x_i) w^{(1)}(x_j)}, & \text{when } i \neq j \\ - \sum_{k=1, j \neq k}^N c_{jk}^{(1)}, & \text{when } i = j \end{cases} \quad (42)$$

$$c_{ji}^{(n)} = \begin{cases} n \left(c_{jj}^{(n-1)} c_{ji}^{(1)} - \frac{c_{ji}^{(n-1)}}{x_j - x_i} \right), & \text{when } i \neq j \\ - \sum_{k=1, j \neq k}^N c_{jk}^{(n)}, & \text{when } i = j \end{cases}$$

با حل مقادیر ویژه مسأله در جبر خطی، می‌توان فرکانس‌های طبیعی سیستم را از معادله زیر به دست آورد:

$$\left| D_{eff} - \omega^2 M_{eff} \right| = 0 \quad (43)$$

در اینجا، D_{eff} و M_{eff} به ترتیب ماتریس سختی مؤثر و ماتریس جرم مؤثر هستند. این ماتریس‌ها به شکل زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} [D_{eff}] &= [D_I] - [D_{IB}] [D_B]^{-1} [D_{BI}] \\ [M_{eff}] &= [M_I] \end{aligned} \quad (44)$$

که، D_I ماتریس سختی مرتبط با گره‌های درون دامنه، D_{IB} ماتریس سختی داخلی مرتبط با شرایط مرزی و D_B ماتریس سختی شرایط مرزی است. یکی از چالش‌های عددی در روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته وارد کردن شرایط مرزی است. در این پژوهش شرایط مرزی برای حالت گیردار و ساده برای قسمت داخلی صفحه‌ی حلقوی به صورت زیر وارد می‌شود.

Clamped :

$$FU(x_1) = FV(x_1) = FW(x_1) = FX(x_1) = FT(x_1) = 0$$

Simple :

$$\begin{aligned} A_{11} \left(\sum_{g=1}^N m(1)_{1,g} FU(x_g) \right) - \frac{A_{12} CWN}{R_1} FV(x_1) + \frac{A_{12} S}{R_1} FU(x_1) + \frac{A_{12} C}{R_1} FW(x_1) + B_{11} \left(\sum_{g=1}^N m(1)_{1,g} FX(x_g) \right) \\ + \frac{B_{12} S}{R_1} FX(x_1) - \frac{B_{12} CWN}{R_1} FT(x_1) = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

$$B_{11} \left(\sum_{g=1}^N m(1)_{1,g} FU(x_g) \right) + \frac{B_{12} S}{R_1} FU(x_1) - \frac{B_{12} CWN}{R_1} FV(x_1) + D_{11} \left(\sum_{g=1}^N m(1)_{1,g} FX(x_g) \right) + \frac{D_{11} S}{R_1} FX(x_1) + \frac{B_{12} C}{R_1} FW(x_1) - \frac{D_{11} CWN}{R_1} FT(x_1) = 0$$

$$FV(x_1) = FW(x_1) = FT(x_1) = 0$$

۵- راستی آزمایشی روش پیشنهادی

در این پژوهش، برنامه‌ای برای محاسبه فرکانس‌های ورق حلقوی در حالت ارتعاش آزاد با کمک از روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته توسعه داده شده است. برای نمایش عملکرد صحیح این برنامه و روش محاسبه، فرکانس‌های طبیعی بدست آمده از این برنامه با فرکانس‌های بدست آمده برای مثالی مشابه در پژوهش‌های یاس و تاهونه [۲۹] و نه و ژونگ [۱] مقایسه شده است. یاس و همکاران [۳۰] در پژوهش خود به بررسی ارتعاش آزاد سه بُعدی یک ورق دایره‌ای حلقوی متشکل از مواد هدفمند بر روی بستر برشی، پرداختند. آن‌ها در این پژوهش از روش نیمه تحلیلی مربعات تفاضلی (DQM) استفاده کردند. در پژوهش دیگر، نه و ژونگ [۱] فرکانس‌های طبیعی ورق دایره‌ای حلقوی را در محیط دو بُعدی اندازه گیری کردند. آن‌ها علاوه بر استفاده از روش نیمه تحلیلی، از برنامه Ansys برای محاسبه فرکانس‌ها استفاده کردند. مثالی که در این پژوهش‌ها بررسی شده است صفحه‌ای حلقوی با قطر خارجی ۲، قطر داخلی ۰/۲ و ضخامت ۰/۱ متر که شرایط مرزی آن گیردار-گیردار است. مشخصات مکانیکی مصالح این صفحه همسان به قرار زیر است:

$$E = 380 \times 10^9 \text{ Pa}, \rho = 3800 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}, \nu = 0.3$$

برای بدون بُعد کردن فرکانس‌های بدست آمده، از رابطه‌ی زیر استفاده شده است.

$$\omega = \omega \times h \times \sqrt{\frac{\rho}{E \times (1-\nu) \times (1+\nu) \times (1-2\nu)}} \quad (46)$$

در جدول ۳ مقادیر فرکانس‌های بدست آمده برای مُد ارتعاشی اول از پژوهش حاضر و پژوهش‌های مرجع آورده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، مقادیر فرکانس‌های بدست آمده در همه‌ی این پژوهش‌ها با افزایش شماره موج محیطی، فرکانس‌های صفحه افزایش پیدا کرده است. همچنین با مقایسه مقادیر دیگر پژوهش‌ها با پژوهش حاضر می‌توان نتیجه گرفت که برنامه مورد نظر با کمترین خطا قابلیت محاسبه‌ی فرکانس‌های صفحه حلقوی را اندازه گیری کند. لازم به یادآوری است در این پژوهش، مدلسازی صفحه به صورت یک بُعدی بود است.

