

Numerical Analysis of Free Vibration Behavior of Curved Composite Beams Reinforced with Carbon Nanotubes Using a Two-Node Curved Element

Amir R. Masoodi^{1*}, Hossein Mottaghi T.², Moein A. Ghandehari³

1- Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

3- M.Sc. Student, Department of Civil Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

2- Ph.D. Candidate, Department of Civil Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

ABSTRACT

In this study, a curved finite element is presented to analyze the natural vibration of curved beams within the elastic range, considering the first-order shear deformation theory of Timoshenko beams to achieve high accuracy with fewer elements. The material considered for this element is a composite material reinforced with carbon nanotubes (CNT), incorporating the effect of aggregation. First, using polynomial functions for axial, shear, and rotational deformations of a three-node element, the finite element relationships are established, followed by the construction of the element stiffness matrix. Then, to simplify the stiffness matrix and reduce the degrees of freedom, the middle node of the element is eliminated using the static condensation method, ensuring its effect is accounted for in the remaining degrees of freedom at the two end nodes. This reduces the number of degrees of freedom from 9 to 6. This research includes various mechanical, geometric, and boundary configurations to evaluate the natural vibration characteristics of these composite beams, significantly advancing our understanding of the inherent vibrational dynamics of these beams. Finally, numerical examples are examined to evaluate the accuracy and capability of this method, and a parametric study is conducted to assess the impact of various variables on the natural vibration of these beams.

ARTICLE INFO

Receive Date: 28 May 2024

Revise Date: 28 July 2024

Accept Date: 21 September 2024

Keywords:

Free vibration

Curved beam

Finite element method (FEM)

First-order shear deformation theory (FSDT)

Composite material

Carbon Nanotubes (CNTs)

All rights reserved to Iranian Society of Structural Engineering.

doi: [10.22065/jsce.2024.458948.3423](https://doi.org/10.22065/jsce.2024.458948.3423)

*Corresponding author: Amir R. Masoodi
Email address: ar.masoodi@um.ac.ir

بررسی عددی رفتار ارتعاش آزاد تیرهای خمیده مرکب تقویت شده با نانولوله‌های کربنی به کمک جزء خمیده دو گرهی

امیررضا مسعودی^۱، حسین متقی طریقی^۲، معین‌الرضا قندهاری^۳

۱- استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

۳- دانشجوی دکتری، گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

چکیده

در این پژوهش، یک جزء محدود خمیده به منظور بررسی ارتعاش طبیعی تیرهای خمیده در محدوده‌ی کشسان، با در نظر گرفتن تغییرشکل‌های برشی مرتبه اول تیر تیموشنکو به منظور دستیابی به دقت بالا و به کارگیری شمار کم‌تر جزءها ارائه می‌شود. ماده در نظر گرفته شده برای این جزء، ماده‌ی مرکب تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی (CNT) همراه با اثر جمع‌شدگی^۱ می‌باشد. ابتدا با در نظر گرفتن توابع اولیه چندجمله‌ای تغییرشکل‌های محوری، برشی و دورانی برای یک جزء سه‌گرهی به رابطه‌سازی اجزاء محدود پرداخته می‌شود و به دنبال آن ماتریس سختی جزء برپا می‌گردد. سپس، جهت ساده‌سازی ماتریس سختی و کم‌سازی درجات آزادی، بوسیله روش تراکم‌سازی استاتیکی، گره میانی جزء به نحوی حذف می‌گردد که اثر آن در درجات آزادی باقی‌مانده در دو گره ابتدا و انتها، در نظر گرفته شود. بدین ترتیب تعداد درجات آزادی جزء از ۹ به ۶ کاهش می‌یابد. این تحقیق شامل پیکربندی‌های مکانیکی، هندسی و مرزی متنوعی برای ارزیابی ویژگی‌های ارتعاش طبیعی این تیرهای مرکب است و به طور قابل توجهی به پیشرفت درک ما از دینامیک ارتعاشی ذاتی در این تیرها کمک می‌کند. در پایان نمونه‌های عددی سنگ‌نشان به منظور ارزیابی دقت و توانایی این روش مورد بررسی قرار خواهند گرفت و با مطالعه پارامتری تاثیر متغیرهای مختلف بر ارتعاش طبیعی این گونه تیرها ارزیابی می‌گردد.

کلمات کلیدی: ارتعاش آزاد، تیر خمیده، روش اجزای محدود، نگره‌ی تغییری شکل برشی مرتبه نخست، ماده‌ی مرکب، نانولوله‌های کربنی.

شناسه دیجیتال:		سابقه مقاله:			
doi:	چاپ	انتشار آنلاین	پذیرش	بازنگری	دریافت
10.22065/jsce.2024.458948.3423	۱۴۰۴/۰۳/۳۱	۱۴۰۳/۰۶/۳۱	۱۴۰۳/۰۶/۳۱	۱۴۰۲/۰۵/۰۷	۱۴۰۲/۰۳/۰۸
*نویسنده مسئول: پست الکترونیکی: ar.masoodi@um.ac.ir			امیررضا مسعودی		

^۱ agglomeration

۱- مقدمه

در زمینه مهندسی سازه، تیرهای خمیده نمایانگر ترکیبی از آثار تاریخی و نوآوری مدرن هستند که زیبایی و کارایی را ترکیب می‌کنند. کاربردهای چندگانه آن‌ها در علوم مهندسی مختلف نظیر مهندسی عمران و مکانیک توجه پژوهش‌گران را جلب کرده است. علت استقبال از این گونه سازه‌ها مقاومت بالای آن‌ها در مقابل وزن کم و رفتار ارتعاشی مناسب آن‌ها است.

برای بررسی عددی رفتار سازه‌ها، روش‌های مختلف عددی و نیمه تحلیلی توسعه پیدا کرده است. یکی از دقیق‌ترین و قوی‌ترین این روش‌ها، روش اجزای محدود است. در این روش، دامنه مسئله به تعداد نقاط کوچکی تقسیم‌بندی می‌شود. هر چه تعداد این اجزا بیشتر باشد، حل مسئله دقیق‌تر خواهد بود. پژوهش‌های بسیار زیادی از این روش عددی برای بررسی رفتار تیرهای خمیده استفاده کرده‌اند. رضایی‌پژند و رجب‌زاده صفایی با استفاده از جزء دو گره‌ای با شش درجه آزادی، رویکردی مبتنی بر کرنش برای تیرهای خمیده ارائه دادند [۱]. بلعربی و همکاران تئوری کرنش خمشی سهمی‌گون را برای تیرهای خمیده ساندویچی معرفی کردند [۲]. گوکو و ساحا در پژوهش خود رفتار غیرخطی تیرهای خمیده تحت بارگذاری استاتیکی را بررسی کردند [۳]. اوپادهای و همکاران رفتار تیرهای خمیده تحت بارهای مختلف را مورد بررسی قرار دادند و روابط نیرو-جابجایی را برای جزء خمیده دو گره‌ای استخراج کردند [۴]. بنان و همکاران روش اجزای محدودی برای تیرها و کمان‌های خمیده فضایی بر پایه نظریه کشسان معرفی کردند [۵]. ساوینو و تندولو روش اجزای محدود معکوس را برای نظارت سلامت سازه‌ها با حسگرهای کرنش معرفی کردند که در مطالعات عددی عملکرد برتری نسبت به دیگر روش‌های موجود در این زمینه داشت [۶]. کیم و همکاران با معرفی جزء تیر خمیده هیبریدی بدون گره توانستند با حذف نوسان‌ها، مقدارهای دقیق تنش را پیش‌بینی کنند. مطابق این پژوهش، نتایج بدست آمده از نگره توسعه یافته بهبود قابل توجهی نسبت به روش اجزای محدود معمولی دارد [۷]. تارن و تسنگ در پژوهشی میدان‌های تنش و جابجایی در تیرهای خمیده تحت بارهای صفحه‌ای را بررسی کردند و راه‌حل‌های دقیقی برای شرایط مرزی مختلف تیر ارائه دادند [۸]. کوسمانکا و فریدمن جزء دو گره‌ای دقیقی برای تیرهای خمیده با تغییرات برشی توسعه دادند که مشکلات قفل‌شدگی را برطرف می‌کند. روش آن‌ها در تحلیل‌های استاتیکی و دینامیکی بهبود یافته و دقت مدل‌سازی را افزایش می‌دهد [۹]. توفکچی و همکاران رابطه‌سازی اجزای محدودی را توسعه دادند که به خطاهای عددی و مسائل قفل‌شدگی پرداخته و برتری آن را نسبت به روش‌های موجود در مدیریت خمش متغیر نشان می‌دهد [۱۰].

تحلیل ارتعاش آزاد در تحلیل دینامیکی شامل حرکت نوسانی طبیعی سازه بدون حضور نیروهای خارجی است. درک این رفتار در ارزیابی سلامت و پایداری سازه، برای طراحان بسیار حیاتی بوده و به مهندسان برای طراحی بهینه‌تر سازه‌ها کمک می‌کند. اینزبرگر و افرایم در پژوهشی بر روی سختی دینامیکی تیرهای دایره‌ای یکنواخت تمرکز داشتند که برای پیش‌بینی دقیق فرکانس‌های طبیعی و رفتار دینامیکی آن‌ها حیاتی است [۱۱]. رضایی‌پژند و رجب‌زاده صفایی با معرفی جزء‌های خمیده برای تیرهای ضخیم، نیاز به ابزارهای مدل‌سازی قوی برای شبیه‌سازی این نوع از تیرها را برطرف کردند [۱۲]. وو و چیانگ برای به دست آوردن ماتریس‌های سختی و جرم برای جزء تیرهای خمیده دایره‌ای، روشی بر اساس معادله‌های نیرو-جابجایی و انرژی جنبشی ارائه کردند [۱۳]. سو و همکاران یک روش تغییر یافته واریانسی برای تجزیه و تحلیل ارتعاش‌های آزاد تیرهای منحنی با شرایط مرزی مختلف، از جمله غیر کلاسیک، توسعه دادند [۱۴]. کوررا و همکاران با کمک از روش‌های عمومی و توسعه یافته اجزای محدود برای تحلیل ارتعاش آزاد تیرهای خمیده نشان دادند که این روش‌ها می‌توانند حتی با استفاده از شبکه‌های پیچیده، راه‌حل‌های دقیق و کارآمدی ارائه دهند [۱۵]. سبحانی و مسعودی ارتعاش سیستم قوس-تیر دوتایی را با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی و روش صفحه‌ای استوانه‌ای بررسی کردند و معادلات حاکم را با اصل همپلتون استخراج و با روش مربعات دیفرانسیل حل کردند [۱۶].

