

## Simplified and applied generalization of the spectral stochastic finite element method to solve structural problems with large deformations

Hosseinali rahimibondarabadi<sup>1</sup>, Seyedsajad Mousaviamjad<sup>2\*</sup>

1- associate professor, department of civil engineering, Yazd university, Yazd, Iran

2- PhD candidate, department of civil engineering, Yazd university, Yazd, Iran

### ABSTRACT

*Analysis of structures with large deformations and uncertain parameters is computationally costly and requires the use of very powerful computational tools, which with the development of computational tools, the use of these analytical methods has become more common. On the other hand, with the development of computational tools, engineers and designers turn to designs that involve more complex conditions and less simplification, and therefore researchers are always looking for solutions that simultaneously have the appropriate speed and accuracy. One of the most efficient methods in solving structural problems with uncertainties is the stochastic finite element method. In the present study using mathematical relations and basic concepts of this method, we have developed a novel method, the large deformations spectral stochastic finite element method to analyze the structures with large deformations. This method is a simple and applied computational method has been proposed to obtain the answers of large deformation structures with uncertainties. By solving various problems of plane stress structures and by applying uncertainties in structural parameters, input loads and boundary conditions, the efficiency of the proposed method has been evaluated. Comparing the results of this method with the Monte Carlo simulation shows the very high efficiency and accuracy of the proposed method. The source code of the proposed NSSFEM is available at <https://github.com/seyedsajadmousavi/NSSFEM>.*

### ARTICLE INFO

**Receive Date:** 12 September 2023

**Revise Date:** 22 January 2024

**Accept Date:** 14 March 2024

### Keywords:

*spectral stochastic finite element method  
Polynomial Chaos  
large deformation  
Karhunen-Loève expansion  
uncertainty*

All rights reserved to Iranian Society of Structural Engineering.

doi: <https://doi.org/10.22065/jsce.2024.413811.3207>

\*Corresponding author: Hosseinali Rahimibondarabadi.  
Email address: [h\\_rahimi@yazd.ac.ir](mailto:h_rahimi@yazd.ac.ir)

## توسعه ساده و کاربردی روش اجزای محدود طیفی تصادفی برای حل مسائل سازه ای دارای تغییر شکل های بزرگ

حسینعلی رحیمی بندرآبادی<sup>۱\*</sup>، سیدسجاد موسوی امجد<sup>۲</sup>

۱- دانشیار دانشکده عمران، دانشگاه یزد، یزد، ایران

۲- دانشجوی دکتری سازه دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه یزد، یزد، ایران

### چکیده

تحلیل سازه‌های دارای تغییر شکل بزرگ و پارامترهای غیرقطعی به لحاظ محاسباتی پرهزینه و نیازمند استفاده از ابزارهای محاسبه‌گر قدرتمند است. توسعه ابزارهای محاسباتی روز به روز استفاده از روش‌های عددی برای حل این مسائل را عمومی‌تر کرده است. از سوی دیگر با پیشرفت و توسعه ابزارها محاسباتی، مهندسیین و طراحان به طراحی‌هایی روی می‌آورند که در برگزیده شرایط پیچیده‌تر و ساده سازی کمتری بوده و به همین خاطر همواره پژوهشگران دنبال یافتن راه حل‌هایی هستند که همزمان دارای سرعت و دقت مناسب باشند. یکی از روش‌های کارآمد در حل مسائل سازه‌ای با ماهیت تصادفی روش اجزای محدود طیفی تصادفی است که در تحقیق حاضر با استفاده از روابط ریاضی و مفاهیم پایه‌ای این روش، روش محاسباتی ساده و کاربردی برای بدست آوردن پاسخ‌های سازه‌های دارای تغییر شکل بزرگ که دارای ماهیت تصادفی هستند پیشنهاد شده است. با حل مسائل متنوع از سازه های تنش مسطحه و با اعمال عدم قطعیت در پارامترهای سازه‌ای، بارهای ورودی و شرایط مرزی کارایی روش پیشنهادی مورد ارزیابی قرار گرفته است. مقایسه نتایج حاصله از این روش با روش مونت کارلو نشان دهنده کارایی و دقت بسیار بالای ۹۵ درصدی روش پیشنهادی است. کدهای اجرایی روش پیشنهادی که در نرم افزار متلب تهیه شده از طریق لینک <https://github.com/seyedsajadmousavi/NSSFEM> قابل دسترسی است.

کلمات کلیدی: اجزای محدود طیفی تصادفی، چند جمله ای آشوبی، بسط کارهونن لوو، تغییر شکل های بزرگ، عدم قطعیت

شناسه دیجیتال:		سابقه مقاله:				
doi:	<a href="https://doi.org/10.22065/jsce.2024.413811.3207">https://doi.org/10.22065/jsce.2024.413811.3207</a>	چاپ	انتشار آنلاین	پذیرش	بازنگری	دریافت
	<a href="https://doi.org/10.22065/jsce.2024.413811.3207">10.22065/jsce.2024.413811.3207</a>	۱۴۰۳/۰۸/۳۰	۱۴۰۲/۱۲/۲۴	۱۴۰۲/۱۲/۲۴	۱۴۰۲/۱۱/۰۲	۱۴۰۲/۰۷/۲۱
حسینعلی رحیمی بندرآبادی h_rahimi@yazd.ac.ir				*نویسنده مسئول: پست الکترونیکی:		