جدول ۳: فرکانس‌های مد اول بدون بُعد شده صفحه حلقوی با شرایط مرزی گیردار-گیردار

شماره موج محیطی	ω			خطای پاسخ (%)
	مرجع [۳۴]	مرجع [۱]	پژوهش حاضر	
۰	۰/۰۸۰۱	۰/۰۸۱۰	۰/۰۸۱۳	٪ ۰/۳۲
۱	۰/۰۸۳۱	۰/۰۸۳۹	۰/۰۸۳۰	٪ ۱/۰۴

۲ ۰/۰۹۵۵ ۰/۰۹۶۳ ۰/۱۰۲۰ ٪ ۵/۹۳

ژو و همکاران [۳۱] با کمک نگره همیلتون به بررسی رفتار ارتعاشی صفحه دایره‌ای و حلقوی پرداختند. مشخصات مکانیکی مصالح مورد استفاده در این پژوهش:

$$E = 380 \text{ GPa}, \nu = 0.3, \rho = 3800 \text{ kg/m}^3$$

جدول ۴ فرکانس‌های طبیعی یک صفحه‌ی حلقوی ساخته شده با مصالحی با مشخصات بالا برای این دو پژوهش نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود برای شرایط مرزی ساده نیز برنامه و روش توسعه پیدا کرده می‌تواند با دقت مناسبی فرکانس‌های یک صفحه حلقوی را محاسبه کند.

جدول ۴: فرکانس‌های مد اول بدون بُعد شده صفحه حلقوی با شرایط مرزی ساده-ساده

شماره مود	ω				
	۱	۲	۳	۴	۵
مرجع [۳۵]	۲۸/۱۲۲	۱۱۰/۵۶۰	۲۴۷/۶۹۰	۴۳۹/۶۱۰	۶۸۶/۳۲۰
پژوهش حاضر	۲۷/۷۶۸	۱۱۰/۱۶۷	۲۴۷/۲۹۲	۴۳۹/۲۳۰	۶۸۶/۰۴۸

۶- نمونه‌های عددی

هدف این مقاله بررسی رفتار ارتعاشی یک صفحه‌ی حلقوی بر روی شرایط مرزی گیردار-گیردار، ساده-ساده و یا ترکیبی از آن است. مصالحی که در این صفحه استفاده شده است ترکیبی از پلیمر و نانو لوله‌های کربنی است. مشخصات مکانیکی این مصالح به دمای محیط وابسته است. همچنین، دمای محیط به صورت یک نیروی وارد مسئله می‌شود. مشخصات هندسی صفحه‌ای که در این پژوهش در نظر گرفته شده است دارای شعاع خارجی یک متر (R_{out})، شعاع داخلی ۰/۱ متر (R_{in}) و ضخامت ۰/۱ متر است. در مثال اول افزایش دمای محیط به طور یکسان در بالا و پایین مقطع این صفحه مورد ارزیابی قرار گرفته است. برای مصالح این صفحه از پلی متیل متاکریلات به عنوان ماده‌ی زمینه‌ای و از نانو لوله‌های کربنی تک جداره به عنوان مسلح کننده استفاده شده است. نسبت حجمی مواد نانو برای این مثال ۰/۱۷ درصد انتخاب شده و آن‌ها به طور یکنواخت در مقطع صفحه توزیع شده‌اند. جدول ۵ مدهای ارتعاشی اول تا سوم برای این صفحه در دماهای محیطی مختلف نشان می‌دهد. همانطور که انتظار می‌رفت، فرکانس ارتعاشی صفحه با افزایش مد ارتعاشی افزایش پیدا کرده است. مطابق این جدول، با افزایش شماره موج محیطی مقدار فرکانس‌ها افزایش یافته است. در بررسی اثر دما، افزایش دمای محیط باعث کاهش فرکانس‌ها شده است. با افزایش دما، مشخصات مکانیکی پلیمر و نانو لوله‌های کربنی کاهش پیدا می‌کنند [۱۲، ۳۱]. از این رو، کاهش مقدارهای مدول و چگالی یا افزایش درجه‌ی حرارت محیط، باعث کاهش فرکانس‌های صفحه می‌گردد. موارد گفته شده برای هر دو شرایط مرزی گیردار-گیردار و ساده-ساده برقرار است. با مقایسه مقادیر فرکانس‌ها می‌توان گفت که:

$$C-C > S-S > S-C > C-S$$

با مقایسه دو شرایط مرزی C-S و S-C، دلیل بزرگتر بودن فرکانس‌های S-C نسبت به C-S، بزرگتر بودن طول کمائی از صفحه حلقوی است که شرایط گیردار را دارد. لازم به ذکر است حرف اول از سمت چپ نشان دهنده شرایط مرزی داخل حلقه و حرف دوم نشان دهنده شرایط مرزی بیرونی است.