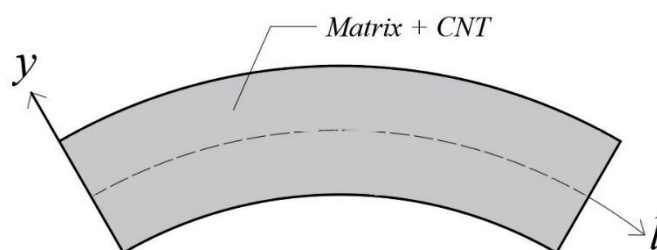
در دهه‌های اخیر استفاده از نانوکامپوزیت‌ها به منظور بهبود عملکرد اجزای سازه‌ای مورد توجه قرار گرفته است. پژوهش‌های صورت گرفته در مورد این مواد نشان می‌دهد که آن‌ها با استفاده از دو بخش اصلی خود که شامل ماده زمینه‌ای (Matrix) و پرکننده ریزمقیاس (Nanofiller) می‌باشد، عملکرد اجزای سازه‌ای ساخته شده به کمک این مصالح را به صورت چشم‌گیری بهبود می‌بخشند. سبحانی و همکاران تحلیل ارتعاش آزاد پوسته‌های مرکب تقویت شده با CNT و نانوپلیت‌های گرافنی (GNP) با مقطع مخروطی-

استوانه‌ای-مخروطی ساندویچی را با استفاده از نظریه تغییرشکل برشی مرتبه اول انجام دادند. با استفاده از روش دونل و اصل همپلتون، معادلات حاکم را استخراج و با روش مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته (GDQM) حل و تأثیر پارامترهای هندسی و مکانیکی بر فرکانس طبیعی پوسته‌ها را بررسی کردند [۱۷]. سبحانی و مسعودی ارتعاش آزاد پوسته‌های دو انحنایی نانوکامپوزیت سه‌فازی شامل ماتریس پلیمری، الیاف کربنی و نانولپیت‌های گرافنی را با روش نیمه‌تحلیلی بررسی کردند. با در نظر گرفتن نظریه تغییرشکل برشی مرتبه اول، معادلات حاکم با همگن‌سازی چندمقیاسی استخراج و با روش GDQM حل شدند. این مطالعه دقت روش را تایید و تأثیر همگن‌سازی، هندسه، توزیع GNP و شرایط مرزی بر فرکانس طبیعی پوسته‌ها را بررسی کرد [۱۸]. قندهاری و همکاران رفتار ارتعاشی سیستم تیرهای جفت‌شده نانوکامپوزیتی را با مواد تقویت‌شده با CNT بررسی کردند. آنها از نظریه تغییرشکل برشی مرتبه اول برای استخراج روابط تغییرمکان و تنش-تغییرشکل استفاده کردند و روش GDQM را برای حل مسئله مقادیر ویژه به کار بردند. این مطالعه اثرات توزیع CNT، شرایط مرزی و سختی لایه میانی بر فرکانس‌های طبیعی را بررسی کرد [۱۹]. مسعودی و همکاران تأثیر تغییرات حرارتی بر رفتار ارتعاشی تیرهای جفت‌شده خمیده مرکب تقویت‌شده با CNT تک‌جداره را بررسی کردند. با استفاده از روش GDQM و نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول، آنها دریافتند که تغییرات دما بر فرکانس سیستم تأثیر می‌گذارد، به طوری که با افزایش دما در تیر بالایی فرکانس افزایش و در تیر پایینی کاهش می‌یابد. این نتایج برای بهبود طراحی ساختاری در صنایع هوافضا و خودرو اهمیت دارند [۲۰].

بررسی پژوهش‌های پیشین، اطلاعاتی گسترده در مورد تیرهای مرکب و به طور خاص استفاده از CNT برای تقویت مکانیکی آنها ارائه می‌کند. مطالعات قبلی بینش‌های ارزشمندی را در مورد خواص استاتیکی و دینامیکی سازه‌های مرکب ارائه کرده است. با این حال، هنوز شکاف‌هایی در درک ما از رفتار تیرهای منحنی تقویت‌شده با CNT در مقیاس‌های مختلف وجود دارد. این پژوهش به ترکیب خواص مواد مختلف در مقیاس‌های مختلف در یک ماده واحد و کاربرد آن در تقویت تیر خمیده اشاره دارد. CNT در مقیاس نانو، خوشه‌های تشکیل‌شده در اثر جمع‌شدگی CNT در مقیاس مزو و ماده‌ی زمینه‌ای به کار برده شده در این پژوهش در مقیاس ماکرو است. در پژوهش حاضر، رفتار ارتعاشی تیر خمیده مرکب تقویت‌شده با CNT با در نظر گرفتن جمع‌شدگی CNT در شرایط تکیه‌گاهی مختلف بررسی خواهد شد. در قدم نخست، مشخصه‌های مکانیکی معادل مصالح مرکب با کمک از روش اشلیبی-موری-تاناکا به دست می‌آید. سپس با استفاده از رابطه‌سازی اجزای محدود و برپا کردن ماتریس‌های سختی و جرم، ارتعاش آزاد این گونه تیرها مورد بررسی قرار خواهد گرفت. بنابراین، این پژوهش یک رویکرد جدید و کارآمد برای پیش‌بینی رفتار ارتعاش آزاد تیرهای خمیده تقویت‌شده با CNT با در نظر گرفتن شرایط مختلف مکانیکی و هندسی پیشنهاد می‌کند.

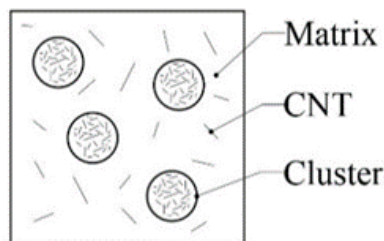
۲- همگن‌سازی مصالح مرکب

این پژوهش ماده‌ای را برای تیرهای خمیده مطرح کرده که به صورت مرکب با استفاده از CNT همراه با تأثیر جمع‌شدگی این مواد تقویت‌شده است. شکل ۱، نمایی کلی از این تیرها را نشان داده است. بویی و همکاران با کمک روش اشلیبی-موری-تاناکا مدول کشسان و برشی مؤثر مصالح همگن را محاسبه کردند [۲۱]. در این قسمت روابط مربوط به آن نشان داده شده است.



شکل ۱- شمایی از تیر خمیده مرکب با هسته یکنواخت و جداره تقویت‌شده با CNT

ترکیب نانوفیلرها با ماده زمینه‌ای همیشه به صورت یکنواخت نیست. در بعضی از نقاط تیر مجموعه‌ای از این نانوفیلرها روی هم جمع شده‌اند و یک خوشه از آن‌ها تشکیل شده است. برای مدل‌سازی این روند، از مدل خوشه‌ای اشلیبی^۲ استفاده شده است. شکل ۲ شمایی از این روی هم جمع‌شدگی نانوفیلرها را در جداره‌های تیر خمیده ساندوچی در عنصر حجم نماینده نشان داده است.



شکل ۲- نمایش تصویری جمع شدن خوشه‌ای نانوفیلرها در مقطع تیر

برای قسمت‌های مسلح شده با نانوفیلرها، می‌توان رابطه‌ی زیر را برای حجم کلی ارائه کرد.

$$V_t = V_t^c + V_t^m \quad (1)$$

که در آن V_t^c حجم CNT را در داخل یک خوشه و V_t^m حجم CNT در ماده زمینه‌ای و خارج از خوشه‌ها را نشان داده است. مدول حجمی و برشی مؤثر خوشه و همچنین مدول حجمی و برشی مؤثر ماده زمینه‌ای معادل خارج از خوشه به گونه زیر محاسبه شده است. در این روابط V_{cnt} نسبت حجمی نانوفیلرها درون تیر را نشان داده است.

$$K_t = K_m + \frac{V_{cnt}\psi(\sigma_j - 3K_m\chi_j)}{3(\zeta - V_{cnt}\psi + V_{cnt}\psi\chi_j)} \quad (2)$$

$$K_o = K_m + \frac{V_{cnt}(1-\psi)(\sigma_j - 3K_m\chi_j)}{3[1-\zeta - V_{cnt}(1-\psi) + V_{cnt}(1-\psi)\chi_j]} \quad (3)$$

$$G_t = G_m + \frac{V_{cnt}\psi(\varepsilon_j - 2G_m\gamma_j)}{3(\zeta - V_{cnt}\psi + V_{cnt}\psi\gamma_j)} \quad (4)$$

$$G_o = G_m + \frac{V_{cnt}(1-\psi)(\varepsilon_j - 2G_m\gamma_j)}{2[1-\psi - V_{cnt}(1-\psi) + V_{cnt}(1-\psi)\gamma_j]} \quad (5)$$

$$\chi_j = \frac{3(G_m + K_m) + k_r - l_r}{3(G_m + k_r)} \quad (6)$$

$$\gamma_j = \frac{1}{5} \left[\frac{4G_m + 2k_r + l_r}{3(G_m + k_r)} + \frac{4G_m}{G_m + p_r} + \frac{2G_m(G_m + 3K_m) + 2G_m(7G_m + 3K_m)}{G_m(G_m + 3K_m) + m_r(7G_m + 3K_m)} \right] \quad (7)$$

$$\sigma_j = \frac{1}{3} \left[n_r + 2l_r \frac{(2k_r + l_r)(2G_m + 3K_m - l_r)}{G_m + k_r} \right] \quad (8)$$

$$\varepsilon_j = \frac{1}{5} \left[\frac{2}{3}(n_r - l_r) + \frac{8G_m p_r}{G_m + p_r} + \frac{8G_m m_r (4G_m + 3K_m)}{G_m(G_m + 7m_r) + 3K_m(G_m + m_r)} + \frac{2(2G_m + l_r)(k_r - l_r)}{3(G_m + k_r)} \right] \quad (9)$$

نماد ψ نسبت حجمی خوشه‌ها نسبت به کل عنصر حجم نماینده (V_c/V) و نماد ψ نسبت حجمی CNT درون خوشه‌ها به کل CNT درون عنصر حجم نماینده (V_c^c/V_t) می‌باشد. زیر نویس m و r در روابط بالا به ترتیب مرتبط با ماده‌ی زمینه‌ای و فاز تقویت‌کننده است. K_m و G_m به ترتیب مدول‌های حجمی و برشی ماده‌ی زمینه‌ای هستند. مدول‌های کشسان هیل^۳ برای فاز تقویت‌کننده برابر $k_r = 30 \text{ GPa}$

² Eshelby

³ Hill's elastic moduli

گرفته است. $m_r = 1 \text{ GPa}$ ، $m_t = 45 \text{ GPa}$ ، $p_r = 1 \text{ GPa}$ و $l_r = 10 \text{ GPa}$ می باشند. سرانجام، مدول حجمی و برشی موثر ماده مرکب به شیوه زیر در دسترس قرار

$$K = K_o \left(1 + \frac{\zeta \left(\frac{K_i}{K_o} - 1 \right)}{\mu(1-\zeta) \left(\frac{K_i}{K_o} - 1 \right) + 1} \right) \quad (10)$$

$$G = G_o \left(1 + \frac{\zeta \left(\frac{G_i}{G_o} - 1 \right)}{\eta(1-\zeta) \left(\frac{G_i}{G_o} - 1 \right) + 1} \right) \quad (11)$$

$$V_o = \frac{-2G_o + 3K_o}{2G_o + 6K_o} \quad (12)$$

$$\mu = \frac{V_o + 1}{3 - 3V_o} \quad (13)$$

$$\eta = \frac{8 - 10V_o}{15 - 15V_o} \quad (14)$$

در نهایت، می توان با کمک از رابطه های زیر مدول کشسان موثر، ضریب پواسون موثر و چگالی معادل را محاسبه کرد.

$$E = \frac{9GK}{G + 3K} \quad (15)$$

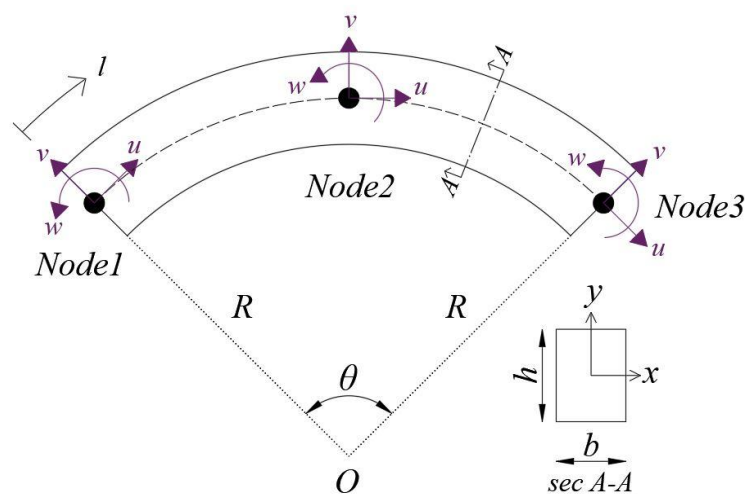
$$\nu = \frac{-2G + 3K}{2G + 6K} \quad (16)$$

$$\rho_{eff} = V_{CNT} \rho_{cnt} + V_m \rho_m \quad (17)$$

در این رابطه زیرنویس m مربوط به مشخصه های ماده ی زمینه ای بوده و چگالی فاز نانوفیبرها (ρ_{cnt}) برابر 1780 kg/m^3 در نظر گرفته شده است.

