

## Quantitative comparison of the accuracy of the 3rd order acceleration method with other numerical methods - case study of linear two-degree-of-freedom systems

Masoud Mahmoodabadi\*<sup>1</sup>, Fatemeh Ansari<sup>2</sup>, Fatemeh Hatfi Ardakani<sup>3</sup>

1-Assistant Professor, Faculty of Engineering, Qom University, Qom, Iran

2- Senior student of Structures, Faculty of Engineering, University of Qom, Qom, Iran

2- Senior student of Structures, Faculty of Engineering, University of Qom, Qom, Iran

### ABSTRACT

The 3rd order numerical acceleration method is presented. The basic assumption of this method is that the acceleration changes in the time interval  $\Delta t$  is a polynomial of the third degree. To quantitatively compare the error rate of this method with other numerical methods, two linear two-degree-of-freedom systems were investigated. The first and second floors of system 1 had the same mass and stiffness, but the mass of the first and second floors of system 2 were equal to each other, but the stiffness of the second floor of system 2 was one thousandth of the stiffness of the first floor. For systems 1 and 2, a suitable range of sinusoidal loading frequencies was selected according to their natural vibration frequencies. First, the exact (analytical) response of these two systems was calculated for each loading frequency, and then the approximate response of these two systems was calculated using the 8 numerical methods proposed in this article, and the average error values and the coefficient of error variation were calculated for these eight numerical methods. These eight methods include 2nd order acceleration method, 3rd order acceleration method, Newmark method (average acceleration), Newmark method (linear acceleration), Wilson method, central difference method, Jennings method and improved Jennings method. The most important results obtained from the comparison of the average errors of these methods were that in most methods, the average error increased with the increase of  $\Delta t$ . Also, with the increase of  $\Delta t$ , the average error of the 3rd order acceleration method significantly decreased compared to the average of the 2nd order acceleration method. In addition, the improved Jennings method had the lowest average error for both systems 1 and 2 for all  $\Delta t$ , and for Wilson and central difference methods, the highest amount of error was observed for different  $\Delta t$

### ARTICLE INFO

Receive Date: 13 June 2024

Revise Date: 20 August 2024

Accept Date: 06 October 2024

### Keywords:

dynamics of linear structure  
weighted residual integral  
direct time integration  
root mean square error  
coefficient of variation

All rights reserved to Iranian Society of Structural Engineering.

doi: [10.22065/jsce.2024.433094.3315](https://doi.org/10.22065/jsce.2024.433094.3315)

\*Corresponding author: Masoud Mahmoodabadi  
Email address: [m.mahmoudabadi@qom.ac.ir](mailto:m.mahmoudabadi@qom.ac.ir)

## مقایسه کمی میزان دقت روش شتاب مرتبه ۳ با دیگر روش‌های عددی-بررسی موردی سیستم‌های دو درجه آزاد خطی

مسعود محمودآبادی<sup>۱\*</sup>، فاطمه انصاری<sup>۲</sup>، فاطمه هاتفی اردکانی<sup>۳</sup>

۱-استادیار، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه قم، قم، ایران

۲-دانشجوی ارشد سازه، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه قم، قم، ایران

۳-دانشجوی ارشد سازه، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه قم، قم، ایران

### چکیده

در این مقاله، روش عددی شتاب مرتبه ۳ ارائه گردیده است. فرض اساسی این روش این است که تغییرات شتاب در بازه زمانی  $\Delta t$  به صورت یک چندجمله‌ای درجه سوم می‌باشد. برای مقایسه کمی میزان خطای این روش با دیگر روش‌های عددی، دو سیستم دو درجه آزاد خطی مورد بررسی قرار گرفتند. این دو سیستم بدون میرایی بودند. طبقات اول و دوم سیستم شماره ۱ دارای جرم و سختی یکسان بودند، اما جرم طبقات اول و دوم سیستم شماره ۲ با یکدیگر برابر اما سختی طبقه دوم سیستم شماره ۲ یک هزارم سختی طبقه اول آن بود. برای دو سیستم ۱ و ۲ یک بازه‌ی متناسبی از فرکانس‌های بارگذاری سینوسی با توجه به فرکانس‌های ارتعاش طبیعی آنها انتخاب گردید. ابتدا پاسخ دقیق (تحلیلی) این دو سیستم برای هر فرکانس بارگذاری محاسبه گردید و سپس با استفاده از ۸ روش عددی مطرح شده در این مقاله پاسخ تقریبی این دو سیستم محاسبه شد و مقادیر میانگین خطا و ضریب تغییرات خطا برای این هشت روش عددی به دست آورده شد. این هشت روش شامل روش شتاب مرتبه ۲، روش شتاب مرتبه ۳، روش نیومارک (شتاب متوسط)، روش نیومارک (شتاب خطی)، روش ویلسون، روش تفاضل مرکزی، روش جنینگز و روش جنینگز ارتقاء یافته می‌گردید. مهم‌ترین نتایج به دست آمده از مقایسه ی میانگین خطاها و ضریب تغییرات این روش‌ها بدین صورت بود که در اکثر روش‌ها با افزایش  $\Delta t$ ، میانگین خطا افزایش می‌یافت. همچنین، با افزایش  $\Delta t$ ، میانگین خطای روش شتاب مرتبه ۳ نسبت به میانگین روش شتاب مرتبه ۲ کاهش چشمگیری داشت. علاوه بر این، روش جنینگز ارتقاء یافته کمترین میانگین خطا را برای دو سیستم ۱ و ۲ برای تمام  $\Delta t$ ها داشت و برای روش‌های ویلسون و تفاضل مرکزی بیشترین میزان خطا برای  $\Delta t$ های مختلف مشاهده گردید.

کلمات کلیدی: روش شتاب مرتبه ۳، تابع وزنی، انتگرال باقیمانده وزن دار، انتگرال گیری مستقیم زمانی، خطای جذر میانگین مربعات، برازش منحنی

شناسه دیجیتال:		سابقه مقاله:				
doi:	<a href="https://doi.org/10.22065/jsce.2024.433094.3315">10.22065/jsce.2024.433094.3315</a>	چاپ	انتشار آنلاین	پذیرش	بازنگری	دریافت
	<a href="https://doi.org/10.22065/jsce.2024.433094.3315">https://doi.org/10.22065/jsce.2024.433094.3315</a>	۱۴۰۴/۰۳/۳۱	۱۴۰۳/۰۷/۱۵	۱۴۰۳/۰۷/۱۵	۱۴۰۳/۰۵/۳۰	۱۴۰۳/۰۳/۲۲
مسعود محمود آبادی m.mahmoudabadi@qom.ac.ir				*نویسنده مسئول: پست الکترونیکی:		

## ۱- مقدمه

در حالت کلی، رفتار دینامیکی سازه‌ها به دو صورت خطی و غیرخطی در نظر گرفته می‌شود که معادله دیفرانسیل حاکم بر این سیستم‌ها یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خواهد بود بطوریکه روش‌های حل آن به دو دسته کلی روش جمع آثار مدی و روش انتگرال-گیری مستقیم زمانی دسته‌بندی می‌شود.

در سیستم‌های خطی اگر پاسخ سازه در لحظه  $t$  مورد نظر باشد، طبق روش انتگرال‌گیری مستقیم زمانی، ابتدا بازه  $[0, t]$  به  $n$  زیر بازه تقسیم شده که معمولاً طول این زیر بازه‌ها  $(\Delta t)$  را با هم مساوی در نظر می‌گیرند. در هر یک از این زیر بازه‌ها  $(\Delta t = t/n)$  خواص سازه مانند سختی ثابت بوده و پاسخ در انتهای هر گام محاسبه می‌شود و سپس از این پاسخ به عنوان شرایط اولیه برای گام بعدی استفاده می‌شود.

از بین روش‌های انتگرال‌گیری زمانی مشروط پایدار، روش‌های شتاب خطی نیومارک و تفاضل مرکزی به علت دقت خوب، بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرند که در این دو روش کلاسیک مرتبه تغییرات شتاب، حداکثر بصورت خطی تغییر می‌کند. در مرجع [۱] مرتبه تغییرات شتاب در هر گام زمانی بصورت سهموی فرض شده که در نتیجه چند جمله‌ای مرتبه چهار تابع جابجایی، دارای پنج ضریب مجهول خواهد بود. این مقاله به عنوان مرجع اصلی در نظر گرفته شد با این تفاوت که مرتبه تغییرات شتاب در هر گام زمانی بصورت درجه ۳ در نظر گرفته شد. در نتیجه، در این حالت که شتاب به صورت چندجمله‌ای مرتبه سوم در نظر گرفته شد، تابع جابجایی، یک تابع درجه ۵ با شش ضریب بود. با توجه به اینکه با افزایش مرتبه شتاب، تعداد جملات بیشتری در بسط سری تیلور نسبت به روش‌های کلاسیک موجود در نظر گرفته می‌شود بنابراین انتظار می‌رود که در روش پیشنهادی با مرتبه شتاب درجه ۳، دقت آن نسبت به روش‌های کلاسیک دیگر بالاتر باشد. در این روش برای محاسبه انتگرال باقیمانده وزندار از سه تابع وزنی؛ واحد، پتروگالرکین و حداقل مربعات استفاده شد.

در این مقاله از قابلیت‌های نرم افزارهای محاسباتی مانند متلب<sup>۱</sup> استفاده شده است و به صورت کمی میزان دقت روش شتاب عددی درجه ۳ را با روش‌های کلاسیک دیگر مانند روش شتاب متوسط نیومارک، روش شتاب خطی نیومارک، روش ویلسون-تتا و روش شتاب سهموی که در مرجع [۱] ارائه گردیده است، مقایسه گردیده است.

در مرجع [۱] فرمولاسیون روش شتاب سهموی ارائه گردیده است. در این روش، تغییرات شتاب در هر گام زمانی به صورت درجه ۲ در نظر گرفته شده است. در این مقاله تغییرات شتاب در هر گام زمانی به صورت درجه ۳ در نظر گرفته شد که این موضوع نوآوری این مقاله می‌باشد. نویسندگان این مقاله بر این باورند که بسط روش شتاب مرتبه ۳ برای اولین بار است که لااقل در ایران انجام می‌شود. لازم به ذکر است در مرجع [۱] پاسخ دقیق یک ساختمان برشی با رفتار غیر خطی تحت بارگذاری سینوسی محاسبه گردیده است و سپس پاسخ تقریبی آن با روش نیومارک و روش شتاب سهموی محاسبه گردیده است و به صورت نمودارهای تاریخچه زمانی، پاسخ طبقات اول و دوم با پاسخ دقیق آنها مقایسه شده است. نقصی که بنظر می‌رسد در مرجع [۱] وجود دارد، این است که پاسخ‌های تقریبی با پاسخ‌های دقیق متناظرشان به صورت کیفی و نموداری مقایسه شده‌اند. در این مقاله، خطاهای ۸ روش مختلف عددی، به صورت کمی (عددی) محاسبه شده و با یکدیگر مقایسه شده‌اند. برای دو سیستم ۱ و ۲ یک بازه‌ی مناسبی از فرکانس‌های بارگذاری با توجه به فرکانس‌های ارتعاش طبیعی سیستم‌های ۱ و ۲ انتخاب گردید. برای سیستم ۱، بازه فرکانس‌های بارگذاری از ۱ تا ۳۰ رادیان بر ثانیه و با افزایش ۰/۱ رادیان بر ثانیه در نظر گرفته شد که بدین ترتیب ۲۹۱ فرکانس بارگذاری را شامل می‌شد. برای سیستم ۲، بازه فرکانس‌های بارگذاری از ۱ تا ۳۰۰ رادیان بر ثانیه و با افزایش ۱ رادیان بر ثانیه در نظر گرفته شد که بدین ترتیب ۳۰۰ فرکانس بارگذاری را شامل می‌گردید. برای مقایسه روش‌های مختلف با یکدیگر، میانگین خطاهای فرکانس‌های مختلف با یکدیگر مقایسه شده و نتیجه‌گیری‌های لازم انجام شده است. علاوه

<sup>1</sup> Matlab

بر این، روش شتاب سهموی، به روش شتاب مرتبه سوم بسط داده شده و میزان خطای این روش، با روش شتاب مرتبه دوم (سهموی)، مقایسه و نتیجه گیری های لازم انجام شده است.