جدول ۵: سه فرکانس طبیعی اول صفحه حلقوی برای شرایط مرزی مختلف در دماهای مختلف و شماره موج متفاوت

CWN	T	C-C			S-S			C-S			S-C		
		ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
۰	۳۰۰	۴۱۶/۹۸۹	۶۲۳/۵۸۳	۸۵۴/۶۷۶	۳۸۴/۸۱۲	۶۲۳/۵۸۳	۹۵۸/۸۸۳	۳۰۳/۷۹۶	۶۲۳/۵۸۳	۷۱۹/۴۸۵	۳۵۴/۵۸۳	۶۲۳/۵۸۳	۷۳۷/۱۱۰
	۵۰۰	۳۰۰/۸۹۹	۵۳۲/۰۶۶	۶۰۱/۵۴۱	۳۴۳/۵۳۰	۵۳۲/۰۶۶	۸۳۳/۵۱۴	۲۶۸/۳۸۰	۵۳۲/۰۶۶	۶۲۵/۴۹۰	۳۰۹/۱۹۵	۵۳۲/۰۶۶	۶۳۷/۲۵۰
	۸۰۰	۲۸۰/۳۰۰	۳۵۲/۷۶۳	۵۷۲/۴۵۵	۲۵۰/۲۲۳	۳۵۲/۷۶۳	۵۷۰/۶۵۱	۱۹۲/۸۲۸	۳۵۲/۷۶۳	۴۲۸/۷۸۱	۲۱۲/۷۷۱	۳۵۲/۷۶۳	۴۳۲/۵۸۱
۱	۳۰۰	۴۴۴/۹۷۴	۸۸۷/۷۱۸	۱۳۶۷/۴۴	۲۷۶/۲۸۷	۴۲۵/۴۰۵	۹۸۸/۳۲۹	۳۳۹/۵۷۰	۷۴۲/۸۲۳	۱۱۲۶/۹۶	۳۷۴/۹۹۰	۷۵۷/۴۰۰	۱۱۵۲/۴۰
	۵۰۰	۳۳۱/۶۲۱	۶۳۷/۶۴۱	۹۷۸/۴۴	۱۰۲/۴۸۵	۳۸۳/۰۱۹	۸۵۹/۸۷۵	۳۰۲/۹۰۳	۶۴۶/۰۵۹	۹۸۶/۷۲۹	۳۲۸/۹۰۹	۶۵۵/۳۸۸	۹۹۱/۱۲۰
	۸۰۰	۳۰۱/۷۴۲	۵۹۱/۷۴۸	۸۸۹/۳۶	۹۸/۵۳۶۹	۲۸۳/۰۴۸	۵۸۹/۹۸۷	۲۲۰/۶۶۴	۴۴۳/۴۰۲	۶۶۵/۱۷۵	۲۳۰/۳۴	۴۴۵/۸۹۳	۶۶۶/۳۷۶
۴	۳۰۰	۹۰۱/۳۸۸	۱۳۴۱/۸۶	۱۷۶۹/۶۳	۵۱۰/۰۸۳	۵۱۰/۰۸۳	۱۴۳۰/۰۷	۷۸۸/۳۴۹	۱۱۰۳/۳۷	۱۴۱۷/۳۹	۷۹۹/۴۷۰	۱۱۰۴/۹۷	۱۴۱۹/۱۶
	۵۰۰	۷۳۲/۲۷۹	۱۰۵۰/۹۶	۱۳۵۷/۳۰	۱۹۹/۰۵۱	۸۰۸/۲۷۴	۱۳۳۶/۶۳	۶۸۹/۱۵۵	۹۵۳/۴۱۵	۱۲۱۹/۲۳	۶۹۶/۰۳۴	۹۵۴/۱۲۸	۱۲۲۰/۲۵
	۸۰۰	۵۶۶/۴۳۳	۸۳۹/۲۳۲	۱۱۰۳/۰۸	۱۱۲/۳۳۳	۵۶۱/۳۴۱	۸۳۸/۷۳۴	۴۷۶/۶۶۹	۶۴۵/۹۱۱	۸۱۹/۵۸۷	۴۷۸/۵۰۷	۶۴۵/۹۲۸	۸۱۹/۸۵۱
۸	۳۰۰	۱۵۵۵/۶۵	۲۰۳۴/۷	۲۴۷۹/۹۶	۱۵۹۲/۴۴	۱۶۹۰/۵۴	۲۱۲۹/۷۹	۱۴۴۴/۷۰	۱۷۷۳/۱۵	۲۰۶۱/۱۱	۱۴۵۲/۷۴	۱۷۷۳/۲۴	۲۰۶۱/۳۸
	۵۰۰	۱۲۸۱/۴۰	۱۶۳۲/۰۶	۱۹۵۵/۱۶	۱۳۷۳/۹۲	۱۳۹۸/۹۹	۱۸۲۹/۵۴	۱۲۴۵/۵۴	۱۵۲۲/۵۸	۱۷۶۶/۳۷	۱۲۵۰/۶۳	۱۵۲۲/۴۵	۱۷۶۶/۵۲
	۸۰۰	۹۳۰/۷۱۲	۱۲۲۶/۸۸	۱۵۰۰/۷۶	۷۲۶/۸۵۲	۹۲۸/۳۰۳	۱۲۲۶/۷۲	۸۴۰/۴۴۲	۱۰۲۰/۱۹	۱۱۷۹/۶۵	۸۴۱/۹۲۸	۱۰۲۰/۰۶	۱۱۷۹/۷۲