۳- رابطه سازی جزء محدود

در این پژوهش، یک جزء خمیده دایره ای سه گرهی با مقطع مستطیل شکل با در نظر گرفتن نگره ی تغییرشکل های برشی مرتبه نخست تیر تیموشنکو در نظر گرفته شده است. هر گره دارای دو درجه آزادی انتقالی و یک درجه آزادی دورانی می باشد. برای این جزء زاویه مرکزی، ارتفاع، عرض، و شعاع خم به ترتیب با نمادهای θ ، h ، b و R معرفی شده است. شکل ۳ نشان دهنده نمای کلی این جزء می باشد.



شکل ۳- شمایی از جز خمیده سه گره‌ای دارای دو درجه آزادی انتقالی و یک درجه آزادی دورانی

در ابتدا برای هریک از میدان‌های تغییرمکان، یک تابع اولیه در نظر گرفته شده است. در این پژوهش، توابع اولیه هر یک از این میدان‌ها، چندجمله‌ای درجه ۲ فرض شده است. رابطه‌های ۱۸ الی ۲۰ این توابع را نشان داده‌اند. در این روابط پارامتر l نشان‌دهنده طول خم است.

$$u_0 = \alpha_1 + \alpha_2 l + \alpha_3 l^2 \quad (18)$$

$$v_0 = \alpha_1 + \alpha_2 l + \alpha_3 l^2 \quad (19)$$

$$w_0 = \alpha_1 + \alpha_2 l + \alpha_3 l^2 \quad (20)$$

که در آن‌ها ماتریس مجهول‌های گرهی به صورت زیر فرض شده است.

$$[p] = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3]^T \quad (21)$$

به منظور استفاده از رابطه‌سازی‌های اجزای محدود، ماتریس $[n]$ به صورت زیر در دسترس قرار گرفته است.

$$[n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l & 0 & 0 & l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & l & 0 & 0 & l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & l & 0 & 0 & l^2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

با جایگذاری مقدار l برای هر گره در توابع تغییرمکان اولیه و جایگذاری طول کمان به صورت حاصل ضرب زاویه مرکزی در شعاع کمان ($L=R.\theta$)، ماتریس $[g]$ به صورت زیر بر پا شده است.

$$[g] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0.5R\theta & 0 & 0 & 0.25R^2\theta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0.5R\theta & 0 & 0 & 0.25R^2\theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.5R\theta & 0 & 0 & 0.25R^2\theta^2 \\ 1 & 0 & 0 & R\theta & 0 & 0 & R^2\theta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & R\theta & 0 & 0 & R^2\theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & R\theta & 0 & 0 & R^2\theta^2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

سپس، ماتریس تابع‌های شکل به صورت زیر محاسبه شده است.

$$[N] = [n].[g]^{-1} \quad (24)$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$N_1 = 1 - \frac{3l}{R\theta} + \frac{2l^2}{R^2\theta^2}, N_2 = \frac{4l}{R\theta} - \frac{4l^2}{R^2\theta^2}, N_3 = -\frac{l}{R\theta} + \frac{2l^2}{R^2\theta^2}$$

برای به دست آوردن ماتریس سختی نیاز است که از تابع‌های درونیاب کرنشی جزء استفاده شود. با توجه به رابطه‌سازی اجزای محدود، با استفاده از رابطه‌ی بین تغییرمکان‌ها و کرنش‌های حاکم بر جزء‌های خمیده دایره‌ای (رابطه ۲۶)، ماتریس $[B]$ ، همانند رابطه ۲۷ در دسترس قرار گرفته است [۱۲]. توابع تغییرمکان مماسی، شعاعی و دورانی حول محور عمودی بر صفحه جزء به ترتیب توسط w و v و u نشان داده شده است. ε ، γ و κ به ترتیب نمایانگر کرنش‌های محوری، برشی و خمشی است.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \\ \kappa \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial l} & \frac{1}{R} & 0 \\ \frac{1}{R} & -\frac{\partial}{\partial l} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (26)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial l} & \frac{1}{R} & 0 \\ \frac{1}{R} & -\frac{\partial}{\partial l} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial l} \end{bmatrix} . [N] \quad (27)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & 0 & B_3 & B_4 & 0 & B_5 & B_6 & 0 \\ B_2 & -B_1 & RB_2 & B_4 & -B_3 & RB_4 & B_6 & -B_5 & RB_6 \\ 0 & 0 & B_1 & 0 & 0 & B_3 & 0 & 0 & B_5 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$B_1 = \frac{-3R\theta + 4l}{R^2\theta^2}, B_2 = \frac{1}{R} - \frac{3l}{R^2\theta} + \frac{2l^2}{R^3\theta^2}, B_3 = \frac{4(R\theta - 2l)}{R^2\theta^2}$$

$$B_4 = \frac{4l(R\theta - l)}{R^3\theta^2}, B_5 = \frac{-R\theta + 4l}{R^2\theta^2}, B_6 = \frac{l(-R\theta + 2l)}{R^3\theta^2}$$

برای محاسبه‌ی ماتریس سختی جزء از رابطه‌ی ۳۰ کمک گرفته شده است [۱۲].

$$[D_M] = \begin{bmatrix} AE & 0 & 0 \\ 0 & AkG & 0 \\ 0 & 0 & EI \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$[K] = \int_l [B]^T \cdot [D_M] \cdot [B] dl \quad (30)$$

در این رابطه $[D_M]$ ماتریس ماده بوده و مدول کشسان E ، مدول برشی G ، سطح مقطع جزء A ، ممان اینرسی مقطع I و ضریب شکل برشی k می‌باشند. در پایان، ماتریس سختی $[K]$ به صورت یک ماتریس 9×9 در محور مختصات محلی جزء در دسترس قرار گرفته است. این ماتریس در قسمت پیوست الف نشان داده شده است. پس از دستیابی به ماتریس سختی جزء، جهت ساده‌سازی فرآیندهای محاسباتی، با تراکم سازی ماتریس سختی جزء و حذف گره میانی، تعداد درجه‌های آزادی جزء از 9 به 6 کاهش داده شده است. به کمک روابط ریاضی، ماتریس سختی پس از کاهش درجات آزادی به صورت زیر بدست آمده است.

$$[K]\{d\} = \{F\} \Rightarrow \begin{bmatrix} K_{rr} & K_{re} \\ K_{er} & K_{ee} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_r \\ d_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_r \\ F_e \end{Bmatrix} \quad (31)$$

$$[K_{eff}] = [K_{rr}] - [K_{re}][K_{ee}]^{-1}[K_{er}]^T \quad (32)$$

در این روابط زیرنویس r برای درجات آزادی ماندنی و زیرنویس e برای درجات آزادی حذف شده به کار رفته است. ماتریس $[K_{eff}]$ نیز ماتریس سختی به دست آمده پس از کاهش درجات آزادی است. به این ترتیب، ماتریس سختی جزء خمیده سه‌گره‌ی به یک ماتریس 6×6 در 6 تبدیل شده است. این ماتریس در رابطه ۳۳ نمایش داده شده است.

$$[K_{eff}] = \begin{bmatrix} K_{11}^{eff} & K_{12}^{eff} & K_{13}^{eff} & K_{14}^{eff} & K_{15}^{eff} & K_{16}^{eff} \\ & K_{22}^{eff} & K_{23}^{eff} & K_{24}^{eff} & K_{25}^{eff} & K_{26}^{eff} \\ & & K_{33}^{eff} & K_{34}^{eff} & K_{35}^{eff} & K_{36}^{eff} \\ & & & K_{44}^{eff} & K_{45}^{eff} & K_{46}^{eff} \\ & & & & K_{55}^{eff} & K_{56}^{eff} \\ & sym & & & & K_{66}^{eff} \end{bmatrix} \quad (33)$$

درایه‌های ماتریس $[K_{eff}]$ در پیوست الف نمایش داده شده است. با توجه به اهداف این مقاله، جهت ساده‌سازی از ماتریس جرم متمرکز بهره‌جویی شده است. ماتریس جرم متمرکز برای جزء 6 درجه آزادی ارائه شده یک ماتریس قطری به صورت زیر است.

$$[M] = 0.5\rho \begin{bmatrix} A & & & & & \\ & A & & & & \\ & & I_x & & & \\ & & & A & & \\ & & & & A & \\ & & & & & I_x \end{bmatrix} \quad (34)$$

که در آن ρ نشان‌دهنده جرم حجمی ماده و I_x ممان اینرسی مقطع جزء حول محور x بوده که به صورت زیر محاسبه شده است.

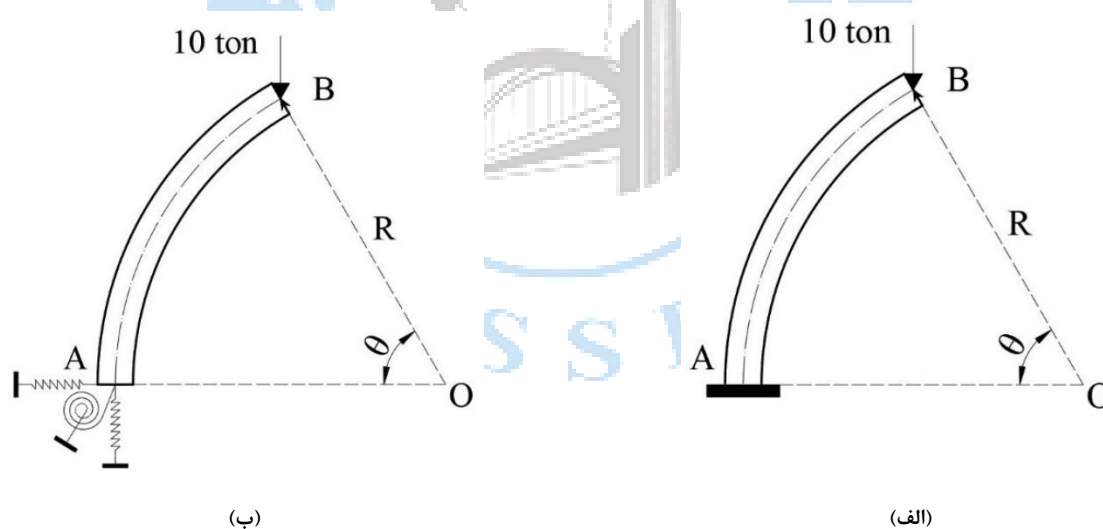
$$I_x = \int_{A_1 - \frac{y}{R}} \frac{y^2}{R} dA \quad (35)$$