غلامپور و همکاران [۱]، یک روش باقیمانده وزن دار با استفاده از چند تابع وزنی برای حل مسائل دینامیکی غیرخطی سازه ها ارائه نمودند. آنها مرتبه تغییرات شتاب را در هر گام زمانی بصورت سهموی فرض نمودند. در نتیجه چند جمله ای جابجایی مربوطه از درجه ۴ بود و لازم بود که پنج ضریب مجهول این چند جمله ای محاسبه گردد. آنها برای محاسبه این پنج ضریب مجهول از پنج معادله استفاده کردند. آنها سه معادله از این ۵ معادله را از ارضای معادلات جابجایی، سرعت و شتاب در ابتدای هر گام بدست آوردند و دو معادله دیگر را با محاسبه انتگرال باقیمانده وزندار و با چهار تابع وزنی؛ واحد، پترو گالرکین، حداقل مربعات و کالوکیشن بدست آوردند. آنها اذعان داشتند که از روش شتاب سهموی پاسخ های بهتر و دقیق تری حاصل می گردد.

چانگ<sup>۲</sup> [۲]، به بررسی روش صریح نیومارک پرداخت که بر اساس نتایج ارزیابی تحلیلی انجام شده است. او اذعان داشت در حل گام به گام یک سیستم الاستیک خطی، یک گام زمانی مناسب می تواند بر پایه نتایج ارزیابی تحلیلی انتخاب شود؛ اگر چه هیچ راهی برای انتخاب یک گام زمانی مناسب برای انتگرال گیری دقیق یک سیستم غیر خطی وجود ندارد. او در این مطالعه بعد از معرفی درجه غیرخطی لحظه ای، ویژگی های عددی روش صریح نیومارک رابه صورت تحلیلی مورد ارزیابی قرار داد. او بیان کرد که حد پایداری بالایی برای یک سیستم الاستیک خطی برابر با ۲ است، که این مقدار، اغلب در مقاومت سخت شدگی لحظه ای، کاهش پیدا می کند و در مقاومت نرم شدگی لحظه ای، افزایش پیدا می کند.

محمودآبادی و همکاران [۳]، روش جنینگز را با استفاده از تابع درونیابی اسپلاین درجه سه ارتقاء دادند. آنها به صورت مقایسه ای مزیت ها و معایب روش جنینگز که مبتنی بر روابط دقیق و فرض تغییرات خطی تحریک بود را نسبت به روش درونیابی اسپلاین ارزیابی نمودند. محمودآبادی و حسینی [۴]، طیف های پاسخ غیرخطی شبه شتاب سیستم های الاستو پلاستیک با شکل پذیری ثابت با شتاب نگاشت السنترو که با روش درونیابی خطی تحریک و نیز با استفاده از تابع اسپلاین مکعبی به دست آمده بود، با یکدیگر مقایسه کردند. طیف های پاسخ غیر خطی برای شکل پذیری های ۱، ۱/۵، ۲، ۴ و ۸ محاسبه شدند.

در ادامه در بخش ۲، روش شتاب مرتبه ۳ به تفصیل شرح داده شده است. همچنین در بخش های ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ مقاله به ترتیب روش های شتاب مرتبه ۲، روش نیومارک، (روش شتاب متوسط و شتاب خطی)، روش ویلسون، روش تفاضل مرکزی و روش جنینگز و جنینگز ارتقاء یافته شرح داده شده است. در بخش ۸، دو سیستم دو درجه آزاد خطی تحت طیفی از بارگذاری های سینوسی با فرکانس های مختلف به روش های فوق الذکر، تحلیل گردیده اند و خطاهای روش های مختلف با یکدیگر مقایسه شده اند. در پایان و در بخش ۹، نتیجه گیری و پیشنهادات برای کارهای بعدی آمده است.

## ۲- روش شتاب مرتبه ۳

معادله دیفرانسیل حرکت برای یک سازه یک درجه آزاد با رفتار خطی بصورت رابطه زیر تعریف می شود:

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = P(t) \quad (1)$$

<sup>2</sup> Chang

که در این رابطه  $M$ ،  $C$  و  $K$  به ترتیب جرم، میرایی و سختی سازه است.  $P(t)$  نیروی وارده به سازه و  $y$ ،  $\dot{y}$  و  $\ddot{y}$  به ترتیب جابجایی، سرعت و شتاب خواهند بود. در روش شتاب مرتبه ۳، تغییرات شتاب در هر گام زمانی بصورت یک چند جمله‌ای مرتبه سوم در نظر گرفته می‌شود که در نتیجه تغییرات تغییر مکان در هر گام زمانی بصورت یک تابع چند جمله‌ای کامل مرتبه پنج خواهد بود که این تابع به صورت رابطه زیر نوشته می‌شود:

$$y(t) = at^5 + bt^4 + ct^3 + dt^2 + et + f \quad (2)$$

که در این رابطه  $a$  تا  $f$  شش ضریب ثابت مجهول است که باید در هر گام زمانی محاسبه شوند.

با مشتق گیری از رابطه (۲) نسبت به زمان، توابع سرعت و شتاب بصورت روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\dot{y}(t) = 5at^4 + 4bt^3 + 3ct^2 + 2d + e \quad (3)$$

$$\ddot{y}(t) = 20at^3 + 12bt^2 + 6ct + 2d \quad (4)$$

برای محاسبه این شش ضریب ثابت مجهول در هر گام زمانی، به شش معادله نیاز داریم. سه معادله از ارضای روابط جابجایی و سرعت و شتاب در ابتدای هر گام زمانی بدست می‌آید که به صورت رابطه زیر می‌باشد:

$$y(t=0) = f = y_0 \quad (5)$$

$$\dot{y}(t=0) = e = \dot{y}_0 \quad (6)$$

$$\ddot{y}(t=0) = 2d = \ddot{y}_0 \quad (7)$$

از طرفی با ارضای معادله حرکت در ابتدای گام زمانی داریم:

$$M_o \ddot{y}_0 + C_o \dot{y}_0 + K y_0 = p_o \quad (8)$$

بنابراین با جایگذاری روابط (۵) و (۶) و (۷) در رابطه (۸) داریم:

$$M_o(2c) + C_o(d) + K(e) = p_o \rightarrow c = \frac{p_o - c.d + K.e}{2M} \quad (9)$$

معادله چهارم، طبق معادله (۸) از ارضای معادله حرکت در انتهای گام زمانی بدست می‌آید.

$$M \cdot \ddot{y}_{\Delta t} + C \cdot \dot{y}_{\Delta t} + K \cdot y_{\Delta t} = P_{\Delta t} \quad (10)$$

$$M \cdot (20a\Delta t^3 + 12b\Delta t^2 + 6c\Delta t + 2d) + C \cdot (5a\Delta t^4 + 4b\Delta t^3 + 3c\Delta t^2 + 2d\Delta t + e) + K(a\Delta t^5 + b\Delta t^4 + c\Delta t^3 + d\Delta t^2 + e\Delta t + f) = P_{\Delta t} \quad (11)$$

همانطور که می‌دانیم در این روش عددی مانند روش‌های کلاسیک، دیگر به دلیل تقریبی بودن معادله تعادل حرکت در بازه  $[0, t]$  بطور کامل ارضا نمی‌شود. در نتیجه یک تابع باقیمانده می‌توان تعریف کرد، بطوریکه [1]

$$\text{remainder} = P - M \ddot{y} - C \dot{y} - Ky \quad (12)$$

که برای حداقل سازی این تابع باقیمانده از انتگرال باقیمانده وزنی استفاده می‌کنیم که:

$$\int_0^{\Delta t} W_i \times (\text{remainder}) dt = 0 \quad (13)$$

که در این رابطه  $W_i$  تابع وزنی می‌باشد. برای یافتن ضرایب مجهول  $a$ ،  $b$  و  $c$  توابع وزنی را در ادامه به صورت زیر در نظر می‌گیریم. حال با محاسبه این شش ثابت مجهول در هر گام زمانی، پاسخ در انتهای هر گام زمانی با استفاده از روابط زیر محاسبه می‌شود:

$$y(t) = a\Delta t^5 + b\Delta t^4 + c\Delta t^3 + d\Delta t^2 + e\Delta t + f \quad (14)$$

$$\dot{y}(t) = 5a\Delta t^4 + 4b\Delta t^3 + 3c\Delta t^2 + 2d\Delta t + e \quad (15)$$

$$\ddot{y}(t) = 20a\Delta t^3 + 12b\Delta t^2 + 6c\Delta t + 2d \quad (16)$$

این پاسخ به عنوان شرایط اولیه برای گام زمانی بعدی در نظر گرفته شده و روابط فوق مجدداً برای گام بعدی استفاده می‌شود بطوریکه در انتها پاسخ در لحظه مورد نظر بدست آید. حال این توابع وزنی واحد بسط داده شده، پتروگالرکین بسط داده شده و حداقل مربعات بصورت زیر تعریف می‌شوند:

## ۲-۱- روش حداقل مربعات

مربع تابع باقیمانده بصورت رابطه زیر بیان می‌شود:

$$(\text{remainder})^2 = \int_0^{\Delta t} [M\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + ky(t) - p(t)] \quad (17)$$

برای حداقل سازی این تابع باقیمانده، سه معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial (\text{remainder})^2}{\partial a} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial (\text{remainder})^2}{\partial b} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial (\text{remainder})^2}{\partial c} = 0 \quad (20)$$

بنابراین با بکارگیری معادلات (۱۴)، (۱۵) و (۱۶) در معادلات (۱۸) و (۱۹) و (۲۰)، داریم:

$$\int_0^{\Delta t} [m\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) - P(t)] \left( M \frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial a} + C \frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial a} + K \frac{\partial y(t)}{\partial a} \right) dt = 0 \quad (21)$$

$$\int_0^{\Delta t} [m\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) - P(t)] \left( M \frac{\partial \ddot{y}(t)}{\partial b} + C \frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial b} + K \frac{\partial y(t)}{\partial b} \right) dt = 0 \quad (22)$$

$$\int_0^{\Delta t} [m\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) - P(t)] \left( M \frac{\partial \ddot{y}(t)}{\partial c} + C \frac{\partial \dot{y}(t)}{\partial c} + K \frac{\partial y(t)}{\partial c} \right) dt = 0 \quad (23)$$

حال با حل همزمان معادلات (۲۱) و (۲۲) و (۲۳)، مجهولات  $a$  و  $b$  و  $c$  محاسبه می‌شوند.

## ۳- روش شتاب مرتبه ۲

در این روش، شتاب در هر گام زمانی به صورت سهموی در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه تابع تغییر مکان یک چند جمله‌ای درجه چهار بر حسب زمان است. فرمولاسیون این روش کاملاً شبیه به روش شتاب مرتبه

۳ می‌باشد که به لحاظ رعایت اختصار از آوردن آن صرفنظر شده است. روش شتاب مرتبه ۲ در مرجع [۱] به طور کامل توضیح داده شده است.

### ۳-۱- روش نیومارک (روش شتاب متوسط و شتاب خطی)

نیومارک در سال ۱۹۵۹ دو روش معروف، موسوم به روش شتاب متوسط و روش شتاب خطی ارائه نموده است [۵]. در روش شتاب متوسط، تغییرات شتاب در هر گام زمانی ثابت فرض می‌شود، اما در روش شتاب خطی، تغییرات شتاب در هر گام زمانی خطی فرض می‌شود. روش شتاب متوسط، برای هر مقدار  $\Delta t$ ، هر چقدر بزرگ باشد، از نظر عددی پایدار است، اما روش شتاب خطی برای  $0.551 T_n \leq \Delta t$  پایدار می‌باشد. روابط و فرمولاسیون این روش در مرجع [۵] آمده است.

### ۳-۲- روش ویلسون

ویلسون روش شتاب خطی که به صورت مشروط پایدار بود را اصلاح نمود و آنرا با اضافه کردن پارامتری به نام  $\theta$  به صورت پایدار غیر مشروط درآورد. اگر  $\theta = 1$  باشد، روش ویلسون، به روش شتاب خطی تبدیل می‌گردد. اگر  $\theta \geq 1/37$  باشد، روش ویلسون پایدار غیر مشروط است. به استناد مرجع [۵] مقدار  $\theta = 1/42$  دقت بهینه دارد. در این مقاله از مقدار بهینه  $\theta$  استفاده شده است.