## ۱- مقدمه

یکی از پرهزینه‌ترین سیستم‌های مهندسی بلحاظ محاسباتی تحلیل سازه‌های دارای تغییر شکل بزرگ با پارامترهای غیرقطعی بوده که نیازمند استفاده از ابزارهای محاسبه‌گر قدرتمند است. با توسعه ماشین‌های محاسبه‌گر، روز به روز استفاده از روش‌های عددی برای حل این مسائل عمومی‌تر شده است. از سوی دیگر، ارتقای ماشین‌های محاسباتی، مهندسی و طراحان را ترغیب می‌کند تا کلیه شرایط پیچیده حاکم بر سازه‌ها را با کمترین میزان فرضیات ساده کننده در نظر بگیرند که این نیز سبب افزایش هزینه‌های محاسباتی می‌شود. از اینرو یافتن راه حل‌های دارای کارایی مناسب، دقت کافی و هزینه‌های محاسباتی پایین اجتناب ناپذیر خواهد بود. در تحقیقات صورت گرفته برای در نظر گرفتن آثار عدم قطعیت مشخصات مصالح و بارها بر رفتار و پاسخ سازه‌ها روش‌های مختلف اجزای محدود تصادفی مورد ارزیابی قرار گرفته‌اند که بعنوان مثال می‌توان به گزارش‌های تحقیقاتی از قبیل احتمال خرابی صفحات کامپوزیت [۱]، تحلیل پایداری و قابلیت اطمینان مخازن فولادی زیرزمینی [۲]، تحلیل پایداری احتمالاتی سدهای خاکی [۳]، طراحی مقاوم سازه‌های ویسکوالاستیک [۴]، تحلیل ارتعاشی کامپوزیت‌های تقویت شده با الیاف [۵] مسائل پایداری الاستیک [۶]، تحلیل دیوارهای بنایی غیرمسلح [۷] تحلیل دینامیکی قابلیت اعتماد سازه‌های گنبدی بزرگ مقیاس در حین زلزله [۸] و تحلیل احتمالاتی خرابی تیرهای بتنی پل‌ها دچار خوردگی مصالح [۹] اشاره نمود. سپهوند و ماربرگ در مطالعه‌ای، از روش المان محدود طیفی تصادفی برای تحلیل ارتعاشی صفحات FRC با پارامترهای غیر قطعی الاستیک و میرایی استفاده کرده‌اند. در این تحقیق تاثیر عدم قطعیت پارامترها بر افت انتقال صوتی بررسی شده که نتایج نشان دهنده تأثیرات مختلف عدم قطعیت‌ها در محدوده فرکانس‌های مختلف است. نتایج روش پیشنهادی در محاسبه افت انتقال تصادفی دقت مناسبی را در مقایسه با نتایج مونت کارلو ارائه داده که نشان دهنده کارایی روش از نظر زمان و دقت محاسباتی است. [۵] زکیان و همکاران روشی کارآمد برای تحلیل سازه‌ها توسعه داده‌اند. این روش با استفاده از مفاهیم روش المان محدود طیفی تصادفی و مبتنی بر مفاهیم تئوری گراف توسعه یافته است. برای این کار ابتدا، یک روش برای حل عددی سریع معادله انتگرال فردهولم ناشی از بسط کارهونن لوو<sup>۱</sup> (KLE) ارائه شده است که هزینه محاسباتی موجود را تا حد زیادی کاهش می‌دهد. در ادامه یک پیش شرط برای تجزیه ماتریس‌ها به ضرب کروئکر زیر ماتریس‌ها اعمال می‌شود و سپس از قوانین ضرب برای حل معادله خطی حاکم بر مدل‌های متقارن چرخه‌ای بدون معکوس کردن ماتریس نهایی استفاده می‌شود، در حالی که به جای آن فقط یک ماتریس کوچک معکوس می‌شود. مثال‌های ارائه شده توسط این محققین نشان می‌دهد که روش پیشنهادی بهبود قابل توجهی را در تحلیل تصادفی سازه‌ای فراهم می‌کند. [۱۰] ترکالا طی مطالعه‌ای به تجزیه و تحلیل عددی تصادفی انتقال رطوبت در چوب با ضریب انتشار تصادفی پس از حرارت دادن چوب (زمانی که دما از قبل ثابت است) می‌پردازد. شبیه‌سازی بر اساس حالت غیرخطی ناپایدار انتشار رطوبت با توجه به ماهیت ارتوتروپیک چوب است. راه‌حل طیفی این مسئله بر اساس گسسته‌سازی میدان تصادفی حاصل (رطوبت) در بعد تصادفی توسط چند جمله‌ای متعامد (الگوریتم آشوب چند جمله‌ای تعمیم‌یافته) است. یک طرح گالریکین در بعد تصادفی برای به دست آوردن مجموعه قطعی معادلات دیفرانسیل جزئی که با روش اجزای محدود حل می‌شود، اعمال می‌شود. در این تحقیق نشان داده شده که روش طیفی تصادفی مبتنی بر بسط آشوب چند جمله‌ای می‌تواند در مدل‌سازی عدم قطعیت‌های مرتبط با انتقال رطوبت در چوب نسبت به روش مونت کارلو کارآمدتر باشد. این رویکرد طیفی نسبت به روش مونت کارلو از نظر زمان محاسبات مزیت زیادی دارد. نتایج عددی این تحقیق (میانگین و انحراف معیار) نشان دهنده تطابق روش طیفی تصادفی با شبیه‌سازی مونت کارلو است. [۱۱] یکی از روش‌های سودمند و کارا که برای تحلیل سازه‌های با پارامترهای غیر قطعی توسعه پیدا کرده روش اجزای محدود طیفی تصادفی<sup>۲</sup> (SSFEM) است که اولین بار توسط قانم پیشنهاد داده شده است. [۱۲] در این روش از KLE برای گسسته‌سازی میدان‌های تصادفی که پارامترهای غیرقطعی را توصیف می‌کنند استفاده شده و جهت حفظ ماهیت تصادفی پاسخ‌ها، برآورد آنها توسط یک چند جمله‌ای آشوبی<sup>۳</sup> (PC) صورت می‌گیرد. [۱۳]–[۱۵] گزارش‌های ارائه شده از تحقیقات مختلف نشان دهنده دقت و کارایی مناسب این روش بوده است. برخی از گزارشات علمی که برای تحلیل و ارائه پاسخ سازه‌های مختلف از روش اجزای محدود طیفی تصادفی استفاده کرده‌اند عبارت‌اند از: مدل‌سازی عدم قطعیت‌ها در مسائل انتشار غیرخطی انتقال رطوبت در چوب [۱۱]، تحلیل مسائل

<sup>1</sup> Karhunen–Loève Expansion

<sup>2</sup> spectral Stochastic Finite Element Method

<sup>3</sup> Polynomial Chaos

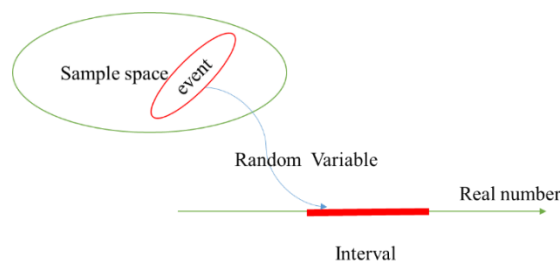
الاستودینامیک در حوزه زمان [۱۶]، تحلیل احتمال شکست [۱۷] و تحلیل صفحات و پوسته‌ها و ورق‌های کامپوزیت لایه ای [۱۴]، [۵]، [۱۹]، [۱۸]. در فرمول بندی ارائه شده برای روش اجزای محدود طیفی تصادفی بار بصورت قطعی فرض شده بود که یزدانی و همکاران با ارائه روشی عدم قطعیت بار را در فرمول بندی‌ها مد نظر قرار دادند. [۲۰] در مقاله حاضر علاوه بر ارائه روش ساده و کاربردی برای در نظر گرفتن عدم قطعیت همزمان بارها و مصالح، با استفاده از معادلات پایه روش اجزای محدود طیفی تصادفی فرمول بندی ساده‌ای برای مدلسازی سازه‌های دارای تغییر شکل بزرگ پیشنهاد شده است. با مقایسه نتایج روش پیشنهادی و روش مونت کارلو<sup>۴</sup> (MCS) کارایی مدل ارزیابی و صحت‌سنجی شده است. مزایای فرمول بندی پیشنهادی در این مقاله به این صورت خلاصه شده است: ۱- کاهش هزینه محاسباتی ۲- افزایش سرعت دسترسی به پاسخ‌های سازه ای ۳- کاهش میزان خطای پاسخ‌های سازه ای

## ۲- مفاهیم پایه و مدل سازی عدم قطعیت

قبل از انجام هرگونه تحلیلی بر روی سیستم‌های دارای عدم قطعیت باید داده‌های ورودی بصورت مطلوب تعریف و نمایش داده شوند. در این بخش با استفاده از مفاهیم پایه تئوری احتمالات نحوه نمایش مناسب داده‌ها جهت تعریف سیستم سازه‌ای تشریح می‌شوند. عدم قطعیت در یک فضای احتمال کامل  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  شامل فضای نمونه  $\Omega$ ، جبر  $\sigma$  در زیر مجموعه‌های  $\Omega$  و اندازه گیری احتمال  $P$  تعریف شده است.

### ۲-۱. متغیرهای تصادفی

یکی از روش‌ها برای نشان دادن عدم قطعیت، در نظر گرفتن پارامترها بعنوان متغیرهای تصادفی است. در اینجا متغیر  $X$  مقدار آن مستقل از زمان و بعد مکان است. تابعی برای نگاشت فضای نمونه  $\Omega$  در یک بازه از اعداد حقیقی  $R(X: \Omega \rightarrow R)$  است. در شکل شماره ۱ بصورت شماتیک عملکرد یک متغیر تصادفی به نمایش گذاشته شده است.



شکل ۱ نمایش شماتیک عملکرد یک متغیر تصادفی

احتمال وقوع متغیر تصادفی  $X$  در بازه بسته  $[a, b]$  را میتوان با معادله ۱ محاسبه نمود:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x, \theta) d\theta \quad (1)$$

که  $f(x, \theta)$  تابع چگالی احتمال (PDF<sup>۵</sup>) می‌باشد.

### ۲-۲. میدان تصادفی

برای در نظر گرفتن عدم قطعیت در سیستم‌ها، نخست باید ورودی‌ها را با استفاده از یک مدل ریاضی که قادر است پدیده‌هایی را که بصورت متغیر کسسته یا پیوسته نوسان می‌کنند و الگوی رفتاری آن‌ها قابل پیش بینی نیست، بصورت یک میدان تصادفی نمایش داد. اگر ورودی‌ها به عنوان یک میدان تصادفی مدل شوند، سیستم معادلات با مشتقات جری تصادفی حاکم خواهد شد که پاسخ‌های چنین

<sup>4</sup> Monte Carlo Simulation

<sup>5</sup> Probability Density Function

سیستمی نامشخص و تصادفی خواهد بود. در این تحقیق برای مدلسازی پارمترهای تصادفی ورودی و پاسخ های تصادفی سیستم به ترتیب از روش KLE و PC که در ادامه تشریح شده اند استفاده شده است.