در پایان، با حل مسئله مقادیر ویژه استاندارد مرتبط با سیستم معادلات خطی، فرکانس‌های طبیعی تیر خمیده‌ی در دسترس قرار گرفته است [۱۲].

$$|M - \omega^2 K_{eff}| = 0 \quad (36)$$

۴- اعتبارسنجی

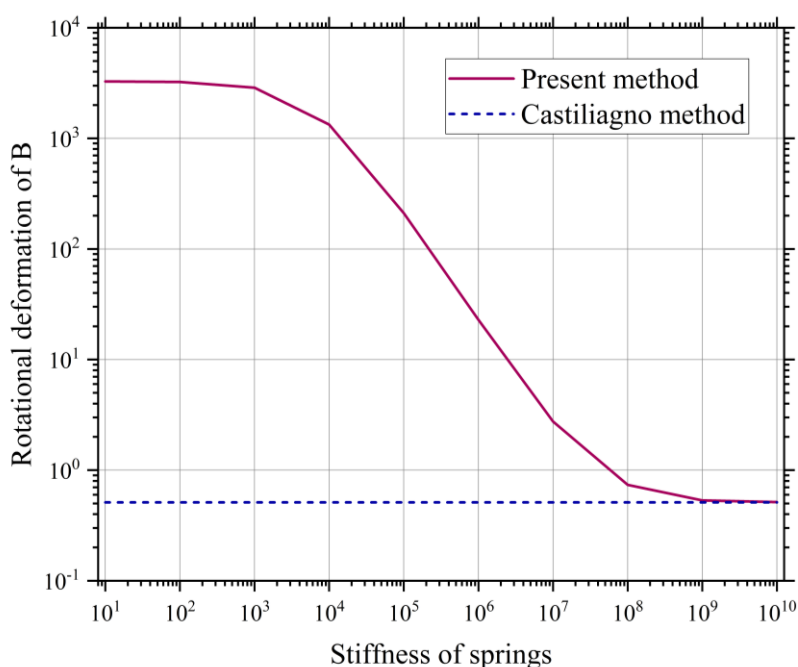
یک قوس دایره‌ای یک‌سر گیردار در شکل ۴-الف نشان داده شده است. این قوس دارای مشخصات مکانیکی $E=2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ، $\nu=0.3$ و $k=1$ و مشخصات هندسی $\theta=\pi/3$ ، $R=50.0 \text{ cm}$ ، $A=53/8 \text{ cm}^2$ ، $I=8360 \text{ cm}^4$ می‌باشد. یک بار متمرکز قائم 10 تن به انتهای این قوس اعمال شده است. با استفاده از روش کار مجازی و قضیه کاستیلیانو، راه‌حل این مثال خاص به دست آمده و مشخص شده است که دورانی برابر با 0.512 رادیان در نقطه B ایجاد شده است. لازم به ذکر است که نتایج به دست آمده از روش کاستیلیانو دقیق بوده و هیچ گونه تقریب در آن‌ها وجود ندارد. برای بررسی تأثیر سختی تکیه‌گاه‌ها بر رفتار استاتیکی این تیر زیر اثر بار اعمالی، از فنرها به‌عنوان جایگزین تکیه‌گاه‌های تیر استفاده شده است. دو فنر انتقالی به منظور در نظر گرفتن واکنش‌های تکیه‌گاه در جهت‌های مختصات x و y و یک فنر پیچشی برای در نظر گرفتن واکنش دورانی تکیه‌گاه به کار گرفته شده است. شکل ۴-ب شمایی کلی از این مدل را نشان داده است.



شکل ۴- شمایی کلی از تیر خمیده زیر اثر بار قائم 10 تن. الف) تکیه‌گاه گیردار ب) تکیه‌گاه کشسان مدل‌سازی شده با فنر

شکل ۵ مقدار دوران نقطه B در یک تیر تشکیل شده از ۹ جزء با مقادیر مختلف سختی فنرهای تکیه‌گاهی را نشان داده است. در این مثال، فرض بر این است که سختی فنرهای انتقالی و چرخشی برابر است. شکل ۵ به وضوح نشان داده است که مقادیر کمتر سختی، منجر به دوران بسیار بیشتر شده‌اند. این مشاهده به معنای عدم وجود تکیه‌گاه پایدار در تیر است. در مقابل، با افزایش سختی فنر، تکیه‌گاه A بیشتر شبیه به یک تکیه‌گاه گیردار شده است. در نتیجه، مقدار دوران در نقطه B کاهش یافته و به تدریج به مقدار دقیق خود نزدیک شده است. هنگامی که سختی فنرهای انتقالی برابر 10^{10} کیلوگرم بر سانتی‌متر و سختی فنرهای چرخشی برابر 10^{10} کیلوگرم \times سانتی‌متر

تنظیم شده است، نقطه مورد نظر دورانی برابر با $0/5140$ رادیان نشان داده است که خطایی برابر با $0/3921\%$ با مقدار دقیق خود دارد. نتایج این مثال نشان داد که ماتریس سختی جزء خمیده به خوبی برپا شده و قابل اعتماد می‌باشد.



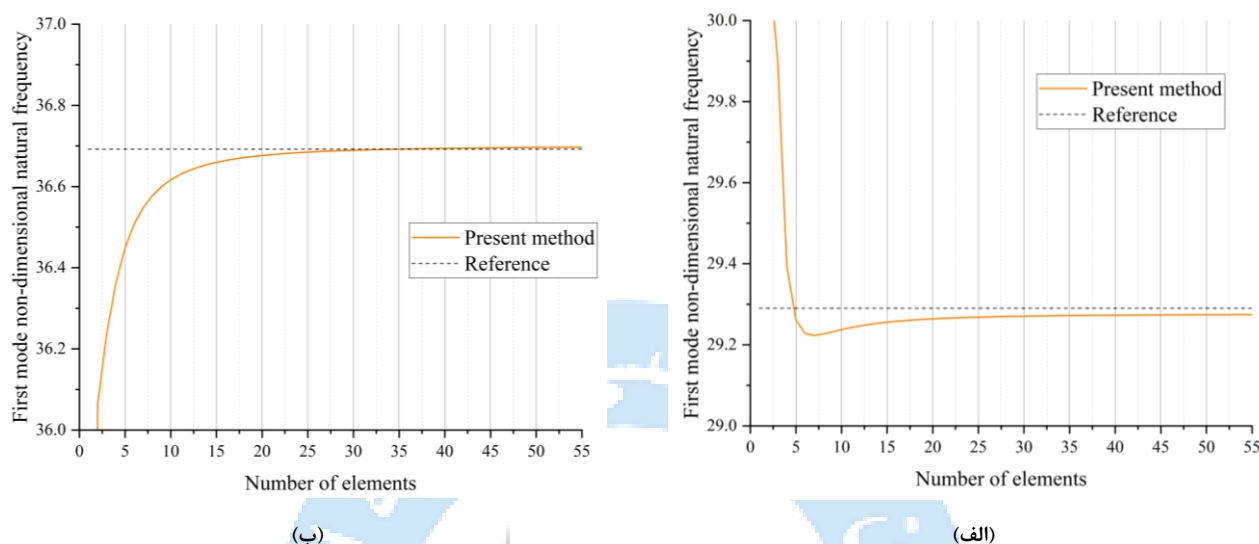
شکل ۵- دوران نقطه انتهایی تیر برای مقادیر مختلف سختی فنرهای تکیه‌گاهی

در مثالی دیگر، دو تیر نیم دایره‌ای با شرایط تکیه‌گاهی ساده-ساده و گیردار-گیردار تحلیل شده‌اند. مشخصات مکانیکی مصالح این تیر $E=70\text{ GPa}$, $\nu=0/41666$, $k=0/85$ و $\rho=2777\text{ kg/m}^3$ که برای هر دو شرایط تکیه‌گاهی برابر است. مشخصات هندسی برای تیر با تکیه‌گاه ساده-ساده برابر با $R=0/75\text{ m}$, $A=4\text{ m}^2$ و $I=0/01\text{ m}^4$ و برای تیر با تکیه‌گاه گیردار-گیردار برابر با $R=0/6366\text{ m}$, $A=1\text{ m}^2$ و $I=0/0016\text{ m}^4$ در نظر گرفته شده است. برای یافتن پنج فرکانس طبیعی بی‌بعد اول، از یک تیر با ۲۰ جزء استفاده شده است. جدول ۱، پنج فرکانس اول بدون بعد شده (λ_i) در این پژوهش و پژوهش‌های رضایی پزند و رجبزاده صفایی [۱۲]، یانگ و همکاران [۲۲] و آیزنبرگر و افرایم [۱۱] نشان داده است. همانطور که می‌توان مشاهده کرد، استفاده شده در این پژوهش می‌تواند با دقت بسیار بالایی فرکانس‌های طبیعی تیر خمیده را محاسبه کند.

جدول ۱- پنج فرکانس طبیعی بی‌بعد اول تیر خمیده برای شرایط تکیه‌گاهی ساده-ساده و گیردار-گیردار ($\lambda_i = \omega_i L^2 \sqrt{\rho A/EI}$)

درصد خطا	مرجع [۱۱]	مرجع [۲۲]	مرجع [۱۲]	پژوهش حاضر	شماره مود	شرایط تکیه‌گاهی
۰/۰۸۹۹	۲۹/۲۸۰	۲۹/۳۰۶	۲۹/۲۸۵	۲۹/۲۶۴	۱	ساده-ساده
۰/۱۰۲۱	۳۳/۳۰۵	۳۳/۲۴۳	۳۳/۳۲۱	۳۳/۲۸۱	۲	
۰/۳۱۹۷	۶۷/۱۲۴	۶۷/۱۲۳	۶۷/۲۰۲	۶۶/۹۳۵	۳	
۰/۲۱۶۲	۷۹/۹۷۱	۷۹/۹۵۰	۸۰/۰۴۹	۷۹/۸۱۷	۴	
۰/۷۸۲۲	۱۰۷/۸۵۱	۱۰۷/۸۴۴	۱۰۸/۱۶۹	۱۰۷/۱۱۰	۵	
۰/۰۷۹۹	۳۶/۷۰۳	۳۶/۶۵۷	۳۶/۷۱۶	۳۶/۶۷۴	۱	گیردار-گیردار
۰/۱۱۵۹	۴۲/۲۶۴	۴۲/۲۸۹	۴۲/۲۷۸	۴۲/۲۲۸	۲	
۰/۴۱۸۱	۸۲/۲۳۳	۸۲/۲۲۸	۸۲/۳۶۱	۸۱/۹۳۰	۳	
۰/۲۱۴۲	۸۴/۴۹۱	۸۴/۴۷۱	۸۴/۵۶۵	۸۴/۳۲۸	۴	

شکل ۶، همگرایی اولین فرکانس طبیعی بدون بُعد حاصل از این پژوهش با پاسخ‌های بدست آمده توسط آیزنبرگر و افرایم را نشان داده است. همانطور که مشاهده می‌شود، با افزایش تعداد المان‌ها پاسخ تیر به پاسخ دقیق نزدیک‌تر می‌شود. همچنین، با استفاده از ۲۵ جزء می‌توان پاسخ‌های مناسبی برای فرکانس طبیعی تیر خمیده به دست آورد.