### ۳-۳- روش تفاضل مرکزی

این روش مبتنی بر تقریب تفاضل محدود از مشتقات زمانی جابه‌جایی (یعنی سرعت و شتاب) است. این روش از روش‌های صریح می‌باشد و پایدار مشروط است. یعنی اگر  $\Delta t < \frac{T_n}{\pi}$  باشد، از نظر عددی روش پایدار است. جزئیات این روش در مرجع [۵] آمده است.

### ۳-۴- روش جنینگز و روش جنینگز ارتقاء یافته

روش مبتنی بر روابط دقیق و فرض تغییرات خطی تحریک که بعضاً در مراجع فنی فارسی از آن به روش جنینگز یاد می‌شود، روش متعارف و معمولی است که برای محاسبه پاسخ سازه‌ها در برابر زلزله در محدوده رفتار خطی از آن استفاده می‌شود. در روش درونیایی خطی تحریک، همانطوریکه از اسم آن مشخص است، نقاط شتابنگاشت با پاره‌خطهایی به یکدیگر متصل می‌شوند؛ در نتیجه در محل اتصال پاره خطها، شیب آنها لزوماً با یکدیگر برابر نمی‌باشد و فقط مقادیر تابع در محل اتصال آنها با یکدیگر برابر است. با توجه به اینکه درونیایی خطی تحریک، یکی از ساده‌ترین روش‌های درونیایی است؛ در نتیجه، اگر بازه‌های زمانی بین نقاط شتابنگاشت نسبت به دوره تناوب طبیعی سازه کوچک باشد، درونیایی خطی قابل قبول بوده و دارای دقت کافی می‌باشد. در مرجع [۵]، ذکر گردیده است که به ازای  $\Delta t = \frac{T_n}{10}$  نتایج نسبتاً دقیقی به دست خواهد آمد.  $T_n$  دوره تناوب طبیعی ارتعاش سیستم یک درجه آزاد است. لازم به ذکر است روش جنینگز مبتنی بر روابط دقیق و فرض تغییرات خطی تحریک است و برای سیستم‌های یک و چند درجه آزاد دینامیکی خطی، قابل استفاده است. در این روش، تنها فرضی که برای حل معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت این سیستم‌ها استفاده می‌شود، فرض خطی بودن تحریک در فاصله  $\Delta t$  می‌باشد؛ به عبارت دیگر، سمت چپ معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت که به صورت معادله (۳۰) می‌باشد، بدون هیچگونه تغییری باقی می‌ماند و تنها فرض استفاده شده در این روش این است که سمت راست معادله حرکت تقریب زده می‌شود. تنها تقریب استفاده شده به این صورت است که تغییرات شتاب پایه به صورت خطی در بازه  $\Delta t$  در نظر گرفته می‌شود که در واقعیت مطمئناً به این صورت نیست [۵].

معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت سیستم یک درجه آزادی خطی جرم-فنر-میراگر عبارت است از:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t)$$

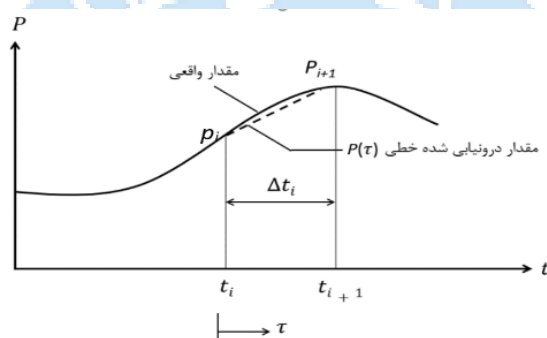
(۲۴)

که در این معادله  $u$ ،  $\dot{u}$  و  $\ddot{u}$  به ترتیب مقادیر جابجایی، سرعت و شتاب جرم  $m$  می‌باشند. در حالتی که بجای نیروی  $p(t)$  سیستم یک درجه آزاد مورد بحث، تحت اثر حرکت افقی  $u_g(t)$  زمین قرار گرفته باشد، در مرجع  $[\delta]$  ثابت شده‌است که معادله (۳۰) به شکل زیر در می‌آید:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g(t) \quad (25)$$

در معادله (۲۵)،  $u$ ،  $\dot{u}$  و  $\ddot{u}$  به ترتیب مقادیر جابجایی نسبی، سرعت نسبی و شتاب نسبی جرم  $m$  نسبت به زمین (تکیه‌گاه) می‌باشند و  $\ddot{u}_g(t)$  نیز شتاب حرکت زمین است. شتاب حرکت زمین که بوسیله دستگاه‌های شتابنگار اندازه‌گیری می‌شود معمولاً به صورت یک مجموعه اعداد می‌باشند که به فواصل زمانی مشخص  $\Delta t$  از یکدیگر قرار دارند. به عنوان مثال، فواصل زمانی بین نقاط شتابنگاشت‌های ال-سترو، ناغان و طبس برابر با  $0/02$  ثانیه می‌باشد.

روش جنینگز، روشی عددی برای حل معادله دیفرانسیل (۲۴) یا (۲۵) می‌باشد. این روش مبتنی بر روابط دقیق و فرض تغییرات خطی تابع تحریک  $p(t)$  است که در شکل (۱) مشخص شده است.



شکل ۱- نمادهای مورد استفاده در درونیابی خطی تحریک  $[\delta]$

تابع تحریک  $p(\tau)$  در بازه زمانی  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$  را می‌توان به صورت یک تابع خطی بر حسب  $\tau$  به شکل زیر بیان کرد:

$$p(\tau) = p_i + \frac{\Delta p_i}{\Delta t_i} \tau \quad (26)$$

که در آن  $\Delta p_i = p_{i+1} - p_i$  می‌باشد و متغیر  $\tau$  از صفر تا  $\Delta t_i$  تغییر می‌کند. پاسخ  $u(\tau)$  سیستم یک درجه آزاد مورد بحث در بازه زمانی  $0 \leq \tau \leq \Delta t_i$  حاصل جمع سه قسمت است: (۱) ارتعاش آزاد تحت جابجایی اولیه  $u_i$  و سرعت اولیه  $\dot{u}_i$  در  $\tau = 0$ ، (۲) پاسخ به نیروی پله‌ای  $p_i$  با شرایط اولیه صفر و (۳) پاسخ به نیروی شیبدار  $\frac{\Delta p_i}{\Delta t_i} \tau$  با شرایط اولیه صفر. با جمع پاسخ‌های سه قسمت فوق‌الذکر، پاسخ  $u(\tau)$  بدست می‌آید. با جایگذاری  $\tau = \Delta t_i$  در  $u(\tau)$  و  $\dot{u}(\tau)$ ، جابه‌جایی  $u_{i+1}$  و سرعت  $\dot{u}_{i+1}$  که به ترتیب جابجایی و سرعت جرم در زمان  $t_{i+1}$  هستند، بدست می‌آید. جزئیات کار در مرجع  $[\delta]$  توضیح داده شده است و در نهایت در این مرجع، معادلات بازگشتی زیر برای محاسبه  $u_{i+1}$  و  $\dot{u}_{i+1}$  ارائه شده است:

$$u_{i+1} = Au_i + B\dot{u}_i + Cp_i + Dp_{i+1} \quad (27)$$

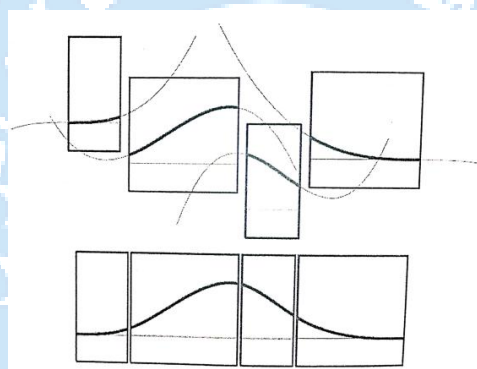
$$\dot{u}_{i+1} = A'u_i + B'\dot{u}_i + C'p_i + D'p_{i+1} \quad (28)$$

مقادیر هشت ضریب  $A, B, C, \dots, D'$  که در سمت راست روابط (۲۵) و (۲۶) وجود دارند، در مرجع [۵] آورده شده‌اند. این ضرایب بستگی به پارامترهای  $\omega_n$ ،  $k$  و  $\zeta$ ، سیستم یک درجه آزاد خطی دارند. همچنین، آنها وابسته به بازه زمانی  $\Delta t = \Delta t_i$  نیز هستند. لازم به ذکر است که  $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ،  $\zeta = \frac{c}{2m\omega_n}$  و  $\omega_D = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$  می‌باشد. همچنین، در حالی که گام زمانی  $\Delta t = \Delta t_i$  ثابت باشد، کافی است که هشت ضریب  $A, B, C, \dots, D'$  فقط یکبار محاسبه شوند.

هر گاه از درونیایی اسپلاین مکعبی به جای درونیایی خطی استفاده شود، در سمت راست معادله (۲۲) یا معادله (۲۳) یک تابع تحریک درجه سه  $p(t)$  در بازه زمانی  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$  به شکل زیر بر حسب  $\tau$  وجود دارد:

$$p(\tau) = a_i \tau^3 + b_i \tau^2 + c_i \tau + d_i \quad (29)$$

در رابطه (۲۹)،  $a_i$ ،  $b_i$ ،  $c_i$  و  $d_i$  ضرایب ثابتی هستند که چگونگی محاسبه آنها در مرجع [۳] توضیح داده شده است. در حقیقت در روش جنینگز ارتقاء یافته در هر گام زمانی از یک چند جمله ای درجه ۳ بجای درونیایی خطی استفاده می‌شود. در شکل (۲) این چند جمله‌ای های درجه ۳ نشان داده شده‌اند. این منحنی ها موسوم به منحنی های اسپلاین هستند. در نقاط اتصال این منحنی‌ها، علاوه بر مقدار آنها شیب و مشتق دوم این منحنی ها نیز با یکدیگر برابر است.



شکل ۲- مفهوم منحنی های اسپلاین

حال معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = a_i \tau^3 + b_i \tau^2 + c_i \tau + d_i \quad t_i \leq \tau \leq t_{i+1} \quad (30)$$

این معادله با فرض اینکه میرایی سیستم زیر مقدار بحرانی باشد، یک جواب عمومی به شکل زیر دارد:

$$u_{general}(\tau) = e^{-\zeta \omega_n \tau} [A \cos \omega_D \tau + B \sin \omega_D \tau] \quad (31)$$

در رابطه (۳۱)،  $A$  و  $B$  دو ضریب ثابت هستند. حل مکمل یا خصوصی معادله دیفرانسیل (۳۰) با توجه به اینکه سمت راست این معادله یک تابع درجه سه بر حسب  $\tau$  است را باید به صورت زیر در نظر گرفت:

$$u_p(\tau) = A' \tau^3 + B' \tau^2 + C' \tau + D' \quad (32)$$

که  $A'$ ،  $B'$  و  $C'$  و  $D'$  چهار ضریب ثابت هستند که مقادیر آنها با روشهای استاندارد مطرح در مبحث معادلات دیفرانسیل بدست می‌آیند:

با جمع جواب‌های عمومی و خصوصی معادله (۳۰)، جواب کل بدست می‌آید:

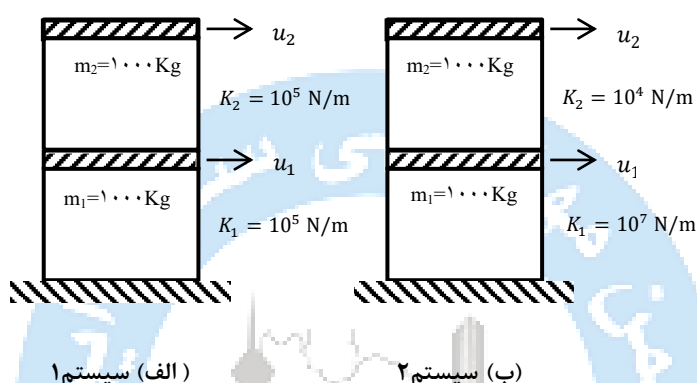
$$u_{total}(\tau) = u_g(\tau) + u_c(\tau) = e^{-\zeta \omega_n \tau} [A \cos \omega_D \tau + B \sin \omega_D \tau] + A' \tau^3 + B' \tau^2 + C' \tau + D' \quad (33)$$

که ضرایب ثابت  $A$  و  $B$  با اعمال تغییر مکان و سرعت در ابتدای بازه محاسبه می‌شوند.