### ۲-۳. تشریح بسط کارهونن لوو (KLE) برای شبیه سازی میدان های تصادفی گوسی

با فرض توزیع احتمالی گوسی مقادیر تصادفی، برای شبیه سازی فرایندها و میدان های تصادفی گوسی می توان از روش KLE استفاده نمود. KLE را می توان به عنوان یک مورد خاص از بسط سری متعامد در نظر گرفت که در آن توابع متعامد به عنوان توابع ویژه معادله انتگرال فرد هولم نوع دوم و تابع اتوکوریانس به عنوان هسته انتخاب می شوند. [۲۲]-[۲۰]، [۱۶]، [۱۴]، [۱۰] اگر  $f(x, \theta)$  یک میدان تصادفی در دامنه  $D \subset \mathbb{R}$  دارای تابعی به صورت  $(f: D \times \Omega \rightarrow \mathbb{R})$  و در یک فضای احتمال کامل  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  برای  $x \in D$  و  $\theta \in \Omega$  تعریف شده باشد که مقدار میانگین  $f(x, \theta)$  عبارت اند از:

$$\mu_f(x) = \int_a^b f(x, \theta) d\theta \quad (2)$$

و برای تابع کوریانس  $x_1, x_2 \in D$  خواهیم داشت:

$$C(x_1, x_2) = \langle f(x_1, \theta) - \mu_f(x_1) \rangle \langle f(x_2, \theta) - \mu_f(x_2) \rangle \quad (3)$$

حال اگر  $\mu_f(x)$  و  $\sigma_f(x)$  به ترتیب میانگین و انحراف معیار میدان تصادفی باشند. KLE بصورت معادله ۴ خواهد بود:

$$f(x, \theta) = \mu_f(x) + \sigma_f(x) \sum_{n=1}^N \sqrt{\lambda_n} \phi_n(x) \xi_n(\theta) \quad (4)$$

که  $\mu_f(x)$  میانگین میدان،  $\lambda_n$  و  $\phi_n(x)$  به ترتیب مقادیر ویژه و توابع ویژه تابع کوریانس  $C(x_1, x_2)$  هستند،  $n$  مجموعه ای از متغیرهای غیر همبسته و  $N$  تعداد ترم های KLE است.  $\xi_n(\theta)$  نیز مجموعه ای از متغیرهای تصادفی غیر همبسته با میانگین صفر و واریانس واحد است. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه با استفاده از معادله انتگرال مرتبه دوم فرد هولم به شرح زیر بدست می آیند:

$$\int_D C(x_1, x_2) \phi_n(x_1) d_{x_1} = \lambda_n \phi_n(x_2) \quad (5)$$

### ۲-۴. چند جمله آشوبی برای نمایش پاسخ ها (PC)

چند جمله ای آشوبی PC فرایندها و میدان های تصادفی را با استفاده از بسط یک سری چند جمله ای متعامد از طریق دنباله ای از متغیرهای تصادفی با ضرایب معین نشان می دهد. [۱۹]، [۲۳]-[۲۱] ایده PC تطبیق داده شد از تئوری PC همگن برای متغیرهای تصادفی گوسی به شرح ذیل ارائه شده است:

$$U(\theta) = a_0 \Gamma_0 + \sum_{i_1=1}^{\infty} a_{i_1} \Gamma_{i_1}(\xi_{i_1}(\theta)) + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} a_{i_1 i_2}(\xi_{i_1}(\theta), \xi_{i_2}(\theta)) + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} a_{i_1 i_2 i_3}(\xi_{i_1}(\theta), \xi_{i_2}(\theta), \xi_{i_3}(\theta)) + \dots \quad (6)$$

که  $a_0, a_{i_1}, a_{i_1 i_2}, \dots$  ضرایب ثابت و  $\Gamma_p$ ،  $p$  امین درجه PC از متغیر تصادفی گوسی استاندارد است که بصورت زیر بدست می آید:

$$\Gamma_P(\xi) = (-1)^P \frac{\partial^P}{\partial \xi_{i_1} \dots \partial \xi_{i_P}} e^{-\frac{1}{2} \xi^T \xi} \quad (7)$$

حال اگر معادله ۶ را بخواهیم بصورت ذیل بازنویسی کنیم خواهیم داشت:

$$U(\theta) = u_0 \psi_0(\xi(\theta)) + u_1 \psi_1(\xi(\theta)) + u_2 \psi_2(\xi(\theta)) + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \psi_i(\xi(\theta)) \quad (8)$$

که  $\psi_j$  و  $u_j$  به ترتیب با  $a_0, a_{i_1}, a_{i_1 i_2}, \dots$  و  $\Gamma_P$  متناظر هستند. با توجه به اینکه PC متعامد است، شرایط زیر را ارضا نماید:

$$\langle \psi_j(\theta) \psi_k(\theta) \rangle = \langle \psi_j^2(\theta) \rangle \delta_{jk} \quad (9)$$

$$\psi_j(\theta) = 0 \quad (10)$$

$$\psi_0(\theta) = 1 \quad (11)$$

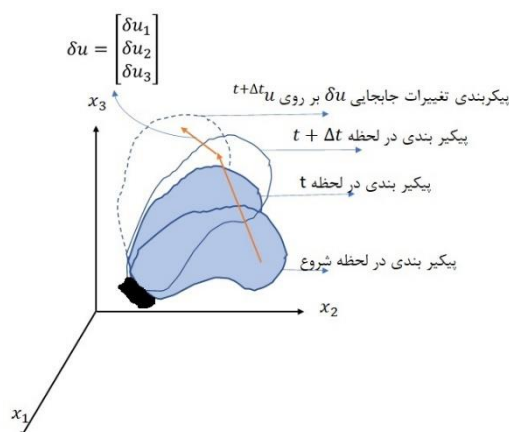
که  $\delta_{jk}$  دلتای کرونکر است.

۳-۱. پیاده سازی عددی روابط توتال لاگرانژین برای تحلیل سازه های دارای تغییر شکل های بزرگ و

پارامترهای تصادفی (گرادیان تغییر شکل، تانسورهای تنش، کرنش)

جسم نشان داده شده در شکل ۲ را در لحظه  $t$  در نظر بگیرید. گرادیان تغییر شکل به صورت زیر بیان می شود [۲۴]:

$${}^t X_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial^t X_1}{\partial^0 X_1} & \frac{\partial^t X_1}{\partial^0 X_2} & \frac{\partial^t X_1}{\partial^0 X_3} \\ \frac{\partial^t X_2}{\partial^0 X_1} & \frac{\partial^t X_2}{\partial^0 X_2} & \frac{\partial^t X_2}{\partial^0 X_3} \\ \frac{\partial^t X_3}{\partial^0 X_1} & \frac{\partial^t X_3}{\partial^0 X_2} & \frac{\partial^t X_3}{\partial^0 X_3} \end{bmatrix} \quad (12)$$



شکل ۲ حرکت جسم در سیستم مختصات ثابت

گرادیان تغییر شکل، کشیدگی و دوران‌هایی را که تارهای مصالح جسم از زمان  $t=0$  تا لحظه  $t$  متحمل می‌شوند را توصیف می‌نماید. از گرادیان تغییر شکل برای تعیین تانسور کرنش گرین لاگرانژ استفاده می‌شود. برای محاسبه کرنش در نقطه  $x$  خواهیم داشت:

$${}^t\epsilon(x, \theta) = \frac{1}{2} \left( {}^tX(x, \theta)^T {}^tX(x, \theta) - I \right) \quad (13)$$

و تانسور تنش‌های کوشی متناظر را می‌توان چنین بدست آورد:

$${}^tS_{ij}(x, \theta) = {}^tC_{ijrs}(x, \theta) {}^t\epsilon_{rs}(x, \theta) \quad (14)$$

که  ${}^tC_{ijrs}$ :

$${}^tC_{ijrs}(x, \theta) = \lambda(x, \theta) \delta_{ij} \delta_{rs} + \mu(x, \theta) (\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr}) \quad (15)$$

$$\lambda = \frac{E(x, \theta) \nu(x, \theta)}{(1 + \nu(x, \theta))(1 - 2\nu(x, \theta))} \quad (16)$$

$$\mu(x, \theta) = \frac{E(x, \theta)}{2(1 + \nu(x, \theta))} \quad (17)$$

$\delta$  دلتای کرونگر،  $E$  مدول الاستیسیته،  $\nu$  ضریب پواسون و  $\mu$  مدول برشی است. تمامی میدان‌های تعریف شده با استفاده از KLE گسسته-سازی می‌شوند.