شکل ۶- همگرایی فرکانس طبیعی نخست تیر خمیده بدست آمده از این پژوهش و پژوهش آیزنبرگر و افرایم [۱۱]. الف) شرایط تکیه‌گاهی ساده-ساده (ب) شرایط تکیه‌گاهی گیردار-گیردار

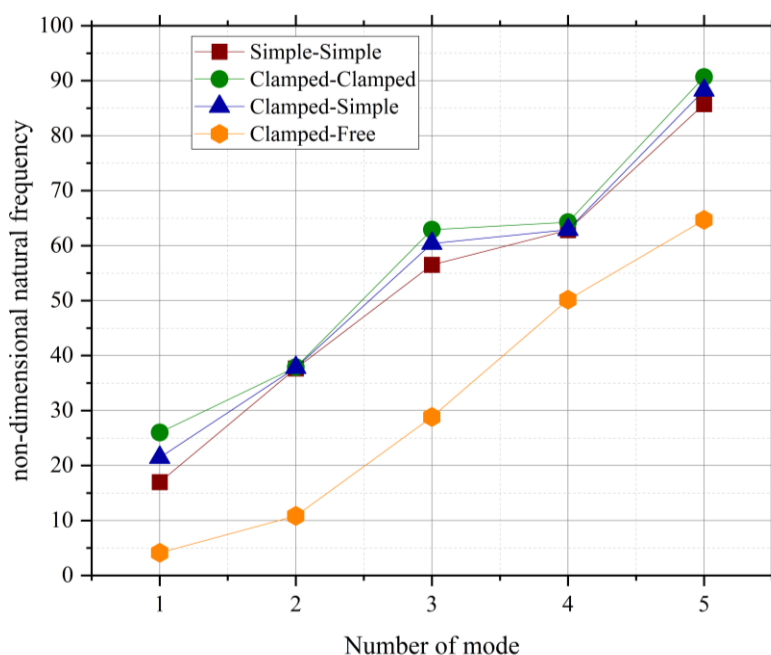
۵- نمونه‌های عددی

در این قسمت از پژوهش، برای درک رفتار ارتعاشی تیر خمیده در شرایط مختلف، مثال‌های عددی مختلفی مورد بررسی قرار گرفته است. برای بررسی اثر شرایط تکیه‌گاهی بر پنج فرکانس طبیعی بی‌بُعد اول، یک تیر خمیده نیم دایره با مشخصات مکانیکی مصالح $E=70\text{ GPa}$ ، $k=0.185$ ، $\nu=0.14666$ و $\rho=2777\text{ kg/m}^3$ و مشخصات هندسی $R=0.175\text{ m}$ ، $A=4\text{ m}^2$ و $I=0.1\text{ m}^4$ در نظر گرفته شده است. جدول ۲ مقادیر پنج فرکانس طبیعی بدون بُعد اول تیر خمیده برای شرایط مختلف تکیه‌گاهی را نشان داده و شکل ۷ این مقادیر را با یکدیگر مقایسه کرده است. مقایسه مقادیر به دست آمده نشان داده است که مقدار فرکانس طبیعی مود پنجم در شرایط تکیه‌گاهی ساده-ساده، گیردار-گیردار، گیردار-ساده و گیردار-آزاد به ترتیب ۵/۰۵، ۳/۴۹، ۴/۱۱ و ۱۵/۶۷ برابر مقدار فرکانس طبیعی مود اول بوده و این نسبت برای شرایط تکیه‌گاهی گیردار-ساده بیشترین مقدار را دارد. همچنین، با توجه به نتایج می‌توان دریافت که مقادیر فرکانس طبیعی برای یک تیر با شرایط تکیه‌گاهی متفاوت به ترتیب زیر است:

$$\text{گیردار-گیردار} < \text{گیردار-ساده} < \text{ساده-ساده} < \text{گیردار-آزاد}$$

جدول ۲- مقادیر پنج فرکانس طبیعی بدون بُعد اول تیر خمیده برای شرایط مختلف تکیه‌گاهی تیر خمیده

شماره مود	تکیه‌گاه ساده-ساده	تکیه‌گاه گیردار-گیردار	تکیه‌گاه گیردار-ساده	تکیه‌گاه گیردار-آزاد
۱	۱۶/۹۷۳۹	۲۶/۰۰۴۴	۲۱/۴۵۹۸	۴/۱۲۷۱
۲	۳۷/۶۶۶۷	۳۷/۸۸۴۶	۳۷/۸۱۴۳	۱۰/۸۴۱۶
۳	۵۶/۵۲۱۸	۶۲/۸۹۲۰	۶۰/۳۸۶۱	۲۸/۸۳۰۸
۴	۶۲/۸۳۲۲	۶۵/۲۶۱۳	۶۲/۹۰۸۰	۵۰/۱۷۸۹



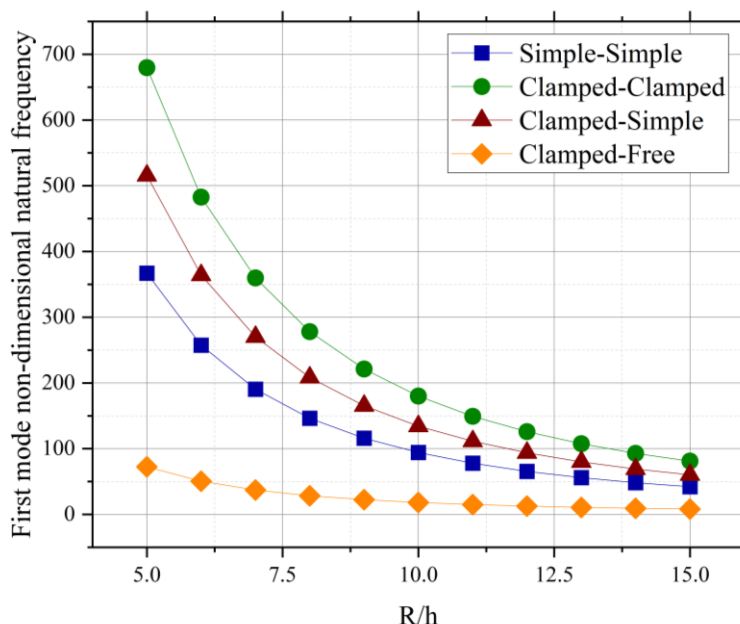
شکل ۷ - پنج فرکانس اول بدون بعد شده تیر خمیده در شرایط تکیه گاهی مختلف ($\lambda_i = \omega_i L^2 \sqrt{\rho A / EI}$)

جهت بررسی تاثیر نسبت شعاع به عمق سطح مقطع تیر بر فرکانس طبیعی آن، یک مطالعه پارامتری انجام شده است. جدول ۳ مقادیر اولین فرکانس طبیعی بدون بعد شده تیر برای مقادیر مختلف نسبت شعاع تیر به عمق سطح مقطع آن، در شرایط تکیه گاهی مختلف را نشان داده است. این تیر نیم دایره بوده و مشخصات مکانیکی مصالح $E=7.0\text{ GPa}$ ، $k=0.185$ ، $v=0.41666$ و $\rho=27777\text{ kg/m}^3$ می باشد. برای شعاع تیر مقدار ثابت $R=1.0\text{ m}$ ، در نظر گرفته شده است. مطابق شکل ۸ می توان دریافت با افزایش نسبت شعاع به عمق سطح مقطع تیر، تیر نازک تر شده و سختی آن کاهش یافته است، در نتیجه با کاهش سختی، مقدار فرکانس طبیعی تیر نیز روند نزولی پیدا کرده است. همچنین، با توجه به مقادیر نشان داده شده در جدول ۳ این چنین نتیجه گیری شده که با افزایش نسبت شعاع به عمق سطح مقطع تیر از مقدار ۵ به ۱۵ و سه برابر کردن این نسبت، مقدار اولین فرکانس طبیعی بدون بعد شده تیر خمیده حدود ۸۹٪ کاهش پیدا کرده است. این کاهش برای شرایط تکیه گاهی گیردار-آزاد بیشترین مقدار را در بین چهار نوع شرایط تکیه گاهی مختلف عنوان شده دارد.

جدول ۳- مقادیر اولین فرکانس طبیعی بدون بعد شده تیر خمیده به ازای نسبت های مختلف شعاع به عمق سطح مقطع تیر برای شرایط تکیه گاهی متنوع تیر خمیده

نسبت شعاع به عمق سطح مقطع تیر	تکیه گاه ساده-ساده	تکیه گاه گیردار-گیردار	تکیه گاه گیردار-ساده	تکیه گاه گیردار-آزاد
۵	۳۶۶/۹۸۱۲	۶۷۹/۵۴۱۱	۵۱۵/۵۷۴۷	۷۲/۵۳۷۶
۶	۲۵۷/۴۲۸۴	۴۸۲/۶۵۳۵	۳۶۳/۹۲۷۳	۵۰/۴۳۵۸
۷	۱۹۰/۳۱۲۴	۳۵۹/۶۴۹۳	۲۷۰/۱۰۱۹	۳۷/۰۸۴۱
۸	۱۴۶/۳۱۲۳	۲۷۷/۹۷۱۵	۲۰۸/۱۹۸۱	۲۸/۴۰۸۳
۹	۱۱۵/۹۴۲۱	۲۲۱/۰۹۸۰	۱۶۵/۲۸۴۴	۲۲/۴۵۵۵
۱۰	۹۴/۱۱۵۳	۱۷۹/۹۶۶۳	۱۳۴/۳۴۷۳	۱۸/۱۹۵۲
۱۱	۷۷/۹۱۰۰	۱۴۹/۲۸۶۲	۱۱۱/۳۲۵۸	۱۵/۰۴۱۸
۱۲	۶۵/۵۵۲۲	۱۲۵/۸۰۸۱	۹۳/۷۴۰۱	۱۲/۶۴۲۷

۱۳	۵۵/۹۱۵۶	۱۰۷/۴۴۹۵	۸۰/۰۰۸۳	۱۰/۷۷۵۲
۱۴	۴۸/۲۵۷۰	۹۲/۸۲۷۵	۶۹/۰۸۳۶	۹/۲۹۳۱
۱۵	۴۲/۰۷۰۴	۸۰/۹۹۵۲	۶۰/۲۵۱۱	۸/۰۹۷۲



شکل ۸- تاثیر نسبت شعاع به عمق تیر بر اولین فرکانس طبیعی بدون بعد شده تیر خمیده در شرایط تکیه گاهی مختلف ($\lambda_i = \omega_i R \sqrt{I/A}$)

در مثال بعدی، از بتن معمولی با چگالی 2777 kg/m^3 برای ساخت ماده‌ی زمینه‌ای استفاده شده است. بر اساس آیین‌نامه ACI-318-08 مقدار مدول کشسان بتن از رابطه $E_c = 4700 \sqrt{f'_c}$ بر حسب مگاپاسکال محاسبه می‌شود. در این رابطه f'_c نشان‌دهنده مقاومت فشاری نمونه استوانه‌ای بتن در روز ۲۸ام است [۲۳]. ضریب پواسون برای این مصالح برابر با 0.3 در نظر گرفته شده است. با استفاده از رابطه‌های ۳۷ و ۳۸ می‌توان مقادیر مدول برشی و حجمی را برای ماده‌ی زمینه‌ای به دست آورد.

$$G_m = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (37)$$

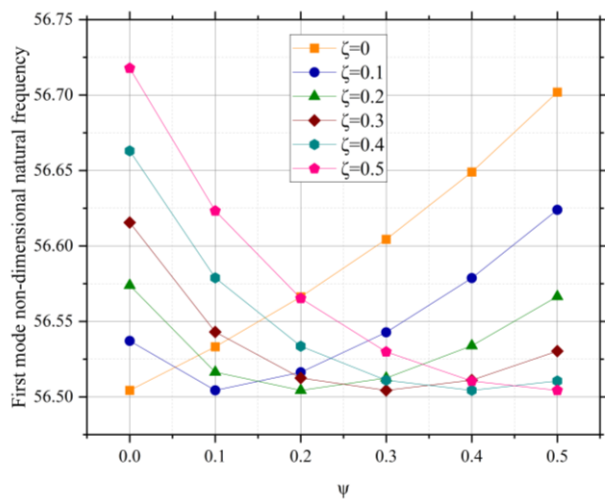
$$K_m = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (38)$$

در این مثال، اثرات نسبت حجمی CNTهای درون خوشه‌ها به کل CNT درون عنصر حجم نماینده (ψ) بر اولین فرکانس طبیعی تیر به ازای مقادیر مختلف کسر حجمی خوشه‌ها نسبت به کل عنصر حجم نماینده (ξ) انجام شده است. ماده‌ی زمینه‌ای در نظر گرفته شده برای این تیر، بتن با مقاومت مشخصه ۲۱ مگاپاسکال بوده و سایر مشخصات تیر در جدول ۴ آورده شده است. شکل ۹ نشان دهنده این موضوع می‌باشد. مطابق نمودارهای ارائه شده، مشاهده شده است که با افزایش مقدار خوشه‌ها در ماده زمینه‌ای، مدول کشسان و مدول برشی تیر کاهش یافته و در نتیجه آن مقدار فرکانس طبیعی تیر افت پیدا کرده است. این نتیجه برای چهار حالت شرایط تکیه‌گاهی عنوان شده یکسان است.