#### ۴- مقایسه کمی میزان دقت روش‌های مختلف عددی با یکدیگر

##### ۴-۱- مشخصات جرم و سختی سیستم‌های دو درجه آزادی مورد بررسی در این مقاله

دو سیستم دو درجه آزادی در این مقاله مورد بررسی قرار گرفتند. این دو سیستم بدون میرایی بودند. مشخصات جرم و سختی این دو سیستم از مرجع [۲] اخذ گردیده است. البته در این مرجع رفتار غیرخطی این دو سیستم مورد بررسی قرار گرفته است که با صفر در نظر گرفتن پارامتر غیرخطی آلفا، مشخصات خطی این دو سیستم بدست آمده است. شکل این دو سیستم که دو ساختمان برشی دو طبقه بودند در شکل ۳ آورده شده است.



شکل ۳- مشخصات جرم و سختی سیستم‌های دو درجه آزادی مورد بررسی در این مقاله

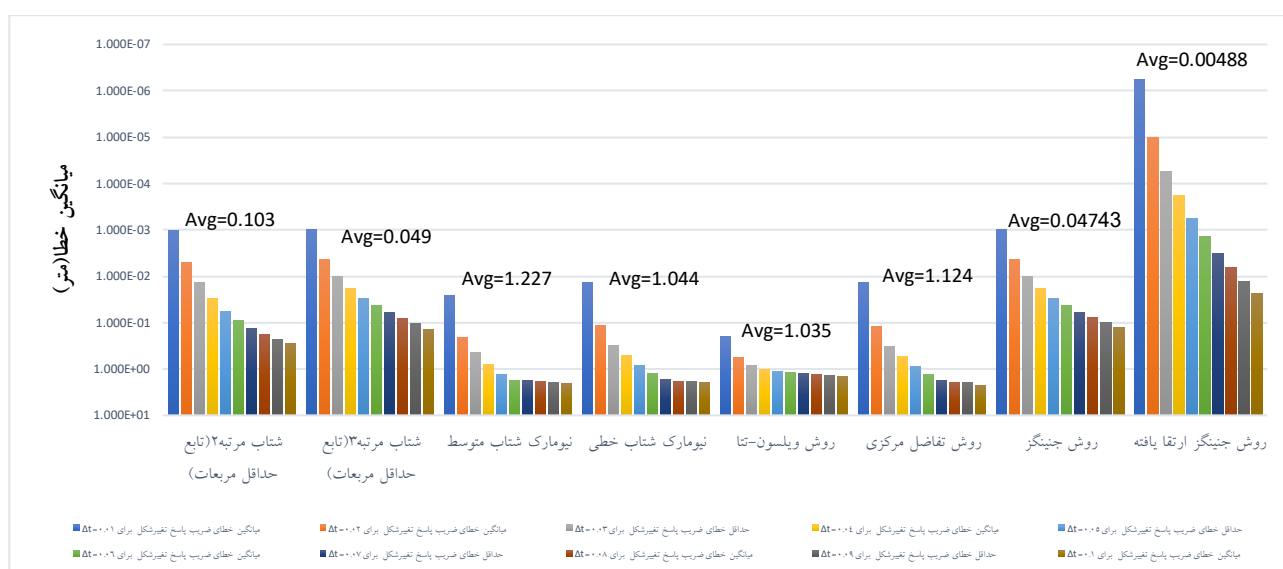
فرکانس‌های زاویه‌ای مد اول و دوم سیستم ۱ به ترتیب  $۶/۱۸$  و  $۱۶/۱۸$  رادیان بر ثانیه است. این مقادیر برای سیستم ۲ به ترتیب برابر با  $۳/۱۶$  و  $۱۰/۰۵$  رادیان بر ثانیه می‌باشد. جرم موثر مد اول و دوم سیستم ۱ به ترتیب برابر با  $۱۸۹۴/۴$  و  $۱۰۵/۶$  کیلوگرم است. این مقادیر برای سیستم ۲ به ترتیب برابر با  $۱۰۰۲/۰$  و  $۹۹۸/۰$  کیلوگرم می‌باشد. همانطور که در شکل ۲ مشخص است جرم و سختی سیستم یک در طبقات ۱ و ۲ یکسان است اما برای سیستم ۲ جرم طبقه اول و دوم برابر است اما سختی طبقه دوم  $۰/۰۰۱$  سختی طبقه اول آن است که این موضوع باعث شده است فرکانس مد اول و دوم آن از یکدیگر فاصله زیادی داشته باشند و همچنین جرم موثر مد اول و دوم آن تقریباً با یکدیگر برابر باشند.

##### ۴-۲- بررسی میانگین خطای روش شتاب مرتبه ۳ با دیگر روش‌های عددی برای طبقه اول سیستم ۱ و ۲

در این بخش برای مقایسه کمی خطاهای روش‌های مختلف، دو سیستم ۱ و ۲ که در بخش قبلی معرفی گردید، تحت بارگذاری هارمونیک پایه قرار گرفتند و پاسخ تحلیلی (دقیق) آنها با روش‌های استاندارد مطرح در کتب دینامیک سازه‌ها محاسبه گردید. منظور از روش‌های استاندارد مطرح در کتب دینامیک سازه‌ها، همان روش تحلیل مودال می‌باشد. در روش تحلیل مودال، پاسخ یک سیستم خطی  $n$  درجه آزادی تحت بارگذاری هارمونیک پایه تبدیل به پاسخ  $n$  سیستم یک درجه آزادی خطی با فرکانس‌های  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  و شکل مد-های  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  می‌شود و در آخر با جمع جبری پاسخ‌های این سیستم‌های یک درجه آزادی، پاسخ تحلیلی دقیق سیستم  $n$  درجه آزادی بدست می‌آید. سپس با ۸ روش عددی معرفی شده در این مقاله، پاسخ تقریبی این دو سیستم محاسبه گردید. برای دو سیستم ۱ و ۲ یک بازه مناسبی از فرکانس‌های بارگذاری با توجه به فرکانس‌های ارتعاش طبیعی سیستم‌های ۱ و ۲ انتخاب گردید. برای سیستم ۱، بازه فرکانس‌های بارگذاری از ۱ تا ۳۰ رادیان بر ثانیه و با افزایش  $۰/۱$  رادیان بر ثانیه در نظر گرفته شد که بدین ترتیب ۲۹۱ فرکانس بارگذاری

را شامل می‌شد. برای سیستم ۲، بازه فرکانس‌های بارگذاری از ۱ تا ۳۰۰ رادیان بر ثانیه و با افزایش ۱ رادیان بر ثانیه در نظر گرفته شد که بدین ترتیب ۳۰۰ فرکانس بارگذاری را شامل می‌گردد. در شکل‌های شماره ۴ و ۵ نمودار میله‌ای میانگین خطای روش‌های مختلف برای سیستم ۱ به ازای  $\Delta t = 0/1$  ثانیه تا  $\Delta t = 0/10$  ثانیه و برای سیستم ۲ به ازای  $\Delta t = 0/1$  ثانیه تا  $\Delta t = 0/19$  ثانیه آورده شده است. منظور از خطا، پارامتر جذر میانگین مربعات خطا می‌باشد. لازم به ذکر است محور قائم نمودارهای میله‌ای، لگاریتمی معکوس می‌باشند، به عبارتی دیگر میله‌ای که بیشترین ارتفاع را دارد، دارای کمترین خطا است و با توجه به اینکه جذر میانگین مربعات خطا به عنوان معیار خطا انتخاب گردیده است، در نتیجه تمام مقادیر اعدادی مثبت می‌باشند.

در سیستم یک، مقدار جذر میانگین مربعات خطا برای  $\Delta t$ های ۰/۰۱، ۰/۰۲، ۰/۰۳، ۰/۰۴، ۰/۰۵، ۰/۰۶، ۰/۰۷، ۰/۰۸، ۰/۰۹ و ۰/۱ ثانیه و در سیستم دو برای  $\Delta t$ های ۰/۰۱، ۰/۰۱۱، ۰/۰۱۲، ۰/۰۱۳، ۰/۰۱۴، ۰/۰۱۵، ۰/۰۱۶، ۰/۰۱۷، ۰/۰۱۸ و ۰/۰۱۹ ثانیه محاسبه گردید. تعداد نقاط در نظر گرفته شده برای محاسبه معیار خطای جذر میانگین مربعات برابر با ۱۰۰۱ نقطه بود.



شکل ۴- میانگین خطای روش‌های مختلف عددی برای طبقه اول سیستم ۱ برای  $\Delta t = 0/1$  تا  $\Delta t = 0/19$  ثانیه

با دقت در مقادیر عددی میانگین خطای روش‌های مختلف در شکل ۴، نتایج زیر حاصل گردید:

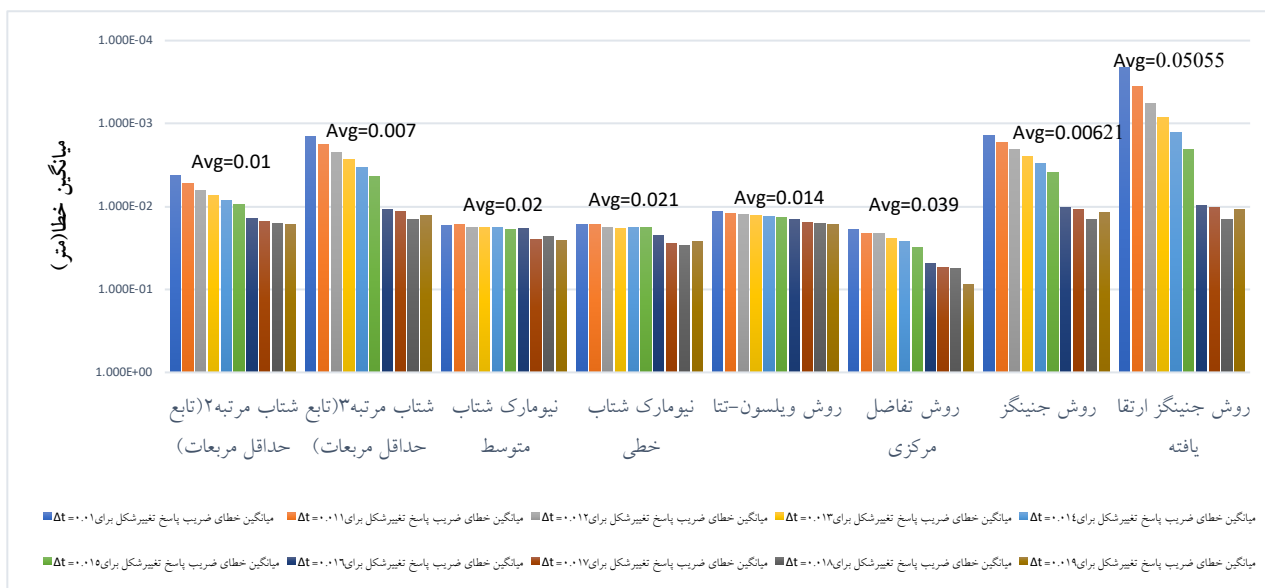
۱- در روش‌های شتاب مرتبه دوم و شتاب مرتبه سوم و همچنین، روش‌های جینگز و جینگز ارتقاء یافته بدون استثناء با افزایش  $\Delta t$ ، میانگین خطا افزایش می‌یابد. اما در چهار روش عددی دیگر این روند مشاهده نگردید.

۲- در روش شتاب مرتبه ۳، برای  $\Delta t = 0/1$  میانگین خطا  $9/811 \times 10^{-4}$  متر بوده است که در روش شتاب مرتبه ۲ مقدار متناظر آن  $1/016 \times 10^{-3}$  متر است که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳، ۳/۴۴ درصد میانگین خطا کاهش یافته است که عدد کوچکی است. در روش شتاب مرتبه ۲، برای  $\Delta t = 0/1$  میانگین خطا  $1/372 \times 10^{-1}$  متر بوده است که در روش شتاب مرتبه ۲ مقدار متناظر آن  $2/874 \times 10^{-1}$  متر است که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳، ۵۲/۲۶ درصد میانگین خطا کاهش یافته است.