نقص در مقطع صفحه تأثیر بسازایی بر روی رفتار ارتعاشی صفحه دارد. برای بررسی این اثر، صفحه‌ای با مشخصات هندسی مثال قبلی با ضرایب نقص مختلف، مورد بررسی قرار گرفته است. توزیع و نسبت حجمی نانو لوله‌های کربنی تک جداره مشابه مثال قبلی به صورت یکنواخت و ۰/۱۷ است. لازم به ذکر است که فرکانس‌های صفحه برای دمای اتاق محاسبه شده و شماره موج محیطی صفر فرض شده است. جدول ۶ فرکانس‌های صفحه دایره‌ای حلقوی تشکیل شده از مصالح مرکب با ضرایب‌های مختلف نقص در مقطع (n) نشان می‌دهد. مطابق این جدول برای شرایط مرزی گیردار-گیردار، با افزایش ضریب نقص، فرکانس‌ها روندی افزایشی برای مدهای شماره فرد داشته‌اند. در صورتیکه مد مرتبه‌ی دوم از تغییر در ضریب نقص تأثیر نگرفته است. مطابق این شکل می‌توان بیان کرد که ضریب نقص تأثیری بر شماره موج محیطی صفر ندارد. برخلاف شرایط مرزی گیردار-گیردار، در بقیه شرایط مرزی با افزایش ضریب نقص، فرکانس‌های طبیعی سیستم کاهش پیدا می‌کند. علت تفاوت رفتاری شرایط مرزی گیردار-گیردار با باقی شرایط مرزی در مقدار سختی صفحه ناشی از آن شرایط تکیه‌گاهی است.

جدول ۶: اثر نقص مصالح در مقطع صفحه بر سه فرکانس طبیعی اول صفحه حلقوی برای شرایط مرزی مختلف

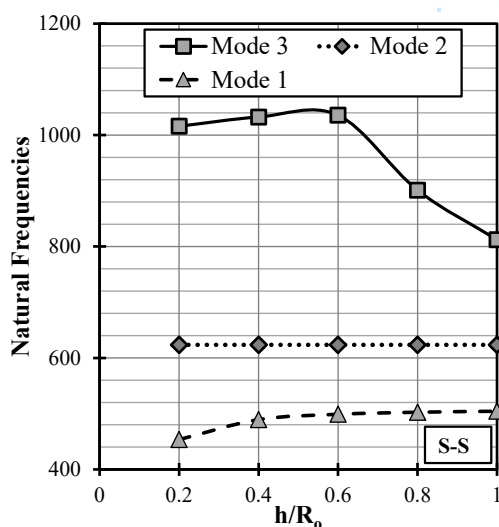
n	C-C			S-S			C-S			S-C		
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
۰	۴۱۶/۹۸۹	۶۲۳/۵۸۳	۸۵۴/۶۷۶	۳۸۴/۸۱۲	۶۲۳/۵۸۳	۹۵۸/۸۸۳	۳۰۳/۷۹۶	۶۲۳/۵۸۳	۷۱۹/۴۸۵	۳۵۴/۵۸۳	۶۲۳/۵۸۳	۷۳۷/۱۱۴
۰/۲	۴۲۰/۶۷۲	۶۲۳/۵۸۳	۸۶۲/۹۰۶	۳۸۲/۳۶۱	۶۲۳/۵۸۳	۹۵۶/۲۳۴	۳۰۲/۳۵۸	۶۲۳/۵۸۳	۷۱۷/۵۱۰	۳۵۳/۴۴۰	۶۲۳/۵۸۳	۷۳۵/۶۹۱
۰/۴	۴۲۳/۸۸۳	۶۲۳/۵۸۳	۸۶۹/۹۹۲	۳۸۰/۴۹۷	۶۲۳/۵۸۳	۹۵۴/۱۹۱	۳۰۱/۲۷۰	۶۲۳/۵۸۳	۷۱۵/۹۹۲	۳۵۲/۵۵۶	۶۲۳/۵۸۳	۷۳۴/۵۹۵
۰/۶	۴۲۶/۷۷۷	۶۲۳/۵۸۳	۸۷۶/۲۷۶	۳۷۹/۱۸۷	۶۲۳/۵۸۳	۹۵۲/۷۴۱	۳۰۰/۵۰۹	۶۲۳/۵۸۳	۷۱۴/۹۱۶	۳۵۱/۹۲۸	۶۲۳/۵۸۳	۷۳۳/۸۱۸
۰/۸	۴۲۹/۴۶۴	۶۲۳/۵۸۳	۸۸۲/۰۰۳	۳۷۸/۴۰۹	۶۲۳/۵۸۳	۹۵۱/۸۷۵	۳۰۰/۰۵۸	۶۲۳/۵۸۳	۷۱۴/۲۷۵	۳۵۱/۵۵۳	۶۲۳/۵۸۳	۷۳۳/۳۵۴