### ۳-۲. فرمول بندی روش اجزای محدود تصادفی برای سازه های دارای تغییر شکل بزرگ

میدان تصادفی گسسته شده برای فرمول بندی ماتریس تصادفی هر المان محدود ( $e$ ) استفاده می‌شود. برای حالتی خاص که مدول الاستیسیته بعنوان یک متغیر مکانی تصادفی در میدان تصادفی همگن  $f^{(e)}(x, \theta)$  تعریف شده، محاسبه سختی المان با استفاده از انتگرال‌های لاگرانژی کلی به شرح معادله ۱۸ محاسبه می‌گردد:

$${}^t k_L^{(e)}(x, \theta) = \int_V (e) {}^t B_L^{(e)T} C_0^{t(e)} {}^t B_L^{(e)} dV^{(e)} + \int_V (e) {}^t B_L^{(e)T} C_0^{t(e)} {}^t B_L^{(e)} f^{(e)}(x, \theta) dV^{(e)} \quad (18)$$

$${}^t k_L^{(e)}(x, \theta) = {}^t k_{L0}^{(e)} + \Delta {}^t k_L^{(e)} \quad (19)$$

در معادله ۱۵  ${}^t B_L^{(e)}$  ماتریس کرنش-جابجایی در حالت خطی هستند که بصورت زیر محاسبه می‌شوند:

$${}^t B_L = {}^t B_{L0} + {}^t B_{L1} \quad (20)$$

که  ${}^t B_{L0}$ :

$${}^t_0 B_{L_0} = \begin{bmatrix} {}_0h_{1,1} & 0 & {}_0h_{2,1} & \dots & \dots & \dots & {}_0h_{N,1} & 0 \\ 0 & {}_0h_{1,2} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & {}_0h_{N,2} \\ {}_0h_{1,2} & {}_0h_{1,1} & {}_0h_{2,1} & \dots & \dots & \dots & {}_0h_{N,2} & {}_0h_{N,1} \end{bmatrix} \quad (21)$$

و  ${}^t_0 B_{L_1}$

$${}^t_0 B_{L_1} = \begin{bmatrix} l_{11}{}_0h_{1,1} & \dots & \dots & \dots & \dots & l_{21}{}_0h_{N,1} \\ l_{12}{}_0h_{1,2} & \dots & \dots & \dots & \dots & l_{22}{}_0h_{N,1} \\ (l_{11}{}_0h_{1,2} + l_{12}{}_0h_{1,1}) & \dots & \dots & \dots & \dots & (l_{21}{}_0h_{N,2} + l_{22}{}_0h_{N,1}) \end{bmatrix} \quad (22)$$

که  $h$  توابع درونیابی هستند و:

$$h_{11}(x, \theta) = \sum_{k=1}^N {}_0h_{k,1} {}^t u_1^k(x, \theta); l_{22}(x, \theta) = \sum_{k=1}^N {}_0h_{k,2} {}^t u_2^k(x, \theta); l_{21}(x, \theta) = \sum_{k=1}^N {}_0h_{k,1} {}^t u_2^k(x, \theta) \quad (23)$$

$$h_{12}(x, \theta) = \sum_{k=1}^N {}_0h_{k,2} {}^t u_1^k(x, \theta)$$

که  $N$  تعداد گره هاست و :

$${}_0h_{i,j} = \frac{\partial h_i}{\partial {}^0x_j} \quad (24)$$

$${}^t_0 k_{NL}^{(e)}(x, \theta) = \int_V (e) {}_0 B_{NL}^{(e)T} {}^t S_0^{t(e)} {}^t_0 B_{NL}^{(e)} dV^{(e)} + \int_V (e) {}_0 B_{NL}^{(e)T} {}^t S_0^{t(e)} {}^t_0 B_L^{(e)} f^{(e)}(x, \theta) dV^{(e)} \quad (25)$$

$${}^t_0 k_{NL}^{(e)}(x, \theta) = {}^t_0 k_{NL0}^{(e)} + \Delta {}^t_0 k_{NL}^{(e)} \quad (26)$$

$${}^t_0 k^{(e)}(x, \theta) = {}^t_0 k_{NL}^{(e)}(x, \theta) + {}^t_0 k_L^{(e)}(x, \theta) \quad (27)$$

که  $k_0^{(e)}$  و  $\Delta k^{(e)}$  به ترتیب سختی میانگین و سختی نوسانی،  ${}^t_0 S_0^{(e)}$  میانگین تانسور تنش PK62 المان هستند.  ${}^t_0 B_{NL}^{(e)}$  و  ${}^t_0 B_L^{(e)}$  ماتریس ارتباط بین کرنش-جابجایی در حالت خطی و غیرخطی.  $C_0^{t(e)}$  مقدار میانگین ماتریس سازنده و  $V^{(e)}$  حجم المان است. که

$${}^t_0 B_{NL}^{(e)} = \begin{bmatrix} {}_0h_{1,1} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & {}_0h_{N,1} & 0 \\ {}_0h_{1,2} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & {}_0h_{N,2} & 0 \\ 0 & {}_0h_{1,1} & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & {}_0h_{N,1} \\ 0 & {}_0h_{1,2} & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & {}_0h_{N,2} \end{bmatrix} \quad (28)$$

و برای نموهای کرنش در حالت دو بعدی خواهیم داشت:

$$\epsilon_{11}(x, \theta) = {}_0u_{1,1}(x, \theta) + {}^t_0 u_{1,1}(x, \theta) {}_0u_{1,1}(x, \theta) + {}^t_0 u_{2,1}(x, \theta) {}_0u_{2,1}(x, \theta) + \frac{1}{2} \left( ({}_0u_{1,1}(x, \theta))^2 + ({}_0u_{2,1}(x, \theta))^2 \right) \quad (28)$$

<sup>6</sup> Second Piola-Kirchhoff

$${}^0\epsilon_{22}(x, \theta) = {}^0u_{2,2}(x, \theta) + {}^0u_{1,2}(x, \theta) {}^0u_{1,2}(x, \theta) + {}^0u_{2,2}(x, \theta) {}^0u_{2,2}(x, \theta) + \frac{1}{2} \left( ({}^0u_{1,2}(x, \theta))^2 + ({}^0u_{2,2}(x, \theta))^2 \right) \quad (29)$$

$${}^0\epsilon_{12}(x, \theta) = \frac{1}{2} ({}^0u_{1,2}(x, \theta) + {}^0u_{2,1}(x, \theta)) + \frac{1}{2} ({}^0u_{1,1}(x, \theta) {}^0u_{1,2}(x, \theta) + {}^0u_{2,1}(x, \theta) {}^0u_{2,2}(x, \theta) + {}^0u_{2,2}(x, \theta) {}^0u_{2,1}(x, \theta)) + \frac{1}{2} ({}^0u_{1,1}(x, \theta) {}^0u_{1,2}(x, \theta) + {}^0u_{2,1}(x, \theta) {}^0u_{2,2}(x, \theta)) \quad (30)$$

که:

$${}^0u_{i,j}(x, \theta) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (31)$$

$${}^t u_{i,j}(x, \theta) = \frac{\partial^t u_i}{\partial x_j} \quad (32)$$

کرنش گرین لاگرانژین برای تنش صفحه‌ای عبارت اند از:

$${}^t e(x, \theta) = \{ {}^t \epsilon_{11}(x, \theta); {}^t \epsilon_{22}(x, \theta); 2 {}^t \epsilon_{12}(x, \theta) \} \quad (33)$$

برای محاسبه بردار تنش کوشی خواهیم داشت:

$${}^t \hat{\tau}(x, \theta) = C_0^t (e) {}^t e(x, \theta) \quad (34)$$

تانسور تنش کوشی برای حالت تنش مسطحه عبارت اند از:

$${}^t \tau(x, \theta) = \begin{bmatrix} {}^t \hat{\tau}_{11}(x, \theta) & {}^t \hat{\tau}_{12}(x, \theta) \\ {}^t \hat{\tau}_{12}(x, \theta) & {}^t \hat{\tau}_{22}(x, \theta) \end{bmatrix} \quad (35)$$

تانسور تنش PK2 چنین بدست می‌آید:

$${}^t S(x, \theta) = \frac{\rho}{t} {}^0 X {}^t \tau(x, \theta) {}^0 X^T \quad (36)$$

ماتریس تنش PK2 برای تنش صفحه‌ای با استفاده از معادله ۲۹ محاسبه خواهد شد:

$${}^t S^{(e)}(x, \theta) = \begin{bmatrix} {}^t S_{11}(x, \theta) & {}^t S_{12}(x, \theta) & 0 & 0 \\ {}^t S_{12}(x, \theta) & {}^t S_{22}(x, \theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^t S_{11}(x, \theta) & {}^t S_{12}(x, \theta) \\ 0 & 0 & {}^t S_{12}(x, \theta) & {}^t S_{22}(x, \theta) \end{bmatrix} \quad (37)$$

ماتریس تصادفی کلی به شکل زیر تشکیل می‌شود:

$${}^t K(x, \theta) = \sum_{i=1}^{Ne} {}^t k^{(e)}(x, \theta) = {}^t K_0 + \Delta {}^t K \quad (38)$$

که  ${}^t K_0$  و  $\Delta {}^t K$  به ترتیب سختی میانگین و سختی نوسانی سازه و Ne تعداد اجزای محدود در مسئله مورد نظر است. در نهایت تحلیل اجزای محدود تصادفی با حل جبری معادله زیر بدست می‌آید:

$${}^t F(x, \theta) = {}^t K_0 {}^t u(x, \theta) \quad (39)$$

که  ${}^t_0F(x, \theta)$  و  ${}^t_0u(x, \theta)$  به ترتیب بردارهای بارگذاری و جابجایی گره ای در لحظه  $t$  هستند.