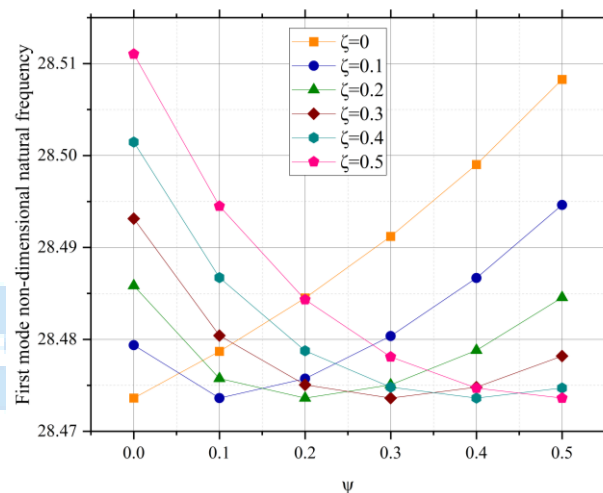
جدول ۴- متغیرهای در نظر گرفته شده برای تیر خمیده

مقدار	متغیر
-------	-------

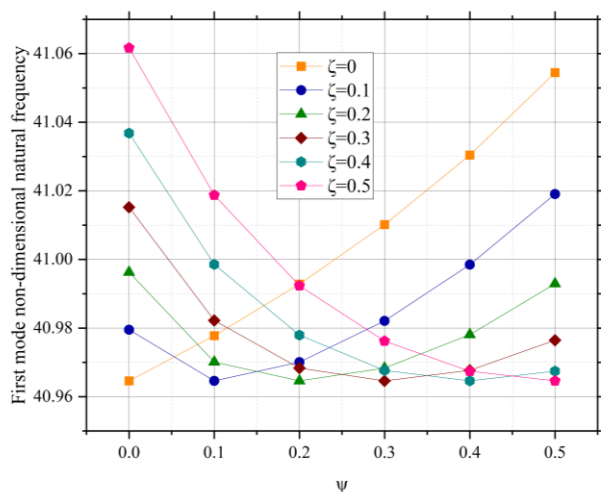
V_{cnt}	۰/۱۲
θ	π
R	۶/۷۵
R/h	۱۰



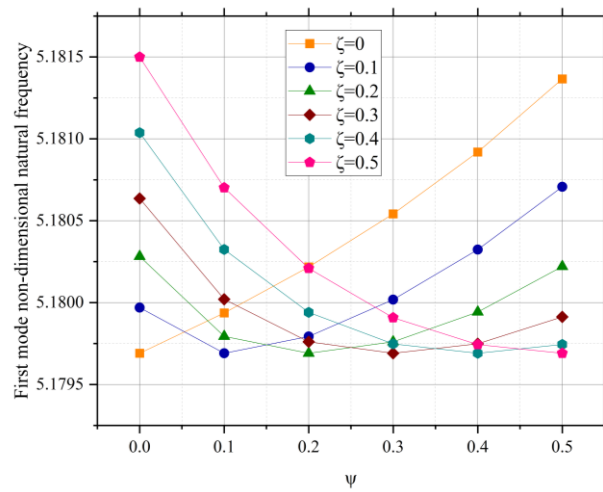
(ب)



(الف)



(د)



(ج)

شکل ۹- تاثیر ψ بر اولین ارتعاش طبیعی بی بعد ($\lambda_i = \omega_i L^2 \sqrt{\rho A / EI}$) الف) شرایط تکیه گاهی ساده-ساده، ب) شرایط تکیه گاهی گیردار-گیردار، ج) شرایط تکیه گاهی گیردار-آزاد و د) شرایط تکیه گاهی گیردار-ساده

۶- نتیجه گیری

به طور خلاصه، در این پژوهش یک جزء خمیده ۳ گرهی با مقطع مستطیلی با دو درجه آزادی انتقالی و یک درجه آزادی دورانی در هر گره، با حذف گره میانی به یک جزء ۶ درجه آزادی متراکم شده و رابطه سازی آن با استفاده از روش اجزای محدود ارائه شد. در این

جزء، اثر برش مرتبه اول با استفاده از رویکرد تیر تیموشنکو لحاظ شده است. در ادامه با استفاده از حل دو نمونه عددی، رفتار استاتیکی و ارتعاش آزاد تیر خمیده مورد بررسی قرار گرفته و صحت‌سنجی انجام پذیرفت. خطای نتایج بدست آمده زیر ۱٪ بوده که نشان می‌دهد این جزء قابل اطمینان است. تحلیل همگرایی نشان داد که با تعداد جزء اندک می‌توان به دقت بسیار بالایی رسید که نشان از برتری این جزء نسبت به سایر راه حل‌های موجود دارد. تمام نتایج آزمایش‌ها هیچ نقصی مانند قفل شدن برشی و غشایی و رفتار سخت سازه‌ای بیش از حد را نشان نمی‌دهد. مدل‌سازی‌ها برای چهار شرایط تکیه‌گاهی مختلف انجام شده است. به طور خلاصه، نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که:

۱- در بین شرایط تکیه‌گاهی مختلف، تکیه‌گاه گیردار-گیردار دارای بیشترین فرکانس طبیعی و تکیه‌گاه گیردار-آزاد دارای کمترین فرکانس طبیعی می‌باشد.

۲- مقدار فرکانس طبیعی مود پنجم در شرایط تکیه‌گاهی ساده-ساده، گیردار-گیردار، گیردار-ساده و گیردار-آزاد به ترتیب ۵/۰۵، ۳/۴۹، ۴/۱۱ و ۱۵/۶۷ برابر مقدار فرکانس طبیعی مود اول بوده و همان طور که مشاهده می‌شود این نسبت برای شرایط تکیه‌گاهی گیردار-ساده بیشترین مقدار را دارد.

۳- با انجام یک مطالعه پارامتری برای یک تیر با فرض ماده همگن، تاثیر نسبت ارتفاع به عمق تیر بر اولین فرکانس طبیعی بدون بعد تیر خمیده بررسی شد. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش نسبت شعاع به عمق تیر، فرکانس طبیعی تیر کاهش پیدا می‌کند.

۴- با افزایش نسبت شعاع به عمق سطح مقطع تیر از مقدار ۵ به ۱۵ و سه برابر کردن این نسبت، مقدار اولین فرکانس طبیعی بدون بعد تیر خمیده حدود ۸۹٪ کاهش پیدا می‌کند که این کاهش برای شرایط تکیه‌گاهی گیردار-آزاد بیشترین مقدار را در بین چهار نوع شرایط تکیه‌گاهی مختلف عنوان شده دارد.

۵- در مطالعه‌ای دیگر، با در نظر گرفتن بتن معمولی به عنوان ماده زمینه‌ای، تاثیر نسبت حجمی مقدارهای CNT دورن خوشه‌ها به کل CNT موجود در عنصر حجم نمایده بر اولین فرکانس طبیعی بی‌بعد تیر خمیده برای مقدرهای مختلف نسبت حجمی خوشه‌ها به حجم عنصر حجم نماینده مورد مطالعه قرار گرفت. با بررسی این مطالعه می‌توان نتیجه گرفت، با وجود اینکه CNT به عنوان فاز تقویت‌کننده در مصالح تیر مورد استفاده قرار می‌گیرد، اما جمع‌شدگی بیش از حد آن‌ها و تشکیل خوشه‌ها باعث افت سختی ماده و در نتیجه آن کاهش فرکانس طبیعی می‌شود.

۶- تجزیه و تحلیل دقیق این پژوهش بینش‌های ارزشمندی را در مورد رفتار دینامیکی تیرهای خمیده تقویت شده با CNT تحت شرایط مکانیکی و هندسی متنوع ارائه کرد. چنین درک عمیقی زمینه را برای بهینه‌سازی طراحی و عملکرد سازه‌های مرکب در سراسر حوزه‌های مهندسی فراهم می‌کند.

۷-مراجع

- [1] Rezaiee-Pajand M. and Rajabzadeh-Safaei N. (2016). "An explicit stiffness matrix for parabolic beam element". *Latin American Journal of Solids and Structures*. vol. 13, no. 9, pp. 1782-1801.
- [2] Belarbi M. O. et al. (2022). "On the finite element analysis of functionally graded sandwich curved beams via a new refined higher shear deformation theory". *Composite Structures*. Vol. 279.
- [3] Ghuku S. and Saha K. N. (2017). "A Review on Stress and Deformation Analysis of Curved Beams under Large Deflection". *International Journal of Engineering and Technologies*. vol. 11, pp 13-39.
- [4] Upadhyay H. and Rao N. and Desai P. (2018). "Direct Stiffness Method for a Curved Beam and Analysis of a Curved Beam Using SAP". [Online] vol. 1. Available: www.nuv.ac.in.
- [5] Banan M. R. and Karami G. and Farshad M. (1989). "Finite Element Analysis of Curved Beams on Elastic Foundations". *Computers and Structures*. vol. 32, no. 1, pp. 45-53.