یکی دیگر از عامل‌هایی که می‌تواند بر روی رفتار ارتعاشی صفحه‌های حلقوی تأثیر بگذارد، نسبت شعاع داخلی به خارجی آن است. در مثال حاضر، اثر نسبت شعاع‌ها بر روی فرکانس‌های ارتعاش آزاد این صفحه مورد بررسی قرار گرفته است. مشخصات مکانیکی مصالح و هندسی صفحه مشابه موارد قبلی است. مواد مسلح کننده به طور یکنواخت و با نسبت حجمی ۰/۱۷ توزیع شده‌اند. دمای صفحه ۳۰۰ درجه کلوین فرض شده و ضریب نقص مقطع صفحه برابر با صفر قرار داده شده است. نسبت شعاعی صفر نشان دهنده صفحه‌ای دایره‌ای شکل و نسبت یک بیانگر صفحه‌ای طوقه‌ای شکل است. جدول ۷ اثر نسبت شعاع‌ها را بر روی فرکانس‌های طبیعی سه مد ارتعاشی اول نشان می‌دهد. در اینجا مقدار شعاع خارجی ثابت و برابر با یک فرض شده و شعاع داخلی صفحه تغییر کرده است. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش نسبت شعاعی، فرکانس‌های سیستم افزایش پیدا کرده است. علت آن را می‌توان در افزایش طول دایره‌ی داخلی با افزایش نسبت شعاعی دانست. با افزایش این طول، سختی صفحه افزایش پیدا کرده و در نتیجه مقادیر فرکانسی آن افزایش می‌یابد.

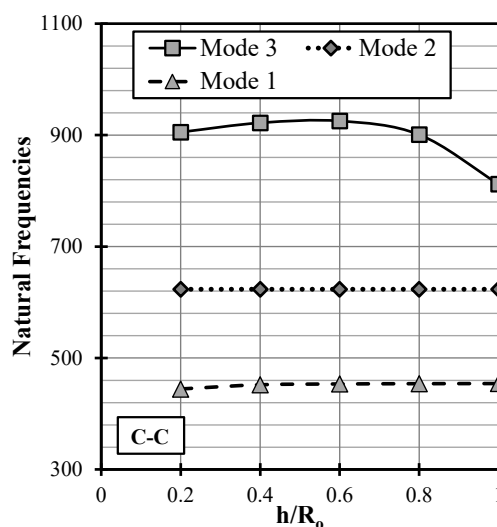
جدول ۷: تغییرات سه مود ارتعاشی اول صفحه حلقوی بر اثر تغییر در نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی صفحه حلقوی

R_{in}/R_{out}	C-C			S-S			C-S			S-C		
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3	ω_1	ω_2	ω_3
۰	۳۳۸/۷۵۰	۶۲۴/۸۶۷	۷۳۷/۱۴۹	۲۹۳/۴۴۵	۶۲۹/۷۴۸	۷۸۰/۷۸۴	۱۸۶/۳۹۰	۴۸۱/۷۹۹	۶۲۴/۸۶۷	۲۳۴/۰۹۹	۵۰۶/۲۴۲	۶۲۴/۸۶۷
۰/۲	۴۸۶/۹۶۴	۶۷۳/۷۰۲	۹۸۱/۶۲۷	۴۶۳/۵۲	۶۷۳/۷۰۲	۱۱۰۲/۶۳	۴۱۷/۱۵۶	۶۷۳/۷۰۲	۹۵۴/۵۸۹	۴۶۴/۳۸۱	۶۷۳/۷۰۲	۹۶۷/۲۷۶
۰/۴	۶۷۵/۲۵۷	۸۷۱/۳۶۳	۱۳۴۷/۱۷	۶۸۱/۸۳۵	۸۷۱/۳۶۳	۱۵۱۴/۴۳	۷۲۲/۳۸۲	۸۷۱/۳۶۳	۱۵۷۵/۶۲	۷۶۰/۲۲۴	۸۷۱/۳۶۳	۱۵۸۱/۰۴
۰/۶	۱۰۳۶/۲۰	۱۲۹۶/۱۲	۲۰۶۵/۸۶	۱۱۰۲/۹۸	۱۲۹۳/۲۴	۱۲۹۶/۱۲	۱۲۹۶/۱۲	۱۳۰۷/۵۹	۲۵۸۶/۲۱	۱۲۹۶/۱۲	۱۳۳۲/۵۶	۲۵۸۶/۲۱
۰/۸	۲۰۹۹/۰۷	۲۵۸۵/۵۳	۴۱۹۳/۳۹	۱۰۶۲/۱۰	۲۳۱۸/۱۲	۲۵۸۵/۵۳	۲۵۸۵/۵۳	۳۰۲۰/۹۲	۵۱۶۹/۰۲	۲۵۸۵/۵۳	۳۰۲۹/۷۴	۵۱۶۹/۰۲
۱	۴۲۱۵۶/۲	۵۱۶۸۳/۵	۵۱۹۴۴/۶	۹۰۷/۴۸۵	۵۲۸۰/۵۹	۴۷۱۷۸/۳	۵۱۶۸۳/۵	۵۱۹۴۴/۶	۶۶۴۶۹/۳	۵۱۶۸۳/۵	۵۱۹۴۴/۶	۶۶۴۶۹/۴