۳- روش جینگز ارتقا یافته کمترین میانگین خطا را برای همه ی  $\Delta t$  ها داشته است. با افزایش  $\Delta t$  از ۰/۰۱ ثانیه به ۰/۱۰ ثانیه، میانگین خطای این روش از مقدار  $5/699 \times 10^{-7}$  متر به مقدار  $2/383 \times 10^{-2}$  متر افزایش یافت. مقادیر میانگین خطا برای روش شتاب مرتبه ۳ برای  $\Delta t$  های متناظر قید شده در بالا به ترتیب  $9/811 \times 10^{-4}$  و  $1/372 \times 10^{-1}$  بود. با مقایسه میانگین خطای روش جینگز ارتقا یافته برای  $\Delta t$  برابر با ۰/۰۱ ثانیه با مقدار متناظر میانگین خطای روش شتاب مرتبه سوم مشاهده می‌شود که میانگین خطای روش شتاب

مرتبۀ ۳ حدود ۱۷۲۰ برابر خطای روش جنینگز ارتقا یافته است. این نسبت برای  $\Delta t$  برابر با ۰/۱۰ ثانیه برابر با ۵/۷۶ است که بیانگر کاهش بسیار شدید آن می‌باشد.

۴- روش ویلسون-تتا، برای  $\Delta t = 0/01$  تا  $\Delta t = 0/05$  بیشترین میانگین خطا را داشته است. میانگین خطای روش ویلسون برای  $\Delta t = 0/01$  برابر با  $2/039 \times 10^{-1}$  و میانگین خطای این روش برای  $\Delta t = 0/05$  برابر ۱/۱۲۹ بود. روش تفاضل مرکزی، برای  $\Delta t = 0/06$  تا  $\Delta t = 0/10$  بیشترین میانگین خطا را داشته است. میانگین خطای روش تفاضل مرکزی برای  $\Delta t = 0/06$  برابر با ۱/۳۳۳ و میانگین خطای این روش برای  $\Delta t = 0/10$  برابر ۲/۲۵۴ بود.



### شکل ۵- میانگین خطای روش‌های مختلف عددی برای طبقه اول سیستم ۲ برای $\Delta t = 0/01$ تا $\Delta t = 0/19$ ثانیه

با دقت در مقادیر عددی میانگین خطای روش‌های مختلف در شکل ۵، نتایج زیر حاصل گردید:

۱- در روش‌های شتاب مرتبه ۲ و ویلسون بدون استثنای افزایش  $\Delta t$  میانگین خطا افزایش می‌یابد و در روش‌های شتاب مرتبه ۳، جنینگز و جنینگز ارتقا یافته به جز  $\Delta t = 0/019$  با افزایش  $\Delta t$  میزان خطا افزایش می‌یابد.

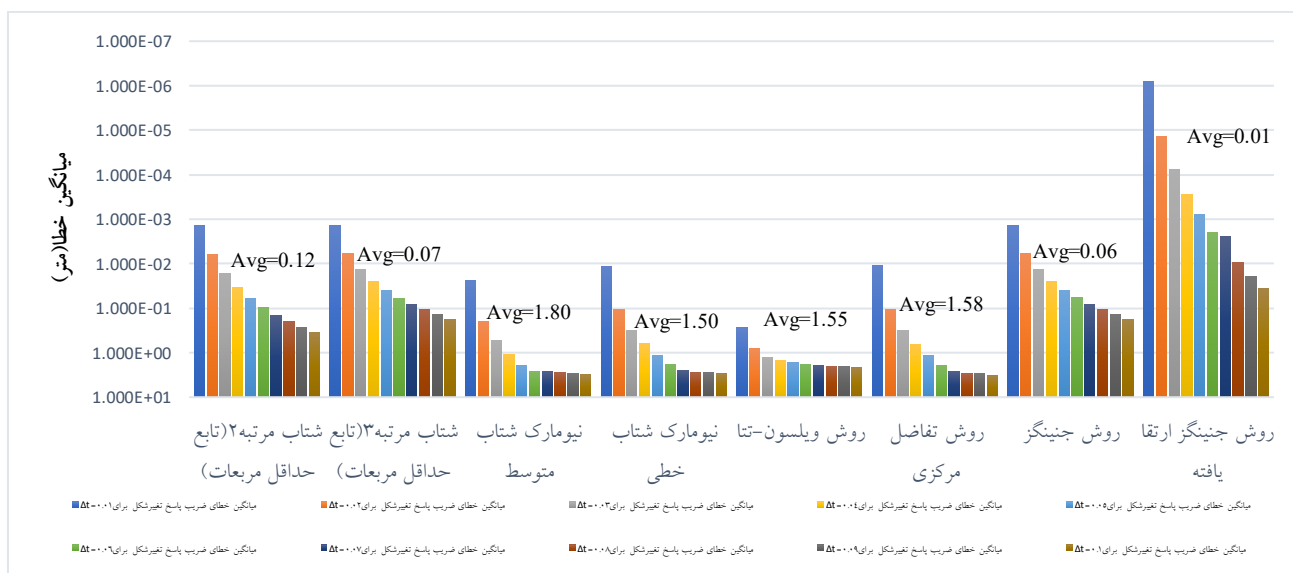
۲- در روش شتاب مرتبه ۳، برای  $\Delta t = 0/01$  میانگین خطا  $1/423 \times 10^{-3}$  بوده است که در روش شتاب مرتبه ۲ مقدار متناظر آن  $10^{-3}$   $4/281$  است که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳، ۶۶/۷۷ درصد میانگین خطا کاهش یافته است. در روش شتاب مرتبه ۲، برای  $\Delta t = 0/019$  میانگین خطا  $1/295 \times 10^{-2}$  بوده است که در روش شتاب مرتبه ۲ مقدار متناظر آن  $1/627 \times 10^{-2}$  است که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳، ۲۰/۴۱ درصد میانگین خطا کاهش یافته است.

۳- روش جنینگز ارتقا یافته کمترین خطا را برای همه ی  $\Delta t$  ها داشته است. با افزایش  $\Delta t$  از ۰/۰۱ ثانیه به ۰/۰۱۹ ثانیه، میانگین خطای این روش از مقدار  $2/083 \times 10^{-4}$  متر به مقدار  $1/101 \times 10^{-2}$  متر افزایش یافت. مقادیر میانگین خطا برای روش شتاب مرتبه ۳ برای  $\Delta t$  های متناظر قید شده در بالا به ترتیب  $1/423 \times 10^{-3}$  و  $1/295 \times 10^{-2}$  بود. با مقایسه میانگین خطای روش جنینگز ارتقا یافته برای  $\Delta t$  برابر با ۰/۰۱ ثانیه با مقدار متناظر میانگین خطای روش شتاب مرتبه سوم مشاهده می‌شود که میانگین خطای روش شتاب مرتبه ۳ حدود ۶/۸ برابر خطای روش جنینگز ارتقا یافته است. این نسبت برای  $\Delta t$  برابر با ۰/۰۱۹ ثانیه برابر با ۱/۱۸ است که بیانگر کاهش شدید آن می‌باشد.

۴- روش تفاضل مرکزی بیشترین میانگین خطا را برای همه ی  $\Delta t$  ها داشته است. میانگین خطای روش تفاضل مرکزی برای  $0/01$   $\Delta t =$  برابر با  $1/899 \times 10^{-2}$  متر و میانگین خطای این روش برای  $0/10$   $\Delta t =$  برابر  $8/720 \times 10^{-2}$  متر بود.

#### ۴-۳- بررسی میانگین خطای روش شتاب مرتبه ۳ با دیگر روش های عددی برای طبقه دوم سیستم ۱ و ۲

در شکل ۶ نمودار میله ای میانگین خطای روش های مختلف عددی برای طبقه دوم سیستم ۱ برای  $\Delta t$  های مختلف آورده شده است.



شکل ۶- میانگین خطای روش های مختلف عددی برای طبقه دوم سیستم ۱ برای  $\Delta t = 0/01$  تا  $\Delta t = 0/1$  ثانیه

با دقت در مقادیر عددی میانگین خطای روش های مختلف در شکل ۶، نتایج زیر حاصل گردید:

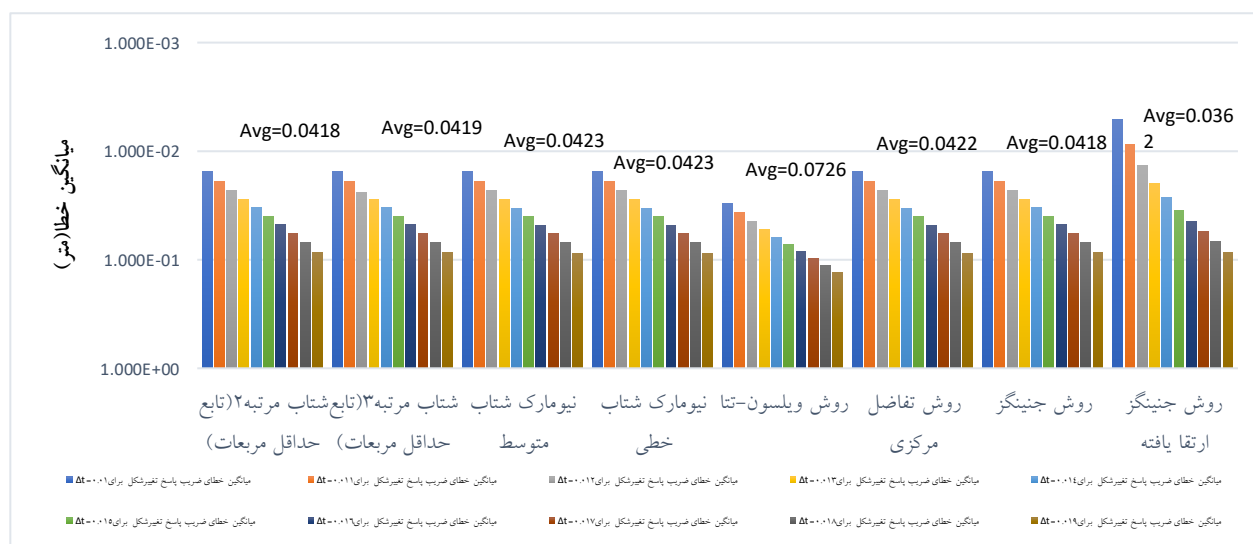
۱- در همه ی روش ها بدون استثناء با افزایش  $\Delta t$ ، میزان خطا افزایش می یابد، اما یک مورد تناقض در روش تفاضل مرکزی در  $0/09$   $\Delta t =$  ثانیه مشاهده گردید.

۲- در روش شتاب مرتبه ۳، برای  $0/01$   $\Delta t =$  ثانیه میانگین خطا  $1/378 \times 10^{-3}$  متر بوده است که در روش شتاب مرتبه ۲ مقدار متناظر آن  $1/400 \times 10^{-3}$  متر است که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳،  $1/57$  درصد میانگین خطا کاهش یافته است که عدد کوچکی است. در روش شتاب مرتبه ۲، برای  $0/1$   $\Delta t =$  ثانیه میانگین خطا  $1/804 \times 10^{-1}$  متر بوده است که در روش شتاب مرتبه ۲ مقدار متناظر آن  $3/467 \times 10^{-1}$  متر است که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳،  $47/97$  درصد میانگین خطا کاهش یافته است.

۴- روش جینگز ارتقا یافته کمترین خطا را برای همه ی  $\Delta t$  ها داشته است. با افزایش  $\Delta t$  از  $0/01$  ثانیه به  $0/10$  ثانیه، میانگین خطای این روش از مقدار  $7/939 \times 10^{-7}$  متر به مقدار  $3/513 \times 10^{-2}$  متر افزایش یافت. مقادیر میانگین خطا برای روش شتاب مرتبه ۳ برای  $\Delta t$  های متناظر قید شده در بالا به ترتیب  $1/378 \times 10^{-3}$  و  $1/804 \times 10^{-1}$  بود. با مقایسه میانگین خطای روش جینگز ارتقا یافته برای  $\Delta t$  برابر با  $0/01$  ثانیه با مقدار متناظر میانگین خطای روش شتاب مرتبه سوم مشاهده می شود که میانگین خطای روش شتاب مرتبه ۳ حدود  $1736$  برابر خطای روش جینگز ارتقا یافته است. این نسبت برای  $\Delta t$  برابر با  $0/10$  ثانیه برابر با  $5/14$  است که بیانگر کاهش بسیار شدید آن می باشد.