ماتریس سختی تصادفی یک عنصر محدود دارای با استفاده از KLE به شکل زیر مدل سازی می شود:

$$k_i^{(e)}(\theta) = k_0^{(e)} + \sum_{i=1}^{\infty} k_i^{(e)} \xi_i(\theta) \quad (40)$$

در فرمول های بالا نمادها پیش از این تعریف شده اند و  $k_i^{(e)}$ :

$$k_i^{(e)} = \sqrt{\lambda_i} \int_{V^{(e)}} \phi_i(x) B^T C_0 B dV^{(e)} \quad (41)$$

مقدار سختی کل با استفاده از KLE با استفاده از معادله ۴۲ بدست می آید:

$${}^t_0K(x, \theta) = \sum_{i=1}^{Ne} \left[ k_0^{(e)} + \sum_{i=1}^{\infty} k_i^{(e)} \xi_i(\theta) \right] = \sum_{i=0}^{\infty} K_i \xi_i(\theta) \quad (42)$$

در تحقیق حاضر برای گسسته سازی  ${}^t_0F(x, \theta)$  خواهیم داشت:

$${}^t_0F(x, \theta) = \sum_{i=0}^{\infty} {}^t_0F_i \xi_i(\theta) \quad (43)$$

روش ساده ای با استفاده از محاسبات ساده ریاضی برای محاسبات گسسته سازی رابطه ۳۶ در این تحقیق به شرح ذیل پیشنهاد می گردد:

$${}^t_0F(x, \theta) \psi_j(\theta) \psi_0(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} {}^t_0F_i \langle \xi_i(\theta) \psi_j(\theta) \psi_0(\theta) \rangle, \psi_0(\theta) = 1 \quad (44)$$

Ne تعداد المان است. معادله ۳۹ را به شکل زیر می توان بازنویسی نمود:

$${}^t_0K_0 {}^t_0(x, \theta) u(x, \theta) - {}^t_0F(x, \theta) = 0 \quad (45)$$

با قرار دادن  $u(x, \theta)$  با استفاده از چند جمله ای PC مطابق معادله ۶ و KLE ماتریس سختی در معادله ۴۲ و  ${}^t_0F(x, \theta)$  مطابق معادله ۴۳ خواهیم داشت:

$$\left( \sum_{i=0}^{\infty} K_i \xi_i(\theta) \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} U_j \psi_j(\theta) \right) - \sum_{i=0}^{\infty} {}^t_0F_i \xi_i(\theta) = 0 \quad (46)$$

در نهایت تعداد محدودی از ترم ها هر دو بسط حفظ می شود. M جمله در KLE و p جمله در PC منجر به باقیمانده  $\in_{M,p}$  می شود که در مفهوم میانگین مربعات باید کمینه شود تا تقریب بهینه حل دقیق  $U(\theta)$  توسط چند جمله ای  $\psi_j(\theta)$  به دست آید:

$$E[\in_{M,p} \psi_k] = 0, k=0, 1, 2, \dots, P-1 \quad (47)$$

پس از چند عملیات جبری در یک سیستم n درجه آزادی با  $P = \frac{(M+p)!}{M!p!}$  سیستم خطی معادلات با ابعاد  $(n \times P) * (n \times P)$  بدست می آید:

$$\begin{bmatrix} {}^t_0K_{0,0} & {}^t_0K_{0,1} & \dots & {}^t_0K_{0,P-2} & {}^t_0K_{0,P-1} \\ {}^t_0K_{1,0} & {}^t_0K_{1,1} & & {}^t_0K_{1,P-2} & {}^t_0K_{1,P-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ {}^t_0K_{P-2,0} & {}^t_0K_{P-2,1} & \dots & {}^t_0K_{P-2,P-2} & {}^t_0K_{P-2,P-1} \\ {}^t_0K_{P-1,0} & {}^t_0K_{P-1,1} & & {}^t_0K_{P-1,P-2} & {}^t_0K_{P-1,P-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^t_0U_0 \\ {}^t_0U_1 \\ \vdots \\ {}^t_0U_{P-2} \\ {}^t_0U_{P-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^t_0F_0 \\ {}^t_0F_1 \\ \vdots \\ {}^t_0F_{P-2} \\ {}^t_0F_{P-1} \end{bmatrix} \quad (48)$$

### ۳-۳. حل نموی معادله تعادل روش اجزای محدودی طیفی تصادفی سازه های دارای تغییر شکل بزرگ

برای حل معادله یک می توان از روش نیوتن رافسون استفاده نمود. برای پی بردن به روش حل با فرض اینکه نیروی ناشی از تنش - های داخلی و نیروهای خارجی در لحظه  $t$  به ترتیب برابر با  ${}^t R(x, \theta)$  و  ${}^t F(x, \theta)$  باشند، برای برقراری تعادل خواهیم داشت:

$${}^t F(x, \theta) - {}^t R(x, \theta) = 0 \quad (49)$$

در یک روش نموی گام به گام برای بدست آوردن نیروهای گره ای ناشی از تنش های داخلی لحظه  $t + \Delta t$  می توان چنین نوشت:

$${}^{t+\Delta t} R(x, \theta) = {}^t R(x, \theta) + R(x, \theta) \quad (50)$$

که  $R(x, \theta)$  نموی نیروهای گره داخلی ناشی از تغییر شکل های سازه از فاصله بین زمان  $t$  تا  $t + \Delta t$  است و مقدار آن را می توان با استفاده از معادله ۴۹ بدست آورد.

$$R(x, \theta) = {}^t K(x, \theta) u(x, \theta) \quad (51)$$

حال با قراردادن معادله های ۵۰ و ۵۱ در معادله ۴۹ خواهیم داشت:

$${}^t F(x, \theta) - ({}^{t+\Delta t} R(x, \theta) - {}^t K(x, \theta) u(x, \theta)) = 0 \quad (52)$$

با بازنویسی معادله ۵۲ خواهیم داشت:

$${}^t K(x, \theta) u(x, \theta) = {}^{t+\Delta t} R(x, \theta) - {}^t F(x, \theta) \quad (53)$$

با حل معادله ۵۳ نمو جابجایی  $\neq$  بدست می آید که با جمع آن با مقدار جابجایی در زمان  $t$  مقدار جابجایی گره ای در زمان  $t + \Delta t$  بدست می آید.

$${}^{t+\Delta t} u(x, \theta) = {}^t u(x, \theta) + u(x, \theta) \quad (54)$$

فرآیند حل نموی تا زمانی که میزان خطاها به حد مطلوب برسد ادامه داده خواهد شد. بعنوان مثال با حل نموی با استفاده از روش نیوتن رافسون به شرح معادله ۵۵ عمل می شود.

$${}^t K^{(i-1)}(x, \theta) u^{(i)}(x, \theta) = {}^{t+\Delta t} R(x, \theta) - {}^{t+\Delta t} F^{(i-1)}(x, \theta) \quad (55)$$

$${}^{t+\Delta t} u^{(i)}(x, \theta) = {}^{t+\Delta t} u^{(i-1)}(x, \theta) + u^{(i)}(x, \theta) \quad (56)$$

که شرایط ابتدایی آن عبارت اند از:  ${}^{t+\Delta t} u^{(0)}(x, \theta) = {}^t u(x, \theta)$ ؛  ${}^{t+\Delta t} K^{(0)}(x, \theta) = {}^t K(x, \theta)$  و  ${}^{t+\Delta t} R^{(0)}(x, \theta) = {}^t R(x, \theta)$

### ۳-۴. شبیه سازی مونت کارلو (MCS)

شبیه سازی مونت کارلو یک مدل احتمالی است که می تواند عدم قطعیت پدیده ها را در پیش بینی خود لحاظ کند. هنگامی که از این روش برای شبیه سازی استفاده می شود، هر بار نتایج متفاوتی دریافت خواهد شد. MCS چندین پیامد ممکن و احتمال هر کدام را از مجموعه بزرگی از نمونه های داده تصادفی فراهم کرده و تصویر واضح تری از یک پیش بینی قطعی ارائه می دهد. در این روش با استفاده از کامپیوتر نتایج متفاوتی که نتایج واقعی را تقلید می کنند، تولید می شود. این سیستم از مولدهای اعداد تصادفی برای بازآفرینی عدم قطعیت ذاتی پارامترهای ورودی استفاده می کند.