در پژوهش حاضر، اثر ارتفاع این صفحه‌ی حلقوی بر رفتار ارتعاشی نیز مورد بررسی قرار گرفته است. برای بررسی این حالت، نسبت شعاعی ۰/۱، ضریب نقص صفر و نسبت حجمی ۰/۱۷ در نظر گرفته شده است. شماره موج برابر صفر و دما برابر با ۳۰۰ درجه کلوین قرار داده شده است. شکل ۲ نسبت ارتفاع به شعاع خارجی را برای مدهای مختلف فرکانسی نشان می‌دهد. برای هر دو شرایط مختلف تکیه-گاهی مشاهده می‌شود که فرکانس مد اول با افزایش این نسبت به طور تدریجی (با نرخ کم) افزایش پیدا می‌کند، در صورتیکه فرکانس‌های مد دوم تغییری نمی‌کند. برای مد سوم، فرکانس‌های صفحه تا نسبت خاصی افزایش پیدا می‌کند، سپس مقادیر آن کاهش پیدا کرده است.



(ب)

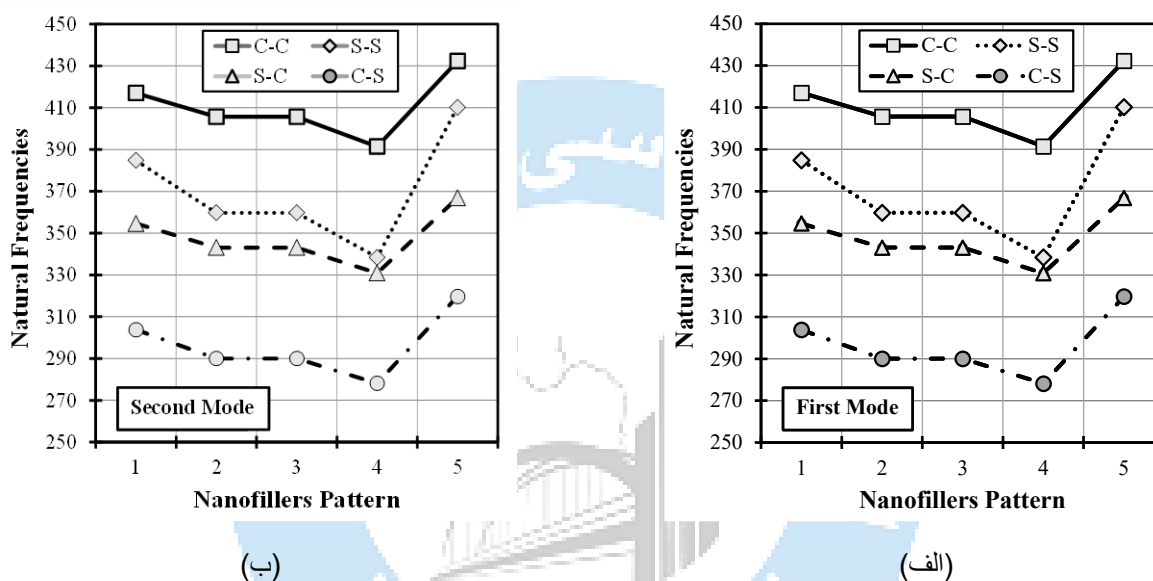


(الف)

شکل ۲: تغییرات مدهای مختلف فرکانس صفحه حلقوی با تغییر در نسبت ارتفاع به شعاع خارجی

در آخرین مثال، اثر طرح‌های مختلف برای توزیع مسلح کننده در مقطع صفحه بر روی رفتار ارتعاشی بررسی شده است. مشابه مثال‌های قبلی، مقدار نسبت حجمی مسلح کننده ۰/۱۷ و دمای محیط ۳۰۰ درجه کلوین انتخاب شده است. نسبت شعاعی برابر با ۰/۱ و ضریب نقص عضو صفر فرض شده است. نتایج برای چهار شرایط مرزی مختلف ارائه شده است. شکل ۳ فرکانس‌های طبیعی صفحه حلقوی دایره‌ای برای دو مد اول نشان می‌دهد. همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود، کمترین فرکانس طبیعی مربوط به طرح شماره ۴ (توزیع دایره‌ای) و بزرگترین فرکانس مربوط به طرح شماره ۵ (توزیع ضربدری) است. با مقایسه فرکانس‌ها می‌توان برای مقادیر آن‌ها نوشت:

طرح ضربدری < طرح یکنواخت < طرح های مثلثی < طرح دایره‌ای



شکل ۳: اثر طرح توزیع مسلح کننده‌ها در مقطع صفحه حلقوی برای دو فرکانس اول در شرایط مرزی مختلف

۷- نتیجه گیری

در این پژوهش رفتار ارتعاشی یک صفحه حلقوی به کمک روش نیمه تحلیلی مربعات تفاضلی بررسی شده است. مصالحی که برای این صفحه در نظر گرفته شده است، نانوکامپوزیتی ساخته شده از پلی متیل متاکریلات به عنوان ماده‌ی زمینه‌ای و نانو لوله‌های کربنی تک جداره به عنوان تقویت کننده است. برای بررسی اثر دما در رفتار ارتعاشی این صفحه، از مصالح با مشخصات مکانیکی وابسته به دما استفاده شده است. همچنین تغییرات دما به مانند یک بار وارد معادله‌های حاکم بر مسئله گردیده است. مدلسازی‌ها برای چهار شرایط مرزی مختلف ترکیبی از گیردار و ساده انجام شده است. به طور خلاصه، نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که:

- ۱- با بررسی فرکانس‌های طبیعی صفحه حلقوی در شرایط مرزی مختلف مشاهده گردید که بیشترین مقادیر فرکانس طبیعی برای شرایط مرزی گیردار-گیردار و کمترین مقادیرها برای شرایط مرزی گیردار-ساده است.