۵- روش ویلسون، برای  $\Delta t = 0/01$  تا  $\Delta t = 0/07$  بیشترین خطا و روش تفاضل مرکزی، برای  $\Delta t = 0/08$  تا  $\Delta t = 0/1$  بیشترین خطا را داشته است. میانگین خطای روش ویلسون برای  $\Delta t = 0/01$  برابر با  $2/671 \times 10^{-1}$  و میانگین خطای این روش برای  $\Delta t = 0/07$  برابر  $1/910$  بود. میانگین خطای روش تفاضل مرکزی برای  $\Delta t = 0/08$  برابر با  $2/936$  و میانگین خطای این روش برای  $\Delta t = 0/10$  برابر  $3/240$  بود.

در شکل ۷ نمودار میله‌ای میانگین خطای روش‌های مختلف عددی برای طبقه دوم سیستم ۲ برای  $\Delta t$ های مختلف آورده شده است.



شکل ۷- میانگین خطای روش‌های مختلف عددی برای طبقه دوم سیستم ۲ برای  $\Delta t = 0/01$  تا  $\Delta t = 0/019$  ثانیه

با دقت در مقادیر عددی میانگین خطای روش‌های مختلف در شکل ۷، نتایج زیر حاصل گردید:

۱- در همه ی روش‌ها بدون استثناء با افزایش  $\Delta t$ ، میانگین خطا افزایش می‌یابد.

۲- در روش شتاب مرتبه ۳، برای  $\Delta t = 0/01$  میانگین خطا  $1/526 \times 10^{-2}$  بوده است که در روش شتاب مرتبه ۲ مقدار متناظر آن  $1/526 \times 10^{-2}$  است که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳، معیار خطا کاهش نیافته است. در روش شتاب مرتبه ۲، برای  $\Delta t = 0/019$  میانگین خطا  $8/637 \times 10^{-2}$  بوده است که در روش شتاب مرتبه ۲ مقدار متناظر آن  $8/637 \times 10^{-2}$  است که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳، معیار خطا کاهش نیافته است.

۳- روش جیننگز ارتقا یافته کمترین خطا را برای همه ی  $\Delta t$ ها داشته است. با افزایش  $\Delta t$  از  $0/01$  ثانیه به  $0/019$  ثانیه، میانگین خطای این روش از مقدار  $5/101 \times 10^{-3}$  متر به مقدار  $8/577 \times 10^{-2}$  متر افزایش یافت. مقادیر میانگین خطا برای روش شتاب مرتبه ۳ برای  $\Delta t$ های متناظر قید شده در بالا به ترتیب  $1/526 \times 10^{-2}$  و  $8/637 \times 10^{-2}$  بود. با مقایسه میانگین خطای روش جیننگز ارتقا یافته برای  $\Delta t$  برابر با  $0/01$  ثانیه با مقدار متناظر میانگین خطای روش شتاب مرتبه سوم مشاهده می‌شود که میانگین خطای روش شتاب مرتبه ۳ حدود  $2/99$  برابر خطای روش جیننگز ارتقا یافته است. این نسبت برای  $\Delta t$  برابر با  $0/019$  ثانیه برابر با  $1/007$  است که بیانگر کاهش آن می‌باشد.

۴- روش ویلسون-تتا بیشترین خطا را برای همه ی  $\Delta t$ ها داشته است. میانگین خطای روش ویلسون برای  $\Delta t = 0/01$  برابر با  $3/02 \times 10^{-2}$  متر و میانگین خطای این روش برای  $\Delta t = 0/019$  برابر  $1/323 \times 10^{-1}$  متر بود.

در جدول (۱)، مقادیر میانگین میانگین خطاهای روش‌های مختلف به ترتیب صعودی آورده شده است. همچنین این مقادیر در شکل‌های (۳)، (۴)، (۵) و (۶) نیز درج گردیده است. این اعداد بیانگر مقدار متوسط خطاهای یک روش به ازای  $\Delta t$  های مختلف است. با دقت در این در این جدول مشخص می‌گردد که برای طبقات اول و دوم سیستم ۱ و نیز طبقه اول سیستم ۲، به ترتیب صعودی، روش جنینگز ارتقا یافته، روش جنینگز و روش شتاب مرتبه ۳، دارای کمترین مقدار میانگین میانگین خطا بودند. اما برای طبقه دوم سیستم ۲، روش شتاب مرتبه ۲ جایگزین روش شتاب مرتبه سوم گردیده است. از لحاظ بیشترین مقدار میانگین میانگین خطا برای طبقات اول و دوم سیستم ۱، روش نیومارک (شتاب متوسط) حداکثر مقدار را داشته است اما برای طبقه اول سیستم ۲، روش تفاضل مرکزی، و برای طبقه دوم این سیستم، روش ویلسون-تتا دارای حداکثر مقدار بوده است.

جدول (۱) - مقادیر میانگین میانگین خطاهای روش‌های مختلف به ترتیب صعودی

روش جنینگز ارتقا یافته	روش جنینگز	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	روش ویلسون - تتا	نیومارک شتاب خطی	روش تفاضل مرکزی	نیومارک شتاب متوسط	سیستم ۱
$4/743 \times 10^{-2}$	$4/881 \times 10^{-3}$	$4/938 \times 10^{-2}$	$1/029 \times 10^{-1}$	$1/035$	$1/044$	$1/124$	$1/227$	طبقه اول
روش جنینگز ارتقا یافته	روش جنینگز	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	نیومارک شتاب خطی	روش ویلسون - تتا	روش تفاضل مرکزی	نیومارک شتاب متوسط	طبقه دوم
$6/484 \times 10^{-2}$	$6/927 \times 10^{-3}$	$6/595 \times 10^{-2}$	$1/170 \times 10^{-1}$	$1/501$	$1/549$	$1/584$	$1/789$	طبقه اول
روش جنینگز ارتقا یافته	روش جنینگز	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	روش ویلسون - تتا	نیومارک شتاب متوسط	روش تفاضل مرکزی	نیومارک شتاب خطی	سیستم ۲
$5/055 \times 10^{-3}$	$6/213 \times 10^{-3}$	$6/549 \times 10^{-3}$	$1/027 \times 10^{-1}$	$1/379 \times 10^{-2}$	$1/984 \times 10^{-2}$	$2/119 \times 10^{-2}$	$3/906 \times 10^{-2}$	طبقه اول
روش جنینگز ارتقا یافته	روش جنینگز	شتاب مرتبه ۲ (تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتبه ۳ (تابع حداقل مربعات)	روش تفاضل مرکزی	نیومارک شتاب متوسط	نیومارک شتاب خطی	روش ویلسون - تتا	طبقه دوم
$3/616 \times 10^{-2}$	$4/179 \times 10^{-2}$	$4/179 \times 10^{-2}$	$4/189 \times 10^{-2}$	$4/220 \times 10^{-2}$	$4/223 \times 10^{-2}$	$4/223 \times 10^{-2}$	$7/263 \times 10^{-2}$	

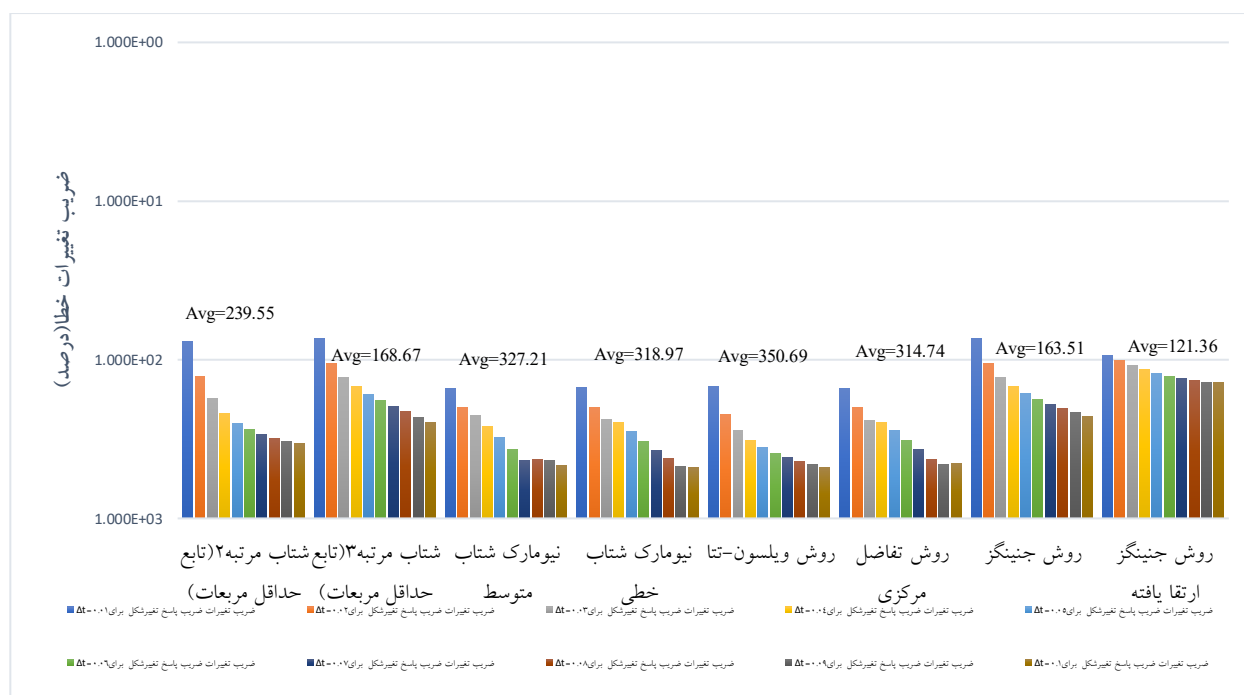
#### ۴-۴- بررسی ضریب تغییرات خطای روش شتاب مرتبه ۳ با دیگر روش‌های عددی برای طبقه اول سیستم

۲ و ۱

در نظریه آمار و احتمال، ضریب تغییرات (coefficient of variation) که مخفف آن (CV) است یک معیار بدون بعد است که برای اندازه‌گیری توزیع داده‌های آماری به کار می‌رود که از تقسیم انحراف معیار بر میانگین به دست می‌آید. به عبارت دیگر ضریب تغییرات، میزان پراکندگی به ازای یک واحد از میانگین را بیان می‌کند. معمولاً ضریب تغییرات را در عدد ۱۰۰ ضرب می‌کنند تا عدد نهایی

برحسب درصد به دست بیاید. از ضریب تغییرات برای مقایسه پراکندگی دو یا چند صفت (متغیر) استفاده می‌کنند و کاربرد اصلی آن مقایسه متغیرهایی است که واحدهای سنجش متفاوتی دارند. این شاخص تنها برای سطح سنجش نسبی کاربرد دارد.

نمودار میله‌ای ضریب تغییرات خطای پاسخ تغییرمکان طبقه اول سیستم ۱ بر حسب درصد در شکل ۸ آورده شده است. مقیاس این نمودارهای میله‌ای به صورت لگاریتمی معکوس است. به عبارتی دیگر میله‌ای که کمترین ارتفاع را دارد دارای بیشترین مقدار ضریب تغییرات است.