### ۳-۵. تحلیل قابلیت اعتماد سازه بر اساس روش اجزای محدود طیفی

اگر خواص مصالح متغیرهای تصادفی (X) فرض شوند خرابی سازه را می‌توان با استفاده از یک تابع  $g(x)$  که برای پاسخ سازه تعیین شده است، تخمین زد. سپس احتمال خرابی با استفاده از انتگرال چندگانه تعریف شده در حوزه شکست  $D_f = \{g(x) \leq 0\}$  به شرح زیر محاسبه می‌شود:

$$P_f = \text{prob}[g(x) \leq 0] = \int_D f(x) dx \quad (57)$$

که  $f(x)$ ، PDF و  $\text{prob}$  اندازه گیری احتمال است. از آنجا که خروجی اجزای محدود طیفی تصادفی بردار پاسخ تصادفی سازه است، محاسبه PDF و CDF پاسخ‌ها و احتمال شکست ساختاری با استفاده از MCS آسان می‌باشد. احتمال شکست را می‌توان به صورت زیر تقریب زد:

$$P_f = \frac{n}{N} \quad (58)$$

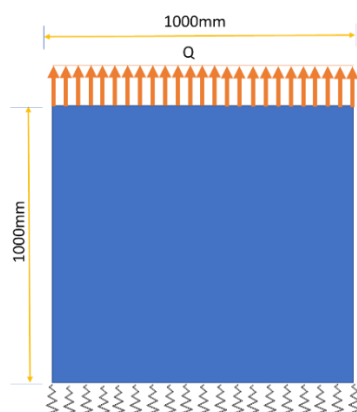
که  $n$  تعداد نمونه‌ها برای  $g(\bar{x}) \leq 0$  و  $N$  تعداد کل نمونه‌ها است. شاخص قابلیت اطمینان ( $\beta$ ) در MCS به شرح زیر تعریف شده است:

$$\beta = -\Phi^{-1}(P_f) \quad (59)$$

که  $\Phi$ ، CDF استاندارد نرمال است.

### ۴- مثال های عددی

مثال ۱ یک ورق مربعی شکل شماره ۳ یک ورق را در حالت تنش مسطحه به ابعاد  $10 \times 1000 \times 10$  میلی‌متر، چگالی مصالح صفر و ضریب پواسون  $0.3$  تحت یک بار گسترده که مشخصات بار در جدول ۱ آمده را نشان می‌دهد. تکیه گاه انعطاف پذیر با سختی  $K$  می‌باشد که مشخصات آن در جدول ۱ قابل مشاهده است. برای تحلیل، بارگذاری و مدول الاستیسیته  $E$  بصورت میدان تصادفی با میانگین  $\mu$  و انحراف معیار  $\sigma$  در نظر گرفته شده‌اند و مقادیر آنها در جدول ۱ آمده است. هر دو پارامتر با استفاده از تابع نمایی دو بعدی بصورت معادل  $60$  تعریف شده‌اند.  $b_x$  و  $b_y$  طول همبستگی هستند که در هر دو جهت مساوی با  $1000$  فرض شده و برای یک KLE با  $4$  ترم مقادیر ویژه و بردارهای ویژه در شکل ۵ و شکل ۶ نشان داده شده‌اند. در این مساله حداکثر میزان جابجایی قابل قبول  $90$  میلی‌متر در نظر گرفته می‌شود. در این مثال با تغییر تعداد  $M$  و  $p$  تاثیر افزایش و کاهش تعداد جملات KLE و درجه چند جمله‌ای آشوبی بر صحت نتایج مورد ارزیابی قرار می‌گیرند.

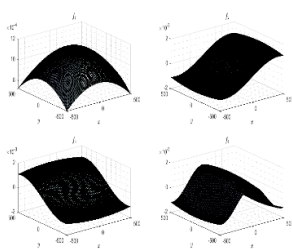


شکل ۳ سازه بررسی شده در مثال ۱

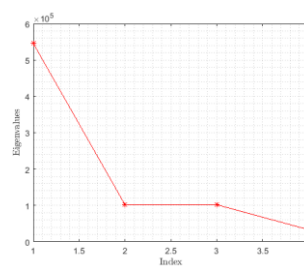
جدول ۱ مشخصات ورودی سازه مثال ۱

عنوان	مقدار	عنوان	مقدار	عنوان	مقدار
$\mu Q$	۲۰ KN/mm	$\mu K$	۱۶۰۰ KN/m <sup>2</sup>	تعداد گره	۲۵
$\sigma Q$	۴ KN/mm	$\sigma K$	۱۶۰ KN/m <sup>2</sup>	تعداد المان	۱۶
$\mu E$	۳۰۰ GP	bx	۱۰۰۰	ابعاد شبکه ها	۱۰۰۰ mm × ۱۰۰۰ mm
$\sigma E$	30 GP	by	۱۰۰۰		

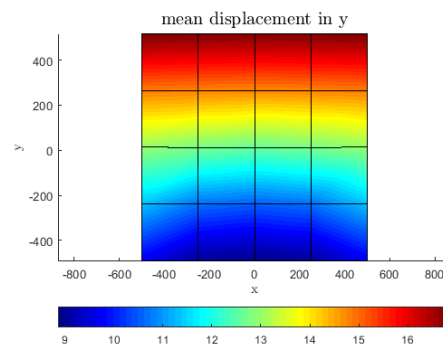
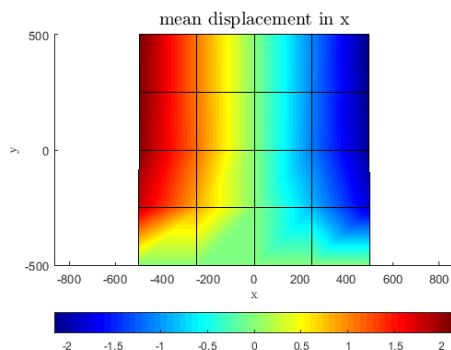
$$C(X_1, X_2) = \exp\left(-\frac{|x_1 \cdot x_2|}{b_x} - \frac{|y_1 \cdot y_2|}{b_y}\right) \quad (60)$$