- ۲- شماره موج محیطی بر روی رفتار ارتعاشی صفحه‌ی حلقوی تأثیر بسزایی دارد، به طوری که با افزایش شماره موج مقادیر فرکانس‌های طبیعی این صفحه در شرایط مرزی مختلف افزایش پیدا می‌کند.
- ۳- برای بررسی اثر دما بر روی رفتار ارتعاشی، دمای محیط به طور یکنواخت افزایش پیدا کرده است. افزایش دما باعث کاهش مقادیر فرکانس‌ها برای همه‌ی شرایط مرزی می‌شود. علت آن این است که با افزایش دما مشخصه‌های مکانیکی مصالح کاهش پیدا می‌کند.
- ۴- نقص در مقطع صفحه به کمک ضریبی کاهش در مشخصات مکانیکی صفحه مدلسازی شده است. نتایج نشان می‌دهد که برای شرایط مرزی ساده-گیردار، گیردار-ساده و ساده-ساده، با افزایش مقدار این ضریب فرکانس‌های سیستم کاهش پیدا می‌کند. در صورتیکه برای شرایط مرزی گیردار-گیردار با افزایش این ضریب مقادیر فرکانس‌ها افزایش می‌یابد.
- ۵- نحوه توزیع مسلح کننده‌ها نیز بر رفتار ارتعاشی صفحه تأثیرگذار است. بطوریکه برای توزیع ضربدری مقادیر فرکانس‌های صفحه به بالاترین مقدار خود و برای توزیع دایروی به کوچکترین مقدار می‌رسند.

مراجع

- [1] Nie, G. and Zhong, Z. (2010.) Dynamic analysis of multi-directional functionally graded annular plates. *Applied Mathematical Modelling*, 34(3): 608-616.
- [2] Mercan, K., Baltacioglu, A.K., and Civalek, Ö. (2018.) Free vibration of laminated and FGM/CNT composites annular thick plates with shear deformation by discrete singular convolution method. *Composite Structures*, 186: 139-153.
- [3] Moshir, S.K., Eipakchi, H., and Sohani, F. (2017.) Free vibration behavior of viscoelastic annular plates using first order shear deformation theory *Structural Engineering and Mechanics* 62: 607-618.
- [4] Torabi, J. and Ansari, R. (2017.) Nonlinear free vibration analysis of thermally induced FG-CNTRC annular plates: Asymmetric versus axisymmetric study. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 324: 327-347.
- [5] Wu, H., Zhu, J., Kitipornchai, S., Wang, Q., Ke, L.-L., and Yang, J. (2020.) Large amplitude vibration of functionally graded graphene nanocomposite annular plates in thermal environments. *Composite Structures*, 239: 112047.
- [6] Al-Furjan, M.S.H., Fereidouni, M., Sedghiyan, D., Habibi, M., and Jung, D.w. (2021.) Three-dimensional frequency response of the CNT-Carbon-Fiber reinforced laminated circular/annular plates under initially stresses. *Composite Structures*, 257: 113146.
- [7] Vasara, D., Khare, S., Sharma, H.K., and Kumar, R. (2022.) Free vibration analysis of functionally graded porous circular and annular plates using differential quadrature method. *Forces in Mechanics*, 9: 100126.
- [8] Babae, A. and Jelovica, J. (2023.) Large amplitude vibration of annular and circular functionally graded composite plates under cooling thermal shocks. *Thin-Walled Structures*, 182: 110142.
- [9] Jafarinezhad, M., Sburlati, R., and Cianci, R. (2023.) Static and free vibration analysis of functionally graded annular plates using stress-driven nonlocal theory. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 99: 104955.
- [10] Yang, Y., Liu, J., Li, J.-a., Dong, Y., Li, Y., and Li, X. (2024.) Symmetric and asymmetric free vibrations of rotating eccentric annular plate. *Journal of Sound and Vibration*, 576: 118302.