شکل ۸- ضریب تغییرات خطای روش‌های مختلف عددی برای طبقه اول سیستم ۱ برای  $\Delta t = 0/01$  تا  $\Delta t = 0/1$  ثانیه

با دقت در مقادیر عددی ضریب تغییرات خطای روش‌های مختلف در شکل ۸، نتایج زیر حاصل گردید:

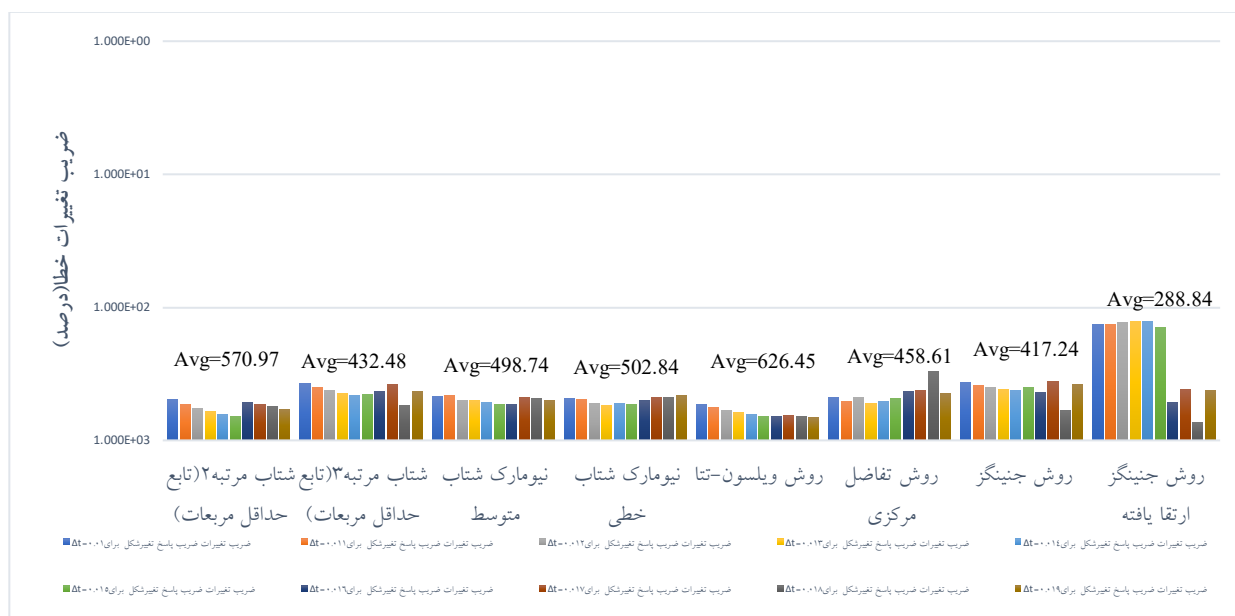
۱- در همه روش‌ها به استثنای روش نیومارک شتاب متوسط و روش تفاضل مرکزی با افزایش  $\Delta t$ ، ضریب تغییرات خطا افزایش می‌یابد.

۲- در روش شتاب مرتبه ۳، برای  $\Delta t = 0/01$  ثانیه ضریب تغییرات  $73/15$  درصد بوده است که در روش شتاب مرتبه ۲ مقدار متناظر آن  $77/19$  درصد است که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳،  $5/23$  درصد ضریب تغییرات کاهش یافته است که عدد کوچکی است. در روش شتاب مرتبه ۳، برای  $\Delta t = 0/1$  ضریب تغییرات  $247/9$  درصد بوده است که در روش شتاب مرتبه ۲ مقدار متناظر آن  $337/3$  درصد است که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳،  $26/5$  درصد ضریب تغییرات کاهش یافته است.

۳- روش جینگز کمترین ضریب تغییرات را برای  $\Delta t = 0/01$  ثانیه داشته است که مقدار آن  $73/14$  درصد می‌باشد. اما روش جینگز ارتقا یافته کمترین ضریب تغییرات را برای بقیه  $\Delta t$  ها داشته است. مقدار ضریب تغییرات این روش برای  $\Delta t = 0/02$  ثانیه برابر با  $10/2$  درصد و برای  $\Delta t = 0/10$  ثانیه برابر با  $139/9$  درصد بود.

۴- روش نیومارک شتاب خطی برای  $\Delta t = 0/1$  ثانیه و  $\Delta t = 0/09$  ثانیه، روش شتاب متوسط برای  $\Delta t = 0/07$  ثانیه، روش تفاضل مرکزی برای  $\Delta t = 0/01$  ثانیه و روش ویلسون-تتا، برای  $\Delta t = 0/02$ ،  $\Delta t = 0/03$ ،  $\Delta t = 0/04$ ،  $\Delta t = 0/05$ ،  $\Delta t = 0/06$ ،

و  $\Delta t = 0/08$  ثانیه بیشترین ضریب تغییرات را داشته است. مقادیر این ضریب تغییرات برای  $\Delta t = 0/1$  و  $\Delta t = 0/09$  ثانیه به ترتیب  $479/9$ ،  $470/1$  درصد، برای  $\Delta t = 0/07$  ثانیه برابر با  $432/1$  درصد، برای  $\Delta t = 0/01$  ثانیه برابر با  $151/4$  درصد و برای  $\Delta t = 0/02$ ،  $\Delta t = 0/03$ ،  $\Delta t = 0/04$ ،  $\Delta t = 0/05$ ،  $\Delta t = 0/06$  و  $\Delta t = 0/08$  ثانیه به ترتیب برابر با  $280/4$ ،  $222/8$ ،  $325/0$ ،  $359/7$ ،  $388/2$ ،  $435/3$  درصد بود.



شکل ۹- ضریب تغییرات خطای روش‌های مختلف عددی برای طبقه اول سیستم ۲ برای  $\Delta t = 0/01$  تا  $\Delta t = 0/019$  ثانیه

با دقت در مقادیر عددی ضریب تغییرات خطای روش‌های مختلف در شکل ۹، نتایج زیر حاصل گردید:

۱- در روش شتاب مرتبه ۳، برای  $\Delta t = 0/01$  ثانیه ضریب تغییرات  $373/7$  درصد بوده است که در روش شتاب مرتبه ۲ مقدار متناظر آن  $496/2$  درصد است که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳،  $24/69$  درصد ضریب تغییرات کاهش یافته است.

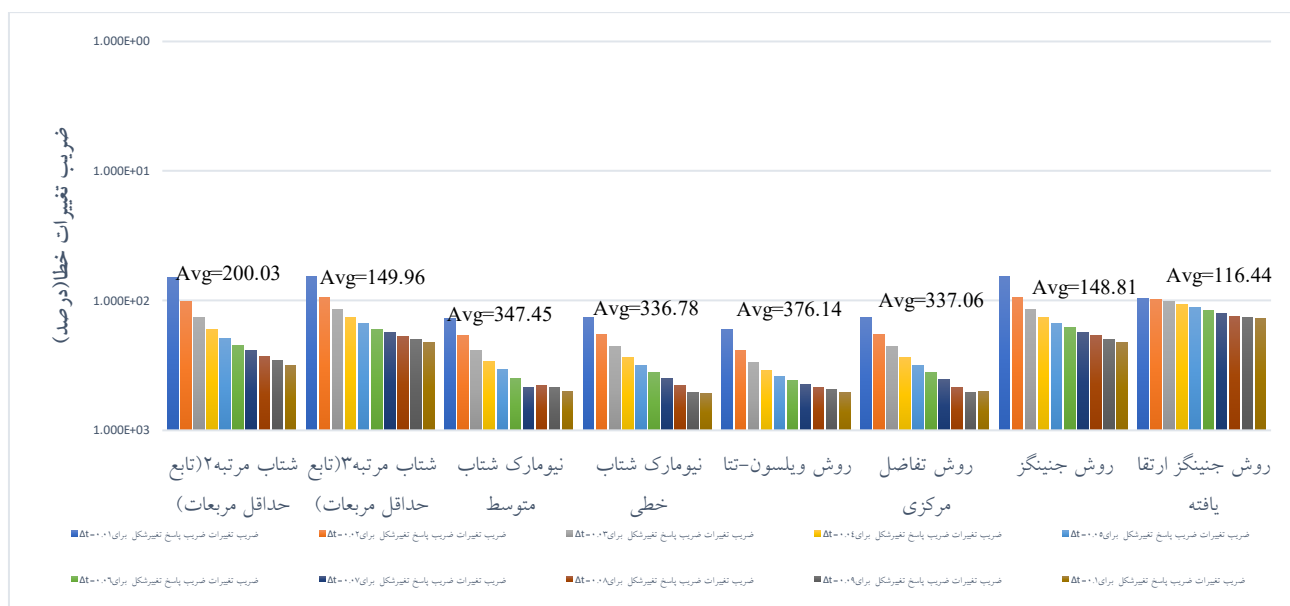
۲- در روش شتاب مرتبه ۳، برای  $\Delta t = 0/019$  ثانیه ضریب تغییرات  $428/7$  درصد بوده است که در روش شتاب مرتبه ۲ مقدار متناظر آن  $587/1$  درصد بوده است که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳،  $26/98$  درصد ضریب تغییرات کاهش یافته است.

۳- کمترین ضریب تغییرات را روش جنینگز ارتقا یافته برای  $\Delta t = 0/01$  تا  $\Delta t = 0/015$  ثانیه داشته که مقدار آن برای  $\Delta t = 0/01$  ثانیه برابر  $134/2$  درصد و برای  $\Delta t = 0/015$  ثانیه برابر  $141/0$  درصد می‌باشد و روش تفاضل مرکزی برای  $\Delta t = 0/016$  و  $\Delta t = 0/018$  ثانیه کمترین ضریب تغییرات را داشته که مقدار آن برای  $\Delta t = 0/016$  و  $\Delta t = 0/018$  ثانیه برابر  $304/6$  درصد می‌باشد و روش جنینگز برای  $\Delta t = 0/017$  و  $\Delta t = 0/019$  ثانیه کمترین ضریب تغییرات را داشته که مقدار آن برای  $\Delta t = 0/017$  ثانیه برابر  $363/8$  درصد و برای  $\Delta t = 0/019$  ثانیه  $383/1$  درصد می‌باشد.

۴- روش جنینگز ارتقا یافته برای  $\Delta t = 0/018$  ثانیه بیشترین ضریب تغییرات را داشته که مقدار آن  $733/7$  درصد است و روش ویلسون تتا برای بقیه  $\Delta t$ ها بیشترین ضریب تغییرات را داشته است.

۴-۵- بررسی ضریب تغییرات خطای روش شتاب مرتبه ۳ با دیگر روش‌های عددی برای طبقه دوم سیستم

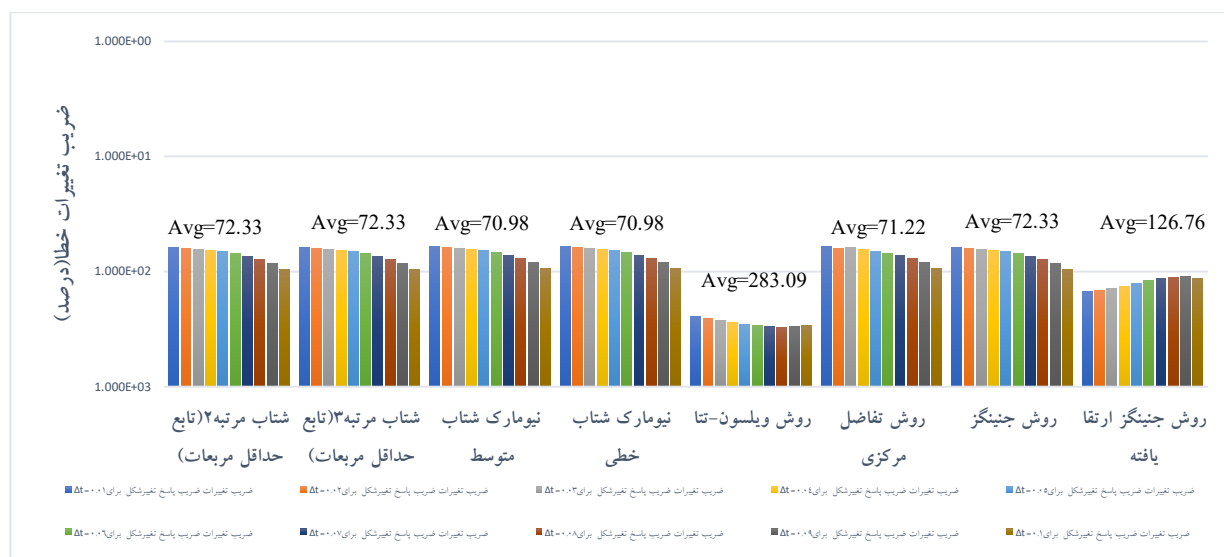
۲ و ۱



شکل ۱۰- ضریب تغییرات خطای روش‌های مختلف عددی برای طبقه ی دوم سیستم (برای  $\Delta t = 0.1$  تا  $\Delta t = 0.005$  ثانیه)

با دقت در مقادیر عددی ضریب تغییرات خطای روش‌های مختلف در شکل ۱۰، نتایج زیر حاصل گردید:

- ۱- در همه ی روش‌ها به جز روش‌های تفاضل مرکزی و نیومارک شتاب متوسط با افزایش  $\Delta t$ ، ضریب تغییرات افزایش می‌یابد.
- ۲- در روش شتاب مرتبه ۳، برای  $\Delta t = 0.1$  ثانیه ضریب تغییرات ۶۵/۴۷ درصد بوده است که در روش شتاب مرتبه ۲ مقدار متناظر آن ۶۶/۳۶ درصد است که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳، ۱/۳۶ درصد ضریب تغییرات کاهش یافته است.
- ۳- در روش شتاب مرتبه ۳، برای  $\Delta t = 0.1$  ثانیه ضریب تغییرات ۲۱۱/۷ بوده است که در روش شتاب مرتبه ۲ مقدار متناظر آن ۳۱۵/۱ است که با افزایش مرتبه شتاب از ۲ به ۳، ۴۸/۸۴ درصد ضریب تغییرات کاهش یافته است.
- ۴- روش شتاب مرتبه سوم در  $\Delta t = 0.1$  و  $\Delta t = 0.02$  ثانیه کمترین ضریب تغییرات را داشته که مقادیر آن به ترتیب ۶۵/۴۷ و ۹۴/۸۲ درصد می‌باشد و روش جنینگز ارتقا یافته در بقیه ی  $\Delta t$ ها کمترین مقدار ضریب تغییرات را داشته است.
- ۵- روش نیومارک شتاب خطی بیشترین مقدار ضریب تغییرات را در  $\Delta t = 0.09$  ثانیه داشته که مقدار آن ۵۰۷/۹ درصد و روش ویلسون-تتا بیشترین مقدار ضریب تغییرات را برای بقیه ی  $\Delta t$ ها داشته است.