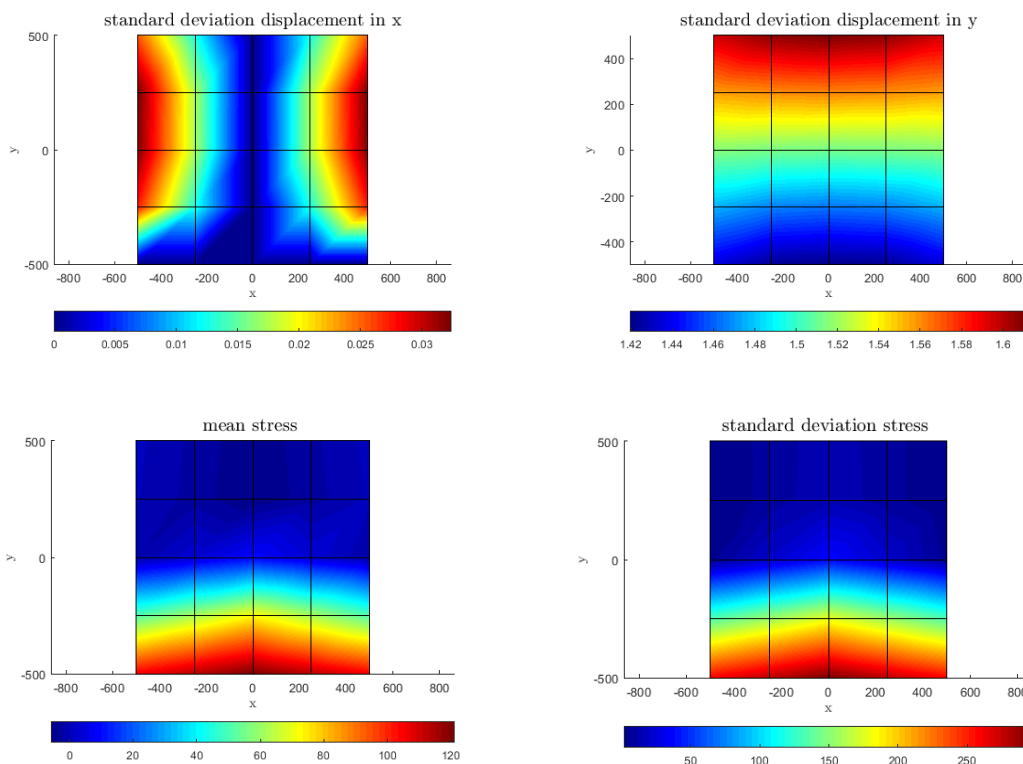


شکل شماره ۵ بردار های ویژه برای ۴ ترم KLE در ۲ بعد

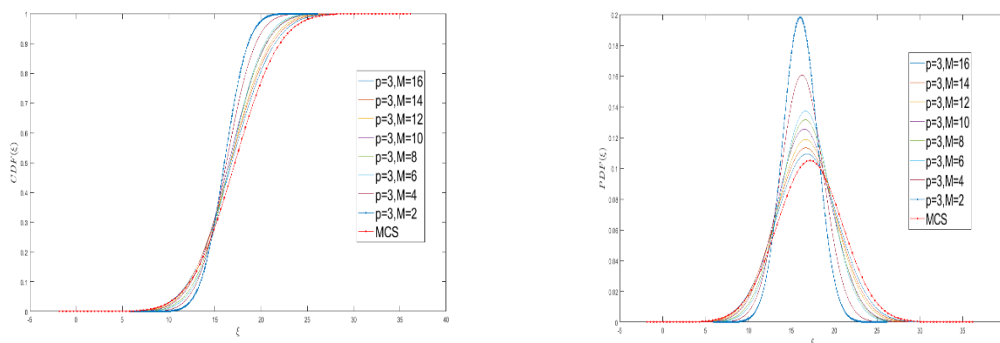


شکل شماره ۴ مقادیر ویژه برای ۴ ترم KLE در ۲ بعد

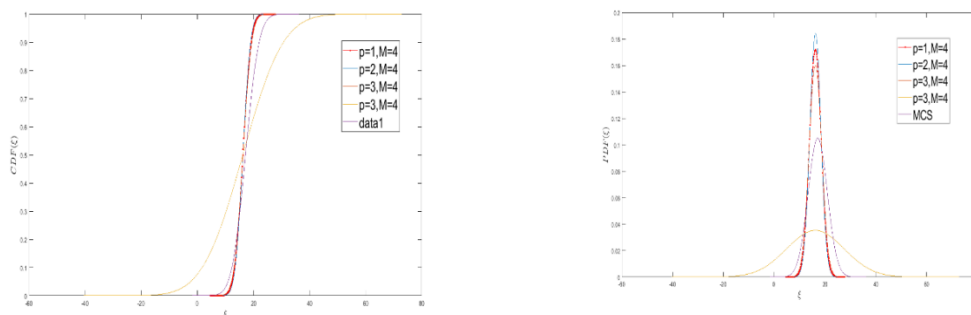




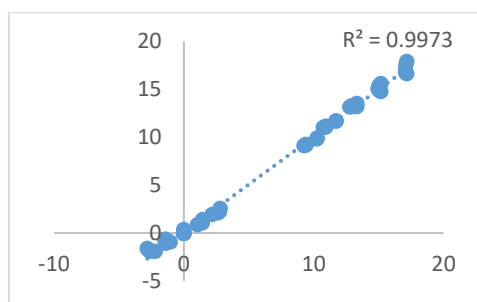
شکل شماره ۶ میانگین و انحراف معیار جابجایی و تنش در سازه مثال ۱



شکل ۷ PDF و CDF جابجایی قائم در گره ۲۵ برای p=۴ و M های متغیر



شکل ۸ PDF و CDF جابجایی قائم در گره ۲۵ برای M=4 و p های متغیر



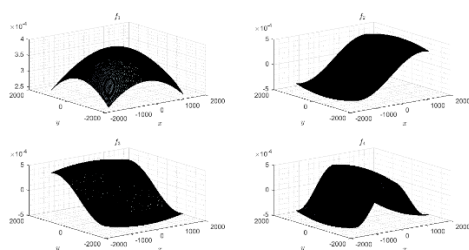
شکل 9 همبستگی بین مقادیر جابجایی میانگین بدست آمده از روش مونت کارلو و روش اجزای محدود طیفی تصادفی  $M=4$   $p=3$  جابجایی‌های و تنش‌های میانگین و انحراف معیارهای حاصله از روش تحلیل اجزای محدود طیفی تصادفی در شکل 6 شماره قابل مشاهده است. با بررسی نتایج بدست آمده از روش پیشنهادی و مقایسه این داده‌ها با خروجی‌های روش مونت کارلو (در هر دو مثال تعداد 10000 نمونه مورد ارزیابی قرار گرفته‌اند). دقت راه حل ارائه شده با توجه به کاهش زمان محاسبات بسیار مطلوب بوده است. در شکل‌های شماره 7 و 8 مقایسه‌ای بین PDF و همچنین CDF های بدست آمده برای جابجایی قائم در گره 25 دقت بر اساس  $M$  ها و  $p$  های مختلف ارائه گردیده است. با دقت در نتایج ارائه شده وضوح دید مشاهده گردید که افزایش ترم های  $M$  در دستیابی به نتیجه مطلوب بسیار موثر است و افزایش ترم های  $p$  علاوه بر افزایش حجم محاسبات باعث پراکندگی داده‌ها و نتایج تحلیل شده است لذا افزایش ترم های  $p$  پیشنهاد نمی‌گردد. بررسی نتایج نشان دهنده دقت بالا و درصد خطای کمتر از 4 درصد دارد. همبستگی بین مقادیر جابجایی میانگین بدست آمده از روش مونت کارلو و اجزای محدود طیفی تصادفی در شکل 9 قابل مشاهده است. مقادیر بدست آمده برای احتمال خرابی و همچنین مدت زمان انجام محاسبات هر دو روش SSFEM و MCS در جدول شماره 2 ارائه شده است.

جدول 2 احتمال خرابی و مدت زمان تحلیل سازه مثال شماره 1

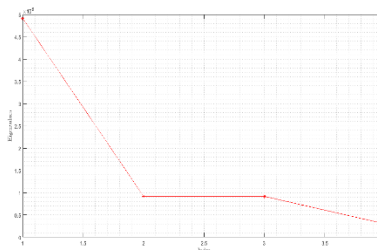
case	Pf	$\beta$	زمان (ثانیه)
MCS	0.01421	2/1914	4532
SSFEM	0.01396	2/1984	372

مثال 2 یک ورق مربعی سوراخ دار

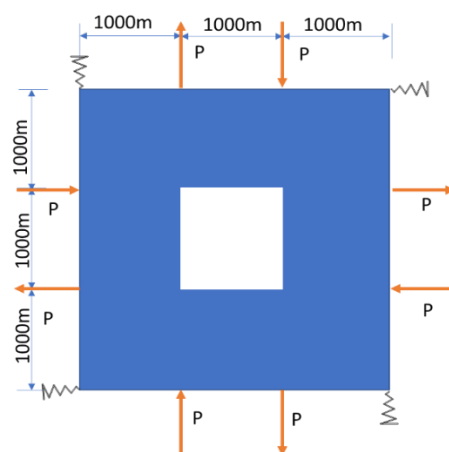
شکل 12 یک ورق در حالت تنش مسطحه به ابعاد  $0.1 \times 0.3 \times 3$  متر نشان می‌دهد. چگالی مصالح مصرفی صفر و ضریب پواسون  $0.3$  فرض شده است. سازه تحت 8 بار متمرکز  $P$  قرار گرفته است. سازه بوسیله 4 فنر به سختی  $K$  نگهداری می‌شود. برای تحلیل، بارگذاری، مدول الاستیسیته  $E$  و سختی فنر ها با میانگین  $\mu$  و انحراف معیار  $\sigma$  در نظر گرفته شده‌اند که مقادیر آنها در جدول 4 آمده‌اند. هر سه پارامتر با استفاده از تابع نمایی دو بعدی بصورت معادله 60 تعریف شده‌اند.  $Bx$  و  $by$  طول همبستگی هستند که در هر دو جهت مساوی با 3000 فرض شده و برای KLE با 4 ترم مقادیر ویژه و بردارهای ویژه در شکل 10 و شکل 11 نشان داده شده است.