- [6] Savino P. and Tondolo F. (2023). "Two-node Curved Inverse Finite Element Formulations based on Exact Strain-displacement Solution". *Journal of Applied and Computational Mechanics*. vol. 9, no. 1, pp. 259–273.
- [7] Gon Kim J. and Young Kim Y. (1998). "A New Higher-Order Hybrid-Mixed Curved Beam Element". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. vol. 43, pp. 925-940.
- [8] Tarn J. Q. and Tseng W. D. (2012). "Exact analysis of curved beams and arches with arbitrary end conditions: A Hamiltonian state space approach" *J Elast*. vol. 107, no. 1, pp. 39–63.
- [9] Kosmatka J. B. and Friedman Z. (1998). "Accurate two-node shear-deformable curved beam element". *Collection of Technical Papers - AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*. AIAA-98, pp. 157–167.
- [10] Tufekci E. and Eroglu U. and Aya S. A. (2017). "A new two-noded curved beam finite element formulation based on exact solution". *Engineering with Computers*. vol. 33, no. 2, pp. 261–273.
- [11] Eisenberger M. and Efraim E. (2001). "In-plane vibrations of shear deformable curved beams". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. vol. 52, no. 11, pp. 1221–1234.
- [12] Rezaiee-Pajand M. and Rajabzadeh-Safaei N. (2016). "Static and dynamic analysis of circular beams using explicit stiffness matrix". *Structural Engineering and Mechanics*. vol. 60, no. 1, pp. 111–130.
- [13] Wu J. S. and Chiang L. K. (2004). "Free vibration of a circularly curved Timoshenko beam normal to its initial plane using finite curved beam elements". *Computers and Structures*. vol. 82, no. 29–30, pp. 2525–2540.
- [14] Su J. and Zhou K. and Qu Y. and Hua H. (2018). "A variational formulation for vibration analysis of curved beams with arbitrary eccentric concentrated elements". *Archive of Applied Mechanics*. vol. 88, no. 7, pp. 1089–1104.
- [15] Corrêa R. M. and Arndt M. and Machado R. D. (2021). "Free in-plane vibration analysis of curved beams by the generalized/extended finite element method". *European Journal of Mechanics*. vol. 88.
- [16] Sobhani E. and Masoodi A. R. (2022). "Differential quadrature technique for frequencies of the coupled circular arch-arch beam bridge system". *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 30.
- [17] Sobhani E. and Masoodi A. R. and Ahmadi-Pari A. R. (2021). "Vibration of FG-CNT and FG-GNP sandwich composite coupled Conical-Cylindrical-Conical shell". *Composite Structures*, vol. 273.
- [18] Sobhani E. and Masoodi A. R. (2021). "Natural frequency responses of hybrid polymer/carbon fiber/FG-GNP nanocomposites paraboloidal and hyperboloidal shells based on multiscale approaches". *Aerospace Science and Technology*. vol. 119.
- [19] Ghandehari M. A. and Masoodi A. R. and Panda S. K. (2024). "Thermal Frequency Analysis of Double CNT-Reinforced Polymeric Straight Beam". *Applied Sciences*. vol. 14, no. 2.
- [20] Masoodi A. R. and Ghandehari M. A. and Tornabene F and Dimitri R. (2024). "Natural Frequency Response of FG-CNT Coupled Curved Beams in Thermal Conditions". *Journal of Vibration Engineering and Technologies*. vol. 12, no. 1, pp. 649–665.
- [21] Bui T. T. H. and Tran T. T. and Nguyen D. K. (2022). "Geometrically nonlinear analysis of sandwich composite beams reinforced by agglomeration carbon nanotubes". *Vietnam Journal of Mechanics*. vol. 44, no. 4, pp. 376–391.
- [22] Yang F. and Sedaghati R. and Esmailzadeh E. (2008). "Free in-plane vibration of general curved beams using finite element method". *Journal of Sound and Vibration*. vol. 318, no. 4–5, pp. 850–867.
- [23] ACI Committee 318. (2008). American Concrete Institute and International Organization for Standardization. *Building code requirements for structural concrete (ACI 318-08) and commentary*. American Concrete Institute.

پیوست الف

ماتریس سختی جزء خمیده با ۹ درجه آزادی در محور مختصات محلی:

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{7AE}{3R\theta} + \frac{2AGk\theta}{15R} & \frac{A(-E+Gk)}{2R} & \frac{2AGk\theta}{15} & -\frac{8AE}{3R\theta} + \frac{AGk\theta}{15R} & \frac{2A(-E-Gk)}{3R} & \frac{AGk\theta}{15} & \frac{AE}{3R\theta} - \frac{AGk\theta}{30R} & \frac{A(E+Gk)}{6R} & -\frac{AGk\theta}{30} \\ \frac{A(-E+Gk)}{2R} & \frac{2AE\theta}{15R} + \frac{7AGk}{3R\theta} & \frac{AGk}{2} & \frac{2A(E+Gk)}{3R} & \frac{AE\theta}{15R} - \frac{8AGk}{3R\theta} & \frac{2AGk}{3} & \frac{A(-E-Gk)}{6R} & -\frac{AE\theta}{30R} + \frac{AGk}{3R\theta} & -\frac{AGk}{6} \\ \frac{2AGk\theta}{15} & \frac{AGk}{2} & \frac{2AGR^2k\theta^2 + 35EI}{15R\theta} & \frac{AGk\theta}{15} & \frac{2AGk}{3} & \frac{AGR^2k\theta^2 - 40EI}{15R\theta} & \frac{AGk\theta}{30} & \frac{AGk}{6} & -\frac{AGk\theta}{30} + \frac{EI}{3R\theta} \\ -\frac{8AE}{3R\theta} + \frac{AGk\theta}{15R} & \frac{2A(E+Gk)}{3R} & \frac{AGk\theta}{15} & \frac{16AE}{3R\theta} + \frac{8AGk\theta}{15R} & 0 & \frac{8AGk\theta}{15} & -\frac{8AE}{3R\theta} + \frac{AGk\theta}{15R} & \frac{2A(-E-Gk)}{3R} & \frac{AGk\theta}{15} \\ \frac{2A(-E-Gk)}{3R} & \frac{AE\theta}{15R} - \frac{8AGk}{3R\theta} & -\frac{2AGk}{3} & 0 & \frac{8AE\theta}{15R} + \frac{16AGk}{3R\theta} & 0 & \frac{2A(E+Gk)}{3R} & \frac{AE\theta}{15R} - \frac{8AGk}{3R\theta} & \frac{2AGk}{3} \\ \frac{AGk\theta}{15} & \frac{2AGk}{3} & \frac{AGR^2k\theta^2 - 40EI}{15R\theta} & \frac{8AGk\theta}{15} & 0 & \frac{8(AGR^2k\theta^2 + 10EI)}{15R\theta} & \frac{AGk\theta}{15} & \frac{2AGk}{3} & \frac{AGR^2k\theta^2 - 40EI}{15R\theta} \\ \frac{AE}{3R\theta} - \frac{AGk\theta}{30R} & \frac{A(-E-Gk)}{6R} & -\frac{AGk\theta}{30} & \frac{8AE}{3R\theta} + \frac{AGk\theta}{15R} & \frac{2A(E+Gk)}{3R} & \frac{AGk\theta}{15} & \frac{7AE}{3R\theta} + \frac{2AGk\theta}{15R} & \frac{A(E-Gk)}{2R} & \frac{2AGk\theta}{15} \\ \frac{A(E+Gk)}{6R} & -\frac{AE\theta}{30R} + \frac{AGk}{3R\theta} & \frac{AGk}{6} & \frac{2A(-E-Gk)}{3R} & \frac{AE\theta}{15R} - \frac{8AGk}{3R\theta} & \frac{2AGk}{3} & \frac{A(E-Gk)}{2R} & \frac{2AE\theta}{15R} + \frac{7AGk}{3R\theta} & -\frac{AGk}{2} \\ -\frac{AGk\theta}{30} & -\frac{AGk}{6} & -\frac{AGk\theta}{30} + \frac{EI}{3R\theta} & \frac{AGk\theta}{15} & \frac{2AGk}{3} & \frac{AGR^2k\theta^2 - 40EI}{15R\theta} & \frac{2AGk\theta}{15} & -\frac{AGk}{2} & \frac{2AGR^2k\theta^2 + 35EI}{15R\theta} \end{bmatrix}$$

۱-پ

درایه‌های ماتریس سختی موثر جزء خمیده با ۶ درجه آزادی در محور مختصات محلی:

$$K_{11}^{eff} = \frac{A \begin{pmatrix} -50AEG^2R^2k^2\theta^4(E\theta^2 + 10Gk) + 2800E^2(E\theta^2 + 10Gk)(AGR^2k\theta^2 + 10EI + GIk\theta^2) + 160EGk\theta^2(E\theta^2 + 10Gk) \\ (AGR^2k\theta^2 + 10EI + GIk\theta^2) - 1000E\theta^2(E+Gk)^2(AGR^2k\theta^2 + 10EI + GIk\theta^2) - (40E - Gk\theta^2)(E\theta^2 + 10Gk) \\ (AG^2R^2k^2\theta^4 + (40E - Gk\theta^2)(AGR^2k\theta^2 + 10EI)) \end{pmatrix}}{1200ER\theta(E\theta^2 + 10Gk)(AGR^2k\theta^2 + 10EI + GIk\theta^2)}$$

۲-پ

$$K_{12}^{eff} = \frac{A \begin{pmatrix} -50AEG^2R^2k^2\theta^2(E\theta^2 + 10Gk) - 60E(E-Gk)(E\theta^2 + 10Gk)(AGR^2k\theta^2 + 10EI + GIk\theta^2) + 10E(E+Gk) \\ (E\theta^2 - 40Gk)(AGR^2k\theta^2 + 10EI + GIk\theta^2) + (E+Gk)(E\theta^2 + 10Gk)(AG^2R^2k^2\theta^4 + (40E - Gk\theta^2)(AGR^2k\theta^2 + 10EI)) \end{pmatrix}}{120ER(E\theta^2 + 10Gk)(AGR^2k\theta^2 + 10EI + GIk\theta^2)}$$

۳-پ

$$K_{13}^{eff} = \frac{AGk\theta(3AEGR^2k^2\theta^4 - 20AEGR^2k\theta^2 + 10AG^2R^2k^2\theta^2 + 80E^2I\theta^2 - 200E^2I + 3EGIk\theta^4 - 20EGIk\theta^2 + 600EGIk + 10G^2Ik^2\theta^2)}{24(AEGR^2k\theta^4 + 10AG^2R^2k^2\theta^2 + 10E^2I\theta^2 + EGIk\theta^4 + 100EGIk + 10G^2Ik^2\theta^2)}$$

۴-پ

$$K_{14}^{eff} = \frac{A \begin{pmatrix} -50AEG^2R^2k^2\theta^4(E\theta^2 + 10Gk) + 400E^2(E\theta^2 + 10Gk)(AGR^2k\theta^2 + 10EI + GIk\theta^2) - 40EGk\theta^2(E\theta^2 + 10Gk) \\ (AGR^2k\theta^2 + 10EI + GIk\theta^2) + 1000E\theta^2(E+Gk)^2(AGR^2k\theta^2 + 10EI + GIk\theta^2) - (40E - Gk\theta^2)(E\theta^2 + 10Gk) \\ (AG^2R^2k^2\theta^4 + (40E - Gk\theta^2)(AGR^2k\theta^2 + 10EI)) \end{pmatrix}}{1200ER\theta(E\theta^2 + 10Gk)(AGR^2k\theta^2 + 10EI + GIk\theta^2)}$$