شکل ۱۱- ضریب تغییرات خطای روش‌های مختلف عددی برای طبقه ی دوم سیستم ۲ برای  $\Delta t = 0.01$  تا  $\Delta t = 0.19$  ثانیه

با دقت در مقادیر عددی ضریب تغییرات خطای روش‌های مختلف در شکل ۱۱، نتایج زیر حاصل گردید:

۱- در همه ی روش‌ها به استثناء روش‌های ویلسون، تفاضل مرکزی و جینگز ارتقا یافته با افزایش  $\Delta t$ ، ضریب تغییرات افزایش می‌یابد،

۲- در روش شتاب مرتبه ۳ و شتاب مرتبه ۲ برای  $\Delta t = 0.01$  ثانیه ضریب تغییرات ۶۱/۴۶ درصد و در  $\Delta t = 0.19$  ضریب تغییرات ۹۶/۱۶ درصد بوده است. لازم به ذکر است مقادیر ضریب تغییرات این دو روش برای کلیه  $\Delta t$  ها یکسان بود. علاوه بر این در بخش قبل مشاهده گردید که مقادیر میانگین خطا برای کلیه  $\Delta t$  ها برای طبقه دوم سیستم ۲ برای روش شتاب مرتبه ۳ و شتاب مرتبه ۲ یکسان بودند.

۳- روش تفاضل مرکزی در  $\Delta t = 0.03$  ثانیه کمترین ضریب تغییرات را دارد که مقدار آن ۶۱/۶۳ درصد می‌باشد و روش نیومارک شتاب خطی و شتاب متوسط کمترین ضریب تغییرات را در بقیه  $\Delta t$  ها دارد.

۴- روش ویلسون-تتا بیشترین مقدار ضریب تغییرات را برای همه ی  $\Delta t$  ها داشته است. مقدار ضریب تغییرات این روش برای  $\Delta t = 0.01$  ثانیه ۲۴۳/۵ درصد و برای  $\Delta t = 0.19$  ثانیه ۲۹۳/۸ درصد می‌باشد.

در جدول (۲)، مقادیر میانگین ضریب تغییرات خطاهای روش‌های مختلف به ترتیب صعودی آورده شده است. همچنین این مقادیر در شکل‌های (۷)، (۸)، (۹) و (۱۰) نیز درج گردیده‌اند. این اعداد بیانگر مقدار متوسط ضریب تغییرات خطاهای یک روش به ازای  $\Delta t$  های مختلف هستند. با دقت در این جدول مشخص می‌گردد که برای طبقات اول و دوم سیستم ۱، به ترتیب صعودی، روش جینگز ارتقاء یافته، روش جینگز و روش شتاب مرتبه ۲، دارای کمترین مقدار میانگین ضریب تغییرات خطا بوده‌اند. از لحاظ بیشترین میانگین ضریب تغییرات خطا برای طبقات اول و دوم سیستم ۱ و ۲، روش ویلسون-تتا دارای حداکثر مقدار بوده است.

جدول (۲) - مقادیر میانگین ضریب تغییرات خطاهای روش‌های مختلف به ترتیب صعودی

روش ویلسون - تتا	نیومارک شتاب متوسط	نیومارک شتاب خطی	روش تفاضل مرکزی	شتاب مرتب ۳ (تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتب ۲ (تابع حداقل مربعات)	روش جنینگز	روش جنینگز ارتقا یافته	طبقه اول	سیستم ۱
۳۵۰/۶۹	۳۲۷/۲۱	۳۱۸/۹۷	۳۱۴/۷۴	۲۳۹/۵۵	۱۶۸/۶۷	۱۶۳/۵۱	۱۲۱/۳۶		
روش ویلسون - تتا	نیومارک شتاب متوسط	روش تفاضل مرکزی	نیومارک شتاب خطی	شتاب مرتب ۳ (تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتب ۲ (تابع حداقل مربعات)	روش جنینگز	روش جنینگز ارتقا یافته	طبقه دوم	سیستم ۱
۳۷۶/۱۴	۳۴۷/۴۵	۳۳۷/۰۶	۳۳۶/۷۸	۲۰۰/۰۳	۱۴۹/۹۶	۱۴۸/۸۱	۱۱۶/۴۴		
روش ویلسون - تتا	شتاب مرتب ۲ (تابع حداقل مربعات)	نیومارک شتاب خطی	نیومارک شتاب متوسط	روش تفاضل مرکزی	شتاب مرتب ۳ (تابع حداقل مربعات)	روش جنینگز	روش جنینگز ارتقا یافته	طبقه اول	سیستم ۲
۶۲۶/۴۵	۵۷۰/۹۷	۵۰۲/۸۴	۴۹۸/۷۴	۴۵۸/۶۱	۴۳۲/۴۸	۴۱۷/۲۴	۲۸۸/۸۴		
روش ویلسون - تتا	روش جنینگز ارتقا یافته	شتاب مرتب ۲ (تابع حداقل مربعات)	شتاب مرتب ۳ (تابع حداقل مربعات)	روش جنینگز	روش تفاضل مرکزی	نیومارک شتاب خطی	نیومارک شتاب متوسط	طبقه دوم	سیستم ۲
۲۸۳/۰۹۳	۱۲۶/۷۵۸	۷۲/۳۲۶	۷۲/۳۳۲	۷۲/۳۳۱	۷۱/۲۱۷	۷۰/۹۸۲	۷۰/۹۸۲		

## ۵- نتیجه گیری

در این مقاله دو سیستم دو درجه آزاد خطی مورد بررسی قرار گرفتند. این دو سیستم بدون میرایی بودند. مشخصات جرم و سختی این دو سیستم از مرجع [۲] اخذ گردیده بود. برای دو سیستم ۱ و ۲ یک بازه‌ی مناسبی از فرکانس‌های بارگذاری سینوسی با توجه به فرکانس‌های ارتعاش طبیعی آنها انتخاب گردید. برای سیستم ۱، بازه فرکانس‌های بارگذاری از ۱ تا ۳۰ رادیان بر ثانیه و با افزایش ۰/۱ رادیان بر ثانیه در نظر گرفته شد که بدین ترتیب ۲۹۱ فرکانس بارگذاری را شامل می‌شد. برای سیستم ۲، بازه فرکانس‌های بارگذاری از ۱ تا ۳۰۰ رادیان بر ثانیه و با افزایش ۱ رادیان بر ثانیه در نظر گرفته شد که بدین ترتیب ۳۰۰ فرکانس بارگذاری را شامل می‌گردید. ابتدا پاسخ دقیق (تحلیلی) این دو سیستم برای هر فرکانس بارگذاری محاسبه گردید و سپس با استفاده از ۸ روش عددی مطرح شده در این مقاله پاسخ تقریبی این دو سیستم محاسبه شد و مقادیر میانگین خطا و ضریب تغییرات خطا برای این هشت روش عددی به دست آورده شد. مهم ترین نتایج به دست آمده از مقایسه ی میانگین خطا ها و ضریب تغییرات آن ها به شرح زیر می باشد:

- ۱- در اکثر روش‌ها با افزایش  $\Delta t$ ، میانگین خطا افزایش می‌یافت.
- ۲- با افزایش  $\Delta t$ ، میانگین خطای روش شتاب مرتبه ۳ نسبت به میانگین روش شتاب مرتبه ۲ کاهش چشمگیری داشت.
- ۳- روش جنینگز ارتقا یافته کمترین میانگین خطا را برای دو سیستم ۱ و ۲ برای تمام  $\Delta t$ ها داشت.
- ۴- برای روش‌های ویلسون و تفاضل مرکزی بیشترین میزان خطا برای  $\Delta t$ های مختلف مشاهده گردید.
- ۵- در کلیه روش‌ها با افزایش  $\Delta t$ ، ضریب تغییرات نیز افزایش می‌یافت که بیانگر پراکندگی بیشتر داده‌ها بوده است، البته برای طبقه اول سیستم ۲ این موضوع مشاهده نگردید.
- ۶- یا افزایش  $\Delta t$ ، ضریب تغییرات خطای روش شتاب مرتبه ۳ نسبت به ضریب تغییرات روش شتاب مرتبه ۲ کاهش قابل توجهی داشت. البته این موضوع برای طبقه اول سیستم ۲ صدق نمی‌کرد.
- ۷- در طبقه اول سیستم ۱ کمترین ضریب تغییرات مربوط به روش‌های جنینگز و جنینگز ارتقا یافته و در طبقه اول سیستم ۲ کمترین ضریب تغییرات مربوط به روش جنینگز ارتقا یافته بود.
- ۸- در طبقه دوم سیستم ۱ کمترین ضریب تغییرات مربوط به روش‌های شتاب مرتبه ۳ و جنینگز ارتقا یافته و در طبقه دوم سیستم ۲ کمترین ضریب تغییرات مربوط به روش‌های تفاضل مرکزی، نیومارک شتاب متوسط و نیومارک شتاب خطی بود.
- در مجموع می‌توان گفت از ۸ روش عددی بررسی شده در این مقاله، روش جنینگز ارتقاء یافته برای تمام  $\Delta t$ ها کمترین میانگین خطا را داشت. علت این موضوع ناشی از این امر است که در روش جنینگز و جنینگز ارتقاء یافته هیچ فرض ساده کننده‌ای برای تغییرات شتاب در بازه زمانی  $\Delta t$  در نظر گرفته نمی‌شود و تنها فرضی که در نظر گرفته می‌شود مربوط به تغییرات نیروی اعمالی در بازه زمانی  $\Delta t$  است. بدین صورت که در روش جنینگز تغییرات نیرو (یا شتاب پایه) در بازه زمانی  $\Delta t$  به صورت خطی در نظر گرفته می‌شود و در روش جنینگز ارتقاء یافته این تغییرات به صورت منحنی‌های اسپلاین مکعبی در نظر گرفته می‌شود.
- در ادامه پیشنهاد می‌گردد کار مشابه‌ای بر روی سیستم‌های غیرخطی انجام شود و میزان دقت این روش‌های عددی در مورد این سیستم‌ها نیز بررسی گردد.

## مراجع

- [1] Gholampour, A.A., Ghasemiye, M., Fallahnejad, H. "Direct Time Integration Method for Nonlinear Structural Problems", Proceedings of the 6th National Congress on Civil Engineering, Semnan University, Iran, Semnan, Spring 2011. (in Persian)
- [2] Chang, S. Y., "Accurate integration of nonlinear systems using Newmark explicit method", Journal of Mechanics, 25(3), pp 289-297, 2009.
- [3] Mahmoudabadi, M., Taghavi, B., Hassani, S.M.R., Hosseini, S.M.J., "Improvement of the Jennings method using spline interpolation function for numerical calculation of the response coefficient of linear single-degree-of-freedom systems", Journal of Earthquake Science and Engineering, Online publication:2023. (in Persian)

[4] Mahmoodabadi, M., Hosseini, S.M.J., “*Comparison nonlinear spectra of elastoplastic systems resulting from two excitation interpolation methods*”, Ferdowsi Civil Engineering Journal, Vol. 36, No. 4, winter 2024.(in Persian)

[5] Chopra, A., “*Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*”, 3rd ed., Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey,2007.