- [11] Sobhani, E. and Masoodi, A.R. (2021.) Natural frequency responses of hybrid polymer/carbon fiber/FG-GNP nanocomposites paraboloidal and hyperboloidal shells based on multiscale approaches. *Aerospace Science and Technology*, 119: 107111.
- [12] Ghandehari, M.A., Masoodi, A.R., and Panda, S.K. (2023.) Thermal Frequency Analysis of Double CNT-Reinforced Polymeric Straight Beam. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*.
- [13] He, D., Shi, D., Wang, Q., and Ma, C. (2021.) A unified power series method for vibration analysis of composite laminate conical, cylindrical shell and annular plate. *Structures*, 29: 305-327.
- [14] Rezaiee-Pajand, M., Mokhtari, M., and Hozhabrossadati, S.M. (2019.) Application of Hencky bar-chain model to buckling analysis of elastically restrained Timoshenko axially functionally graded carbon nanotube reinforced composite beams. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 47(5): 599-620.
- [15] Tornabene, F., Viola, E., and Inman, D.J. (2009.) 2-D differential quadrature solution for vibration analysis of functionally graded conical, cylindrical shell and annular plate structures. *Journal of Sound and Vibration*, 328(3): 259-290.
- [16] Hedayati, H. and Sobhani Aragh, B. (2012.) Influence of graded agglomerated CNTs on vibration of CNT-reinforced annular sectorial plates resting on Pasternak foundation. *Applied Mathematics and Computation*, 218(17): 8715-8735.
- [17] Abediokhchi, J., Kouchakzadeh, M.A., and Shakouri, M. (2013.) Buckling analysis of cross-ply laminated conical panels using GDQ method. *Composites Part B: Engineering*, 55: 440-446.
- [18] Ghasemi, A.R. and Mohande, M. (2016.) The effect of finite strain on the nonlinear free vibration of a unidirectional composite Timoshenko beam using GDQ. *Advances in Aircraft and Spacecraft Science*, 3.
- [19] Ansari, R., Torabi, J., and Shojaei, M.F. (2017.) Buckling and vibration analysis of embedded functionally graded carbon nanotube-reinforced composite annular sector plates under thermal loading. *Composites Part B: Engineering*, 109: 197-213.
- [20] Keleshteri, M.M., Asadi, H., and Wang, Q. (2017.) Large amplitude vibration of FG-CNT reinforced composite annular plates with integrated piezoelectric layers on elastic foundation. *Thin-Walled Structures*, 120: 203-214.
- [21] Mohammadzadeh-Keleshteri, M., Asadi, H., and Aghdam, M.M. (2017.) Geometrical nonlinear free vibration responses of FG-CNT reinforced composite annular sector plates integrated with piezoelectric layers. *Composite Structures*, 171: 100-112.
- [22] Al-shujairi, M. and Mollamahmutoğlu, Ç. (2018.) Buckling and free vibration analysis of functionally graded sandwich micro-beams resting on elastic foundation by using nonlocal strain gradient theory in conjunction with higher order shear theories under thermal effect. *Composites Part B: Engineering*, 154: 292-312.
- [23] Keleshteri, M.M., Asadi, H., and Aghdam, M.M. (2019.) Nonlinear bending analysis of FG-CNTRC annular plates with variable thickness on elastic foundation. *Thin-Walled Structures*, 135: 453-462.
- [24] Arshid, E., Amir, S., and Loghman, A. (2020.) Static and dynamic analyses of FG-GNPs reinforced porous nanocomposite annular micro-plates based on MSGT. *International Journal of Mechanical Sciences*, 180: 105656.
- [25] Javani, M., Kiani, Y., and Eslami, M.R. (2020.) Thermal buckling of FG graphene platelet reinforced composite annular sector plates. *Thin-Walled Structures*, 148: 106589.
- [26] Safarpour, M., Ghabussi, A., Ebrahimi, F., Habibi, M., and Safarpour, H. (2020.) Frequency characteristics of FG-GPLRC viscoelastic thick annular plate with the aid of GDQM. *Thin-Walled Structures*, 150: 106683.
- [27] Javani, M., Kiani, Y., and Eslami, M.R. (2021.) Application of generalized differential quadrature element method to free vibration of FG-GPLRC T-shaped plates. *Engineering Structures*, 242: 112510.
- [28] Sobhani, E. and Avcar, M. (2022.) Natural frequency analysis of imperfect GNPRN conical shell, cylindrical shell, and annular plate structures resting on Winkler-Pasternak Foundations under arbitrary boundary conditions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 144: 145-164.

- [29] Ghandehari, M.A. and Masoodi, A. (2023.) Employing GDQ method for exploring undamped vibrational performance of CNT-reinforced porous coupled curved beam. *Advances in Nano Research*.
- [30] Ghandehari, M.A. and Masoodi, A.R. (2024.) Inherent resonance of carbon and graphene-based nanocomposite coupled single-span arch beams. *Composites Part C: Open Access*, 14: 100458.
- [31] Masoodi, A.R., Ghandehari, M.A., Tornabene, F., and Dimitri, R. (2024.) Natural Frequency Response of FG-CNT Coupled Curved Beams in Thermal Conditions. *Applied Sciences*, 14(2): 687.
- [33] Hong, C.C. (2023.) GDQ computation for thermal vibration of thick FGM plates by using third-order shear deformation theory. *Materials Science and Engineering: B*, 294: 116208.
- [34] Yas, M.H. and Tahouneh, V. (2012.) 3-D Free vibration analysis of thick functionally graded annular plates on Pasternak elastic foundation via differential quadrature method (DQM). *Acta Mechanica*, 223(1): 43-62.
- [35] Zhou, Z.H., Wong, K.W., Xu, X.S., and Leung, A.Y.T. (2011.) Natural vibration of circular and annular thin plates by Hamiltonian approach. *Journal of Sound and Vibration*, 330(5): 1005-1017.