۵-پ

$$K_{15}^{eff} = \frac{A \left(\begin{aligned} &50AEG^2R^2k^2\theta^2(E\theta^2 + 10Gk) + 10E(E + Gk)(E\theta^2 - 40Gk)(AGR^2k\theta^2 + 10EI + GIk\theta^2) + 20E(E + Gk)(E\theta^2 + 10Gk) \\ &(AGR^2k\theta^2 + 10EI + GIk\theta^2) - (E + Gk)(E\theta^2 + 10Gk)(AG^2R^2k^2\theta^4 + (40E - Gk\theta^2)(AGR^2k\theta^2 + 10EI)) \end{aligned} \right)}{120ER(E\theta^2 + 10Gk)(AGR^2k\theta^2 + 10EI + GIk\theta^2)} \quad \text{پ-۶}$$

$$K_{16}^{eff} = \frac{AGk\theta(-AEGR^2k\theta^4 + 20AEGR^2k\theta^2 + 10AG^2R^2k^2\theta^2 + 40E^2I\theta^2 + 200E^2I - EGIk\theta^4 + 20EGIk\theta^2 + 600EGIk + 10G^2Ik^2\theta^2)}{24(AEGR^2k\theta^4 + 10AG^2R^2k^2\theta^2 + 10E^2I\theta^2 + EGIk\theta^4 + 100EGIk + 10G^2Ik^2\theta^2)} \quad \text{پ-۷}$$

$$K_{22}^{eff} = \frac{A \left(\begin{aligned} &AE^2GR^2k\theta^6 + 64AEG^2R^2k^2\theta^4 + 40AG^3R^2k^3\theta^2 + 10E^3I\theta^4 + 3E^2GIk\theta^6 - 40E^2GIk\theta^4 \\ &+ 840E^2GIk\theta^2 + 84EG^2Ik^2\theta^4 - 400EG^2Ik^2\theta^2 + 2400EG^2Ik^2 + 40G^3Ik^3\theta^2 \end{aligned} \right)}{24R\theta(AEGR^2k\theta^4 + 10AG^2R^2k^2\theta^2 + 10E^2I\theta^2 + EGIk\theta^4 + 100EGIk + 10G^2Ik^2\theta^2)} \quad \text{پ-۸}$$

$$K_{23}^{eff} = \frac{AGk(6AEGR^2k\theta^4 + 10AG^2R^2k^2\theta^2 - 5E^2I\theta^4 + 110E^2I\theta^2 + 6EGIk\theta^4 - 50EGIk\theta^2 + 600EGIk + 10G^2Ik^2\theta^2)}{12(AEGR^2k\theta^4 + 10AG^2R^2k^2\theta^2 + 10E^2I\theta^2 + EGIk\theta^4 + 100EGIk + 10G^2Ik^2\theta^2)} \quad \text{پ-۹}$$

$$K_{24}^{eff} = \frac{A \left(\begin{aligned} &AG^2R^2k^2\theta^2(E\theta^2 + 10Gk)(-10E - Gk\theta^2 + \theta^2(E + Gk)) - 10E(E + Gk)(E\theta^2 - 40Gk)(AGR^2k\theta^2 + 10EI + GIk\theta^2) - 20E \\ &(E + Gk)(E\theta^2 + 10Gk)(AGR^2k\theta^2 + 10EI + GIk\theta^2) - (40E - Gk\theta^2)(E\theta^2 + 10Gk)(AG^2R^2k^2\theta^2 - (E + Gk)(AGR^2k\theta^2 + 10EI)) \end{aligned} \right)}{120ER(E\theta^2 + 10Gk)(AGR^2k\theta^2 + 10EI + GIk\theta^2)} \quad \text{پ-۱۰}$$

$$K_{25}^{eff} = \frac{A \left(\begin{aligned} &AE^2GR^2k\theta^6 + 56AEG^2R^2k^2\theta^4 - 40AG^3R^2k^3\theta^2 + 10E^3I\theta^4 - E^2GIk\theta^6 + 40E^2GIk\theta^4 \\ &+ 360E^2GIk\theta^2 + 36EG^2Ik^2\theta^4 + 400EG^2Ik^2\theta^2 - 2400EG^2Ik^2 - 40G^3Ik^3\theta^2 \end{aligned} \right)}{24R\theta(AEGR^2k\theta^4 + 10AG^2R^2k^2\theta^2 + 10E^2I\theta^2 + EGIk\theta^4 + 100EGIk + 10G^2Ik^2\theta^2)} \quad \text{پ-۱۱}$$

$$K_{26}^{eff} = \frac{AGk(-4AEGR^2k\theta^4 + 10AG^2R^2k^2\theta^2 - 5E^2I\theta^4 + 10E^2I\theta^2 - 4EGIk\theta^4 - 50EGIk\theta^2 + 600EGIk + 10G^2Ik^2\theta^2)}{12(AEGR^2k\theta^4 + 10AG^2R^2k^2\theta^2 + 10E^2I\theta^2 + EGIk\theta^4 + 100EGIk + 10G^2Ik^2\theta^2)} \quad \text{پ-۱۲}$$

$$K_{33}^{eff} = \frac{\left(\begin{aligned} &-50AEG^2IR^2k^2\theta^4(E\theta^2 + 10Gk) - 1000AEG^2R^2k^2\theta^2(AGR^2k\theta^2 + 10EI + GIk\theta^2) + 80E(E\theta^2 + 10Gk)(2AGR^2k\theta^2 + 35EI) \\ &(AGR^2k\theta^2 + 10EI + GIk\theta^2) + (E\theta^2 + 10Gk)(AGR^2k\theta^2 - 40EI)(AG^2R^2k^2\theta^4 - (10E + Gk\theta^2)(AGR^2k\theta^2 - 40EI)) \end{aligned} \right)}{1200ER\theta(E\theta^2 + 10Gk)(AGR^2k\theta^2 + 10EI + GIk\theta^2)} \quad \text{پ-۱۳}$$

$$K_{34}^{eff} = \frac{AGk\theta(-AEGR^2k\theta^4 + 20AEGR^2k\theta^2 + 10AG^2R^2k^2\theta^2 + 40E^2I\theta^2 + 200E^2I - EGIk\theta^4 + 20EGIk\theta^2 + 600EGIk + 10G^2Ik^2\theta^2)}{24(AEGR^2k\theta^4 + 10AG^2R^2k^2\theta^2 + 10E^2I\theta^2 + EGIk\theta^4 + 100EGIk + 10G^2Ik^2\theta^2)} \quad \text{پ-۱۴}$$

$$K_{35}^{eff} = \frac{AGk(4AEGR^2k\theta^4 - 10AG^2R^2k^2\theta^2 + 5E^2I\theta^4 - 10E^2I\theta^2 + 4EGIk\theta^4 + 50EGIk\theta^2 - 600EGIk - 10G^2Ik^2\theta^2)}{12(AEGR^2k\theta^4 + 10AG^2R^2k^2\theta^2 + 10E^2I\theta^2 + EGIk\theta^4 + 100EGIk + 10G^2Ik^2\theta^2)} \quad \text{پ-۱۵}$$

$$K_{36}^{eff} = \frac{\left(\begin{aligned} &-A^2EG^2R^4k^2\theta^6 + 10A^2G^3R^4k^3\theta^4 + 16AE^2GIR^2k\theta^4 - AEG^2IR^2k^2\theta^6 + 360AEG^2IR^2k^2\theta^2 \\ &+ 10AG^3IR^2k^3\theta^4 - 240E^3I^2\theta^2 - 24E^2GI^2k\theta^4 - 2400E^2GI^2k - 240EG^2I^2k^2\theta^2 \end{aligned} \right)}{24R\theta(AEGR^2k\theta^4 + 10AG^2R^2k^2\theta^2 + 10E^2I\theta^2 + EGIk\theta^4 + 100EGIk + 10G^2Ik^2\theta^2)} \quad \text{پ-۱۶}$$

$$K_{44}^{eff} = \frac{A \left(\begin{aligned} & -50AEG^2R^2k^2\theta^4(E\theta^2 + 10Gk) + 2800E^2(E\theta^2 + 10Gk)(AGR^2k\theta^2 + 10EI + GIk\theta^2) + 160EGk\theta^2(E\theta^2 + 10Gk) \\ & (AGR^2k\theta^2 + 10EI + GIk\theta^2) - 1000E\theta^2(E + Gk)(AGR^2k\theta^2 + 10EI + GIk\theta^2) - (40E - Gk\theta^2)(E\theta^2 + 10Gk) \\ & (AG^2R^2k^2\theta^4 + (40E - Gk\theta^2)(AGR^2k\theta^2 + 10EI)) \end{aligned} \right)}{1200ER\theta(E\theta^2 + 10Gk)(AGR^2k\theta^2 + 10EI + GIk\theta^2)} \quad \text{پ-۱۷}$$

$$K_{45}^{eff} = \frac{A \left(\begin{aligned} & 50AEG^2R^2k^2\theta^2(E\theta^2 + 10Gk) + 60E(E - Gk)(E\theta^2 + 10Gk)(AGR^2k\theta^2 + 10EI + GIk\theta^2) - 10E(E + Gk)(E\theta^2 - 40Gk) \\ & (AGR^2k\theta^2 + 10EI + GIk\theta^2) - (E + Gk)(E\theta^2 + 10Gk)(AG^2R^2k^2\theta^4 + (40E - Gk\theta^2)(AGR^2k\theta^2 + 10EI)) \end{aligned} \right)}{120ER(E\theta^2 + 10Gk)(AGR^2k\theta^2 + 10EI + GIk\theta^2)} \quad \text{پ-۱۸}$$

$$K_{46}^{eff} = \frac{AGk\theta(3AEGR^2k\theta^4 - 20AEGR^2k\theta^2 + 10AG^2R^2k^2\theta^2 + 80E^2I\theta^2 - 200E^2I + 3EGIk\theta^4 - 20EGIk\theta^2 + 600EGIk + 10G^2Ik^2\theta^2)}{24(AEGR^2k\theta^4 + 10AG^2R^2k^2\theta^2 + 10E^2I\theta^2 + EGIk\theta^4 + 100EGIk + 10G^2Ik^2\theta^2)} \quad \text{پ-۱۹}$$

$$K_{55}^{eff} = \frac{A \left(\begin{aligned} & AE^2GR^2k\theta^6 + 64AEG^2R^2k^2\theta^4 + 40AG^3R^2k^3\theta^2 + 10E^3I\theta^4 + 3E^2GIk\theta^6 - 40E^2GIk\theta^4 \\ & + 840E^2GIk\theta^2 + 84EG^2Ik^2\theta^4 - 400EG^2Ik^2\theta^2 + 2400EG^2Ik^2 + 40G^3Ik^3\theta^2 \end{aligned} \right)}{24R\theta(AEGR^2k\theta^4 + 10AG^2R^2k^2\theta^2 + 10E^2I\theta^2 + EGIk\theta^4 + 100EGIk + 10G^2Ik^2\theta^2)} \quad \text{پ-۲۰}$$

$$K_{56}^{eff} = \frac{AGk(-6AEGR^2k\theta^4 - 10AG^2R^2k^2\theta^2 + 5E^2I\theta^4 - 110E^2I\theta^2 - 6EGIk\theta^4 + 50EGIk\theta^2 - 600EGIk - 10G^2Ik^2\theta^2)}{12(AEGR^2k\theta^4 + 10AG^2R^2k^2\theta^2 + 10E^2I\theta^2 + EGIk\theta^4 + 100EGIk + 10G^2Ik^2\theta^2)} \quad \text{پ-۲۱}$$

$$K_{66}^{eff} = \frac{A \left(\begin{aligned} & -50AEG^2IR^2k^2\theta^4(E\theta^2 + 10Gk) - 1000AEG^2R^2k^2\theta^2(AGR^2k\theta^2 + 10EI + GIk\theta^2) + 80E(E\theta^2 + 10Gk)(2AGR^2k\theta^2 + 35EI) \\ & (AGR^2k\theta^2 + 10EI + GIk\theta^2) + (E\theta^2 + 10Gk)(AGR^2k\theta^2 - 40EI)(AG^2R^2k^2\theta^4 - (10E + Gk\theta^2)(AGR^2k\theta^2 - 40EI)) \end{aligned} \right)}{1200ER\theta(E\theta^2 + 10Gk)(AGR^2k\theta^2 + 10EI + GIk\theta^2)} \quad \text{پ-۲۲}$$