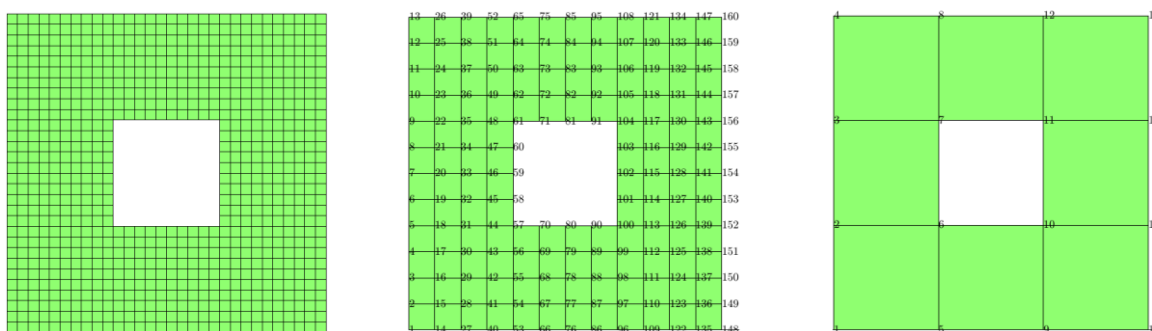
شکل 11 بردار های ویژه برای 4 ترم KLE در 2 بعد برای مثال 2



شکل شماره 10 مقادیر ویژه برای 4 ترم KLE در 2 بعد برای مثال 2



سازه مورد بررسی در مثال ۲



شکل 12 مش بندی های سازه مثال ۲

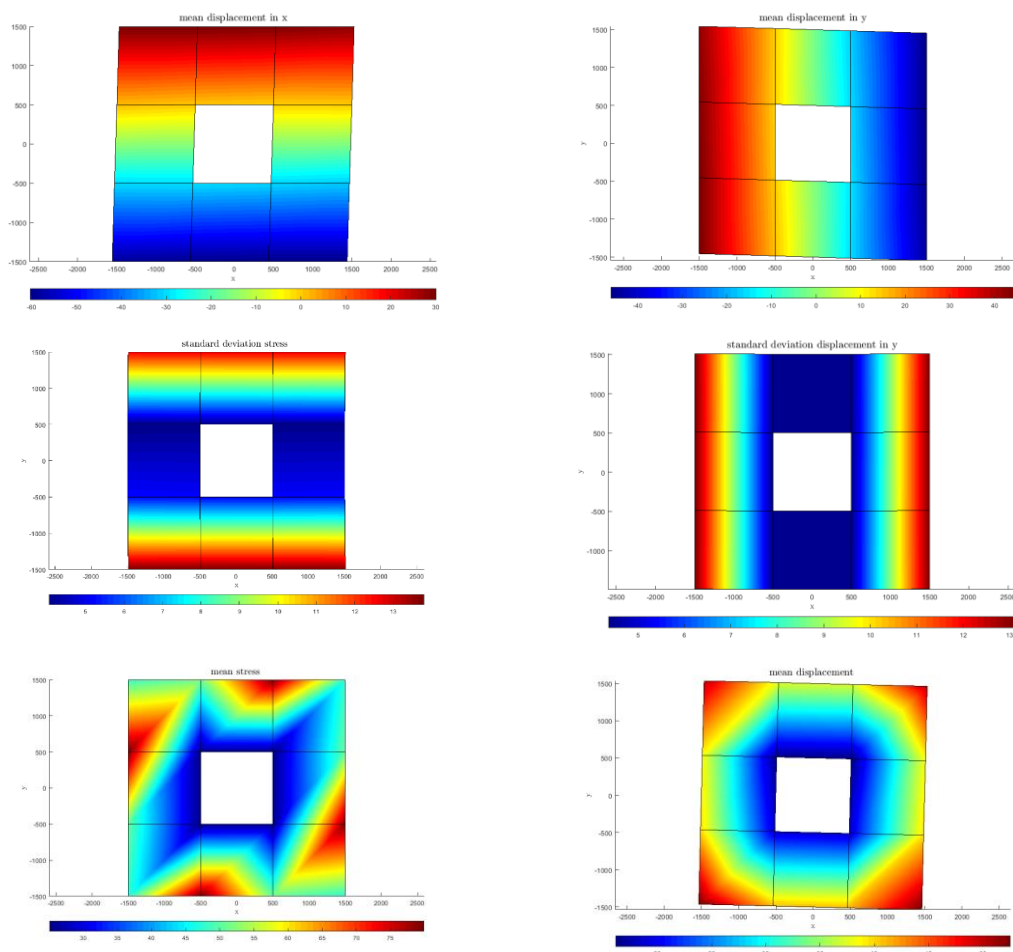
در این مساله تحلیل قابلیت اعتماد با استفاده از مش بندی نوع ۳ صورت پذیرفته و حداکثر میزان جابجایی قابل قبول ۳۰ میلی متر در نظر گرفته می شود.

جدول ۳ مشخصات مش بندی و محل اعمال بار و تکیه گاه ها در هر مش بندی در مثال ۲

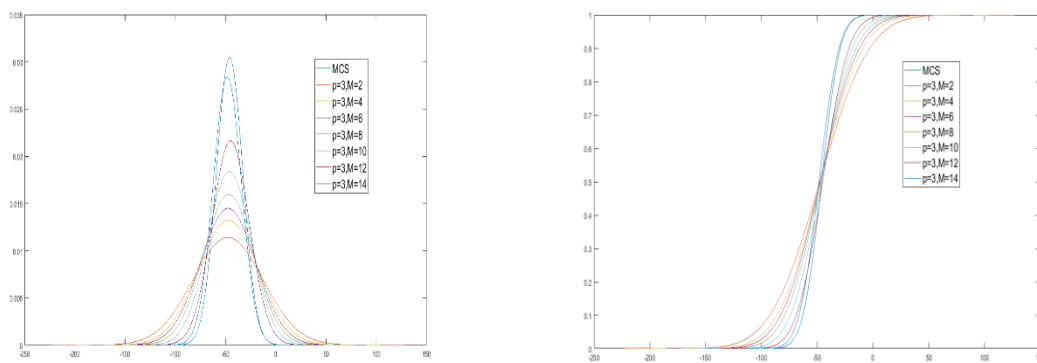
شماره شبکه بندی	تعداد المان ها	تعداد گره ها	ابعاد مش بندی	محل اعمال بار P
۱ شبکه بندی	۹	۱۶	۱۰۰۰mm×۱۰۰۰mm	گره های ۲.3.5.8.9.12.14.15
۲ شبکه بندی	۱۲۸	۱۶۰	۲۵۰mm×۲۵۰mm	گره های 5.9.53.65.96.108.152.156
۳ شبکه بندی	۸۰۰	۸۸۰	۱۰۰mm×۱۰۰mm	گره های 11.21.311.341.540.570.860.870

جدول ۴ داده های ورودی سازه مثال ۲

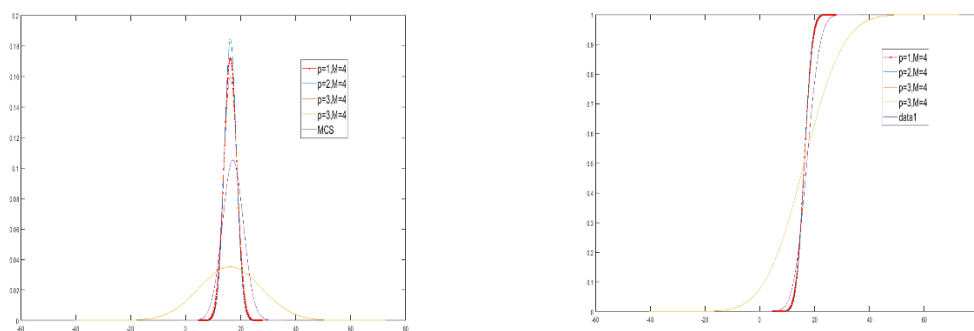
عنوان	مقدار	عنوان	مقدار
$\mu P$	۱۰۰۰ KN	$\mu K$	۶۰۰ KN/mm
$\sigma P$	۲۰۰ KN	$K\sigma$	۶۰۰ KN/mm
$\mu E$	۲۰۰ Gpa		
$\sigma E$	۲۰ Gpa		



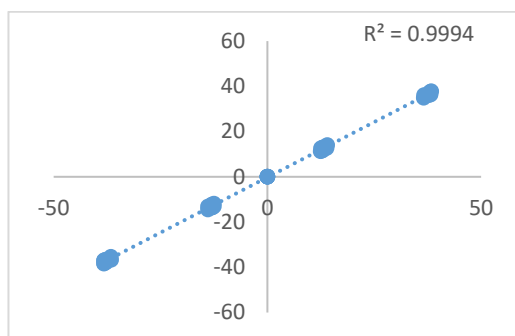
شکل ۱۳ میانگین و انحراف معیار جابجایی و تنش در سازه مثال ۲ مش بندی شماره ۱۶



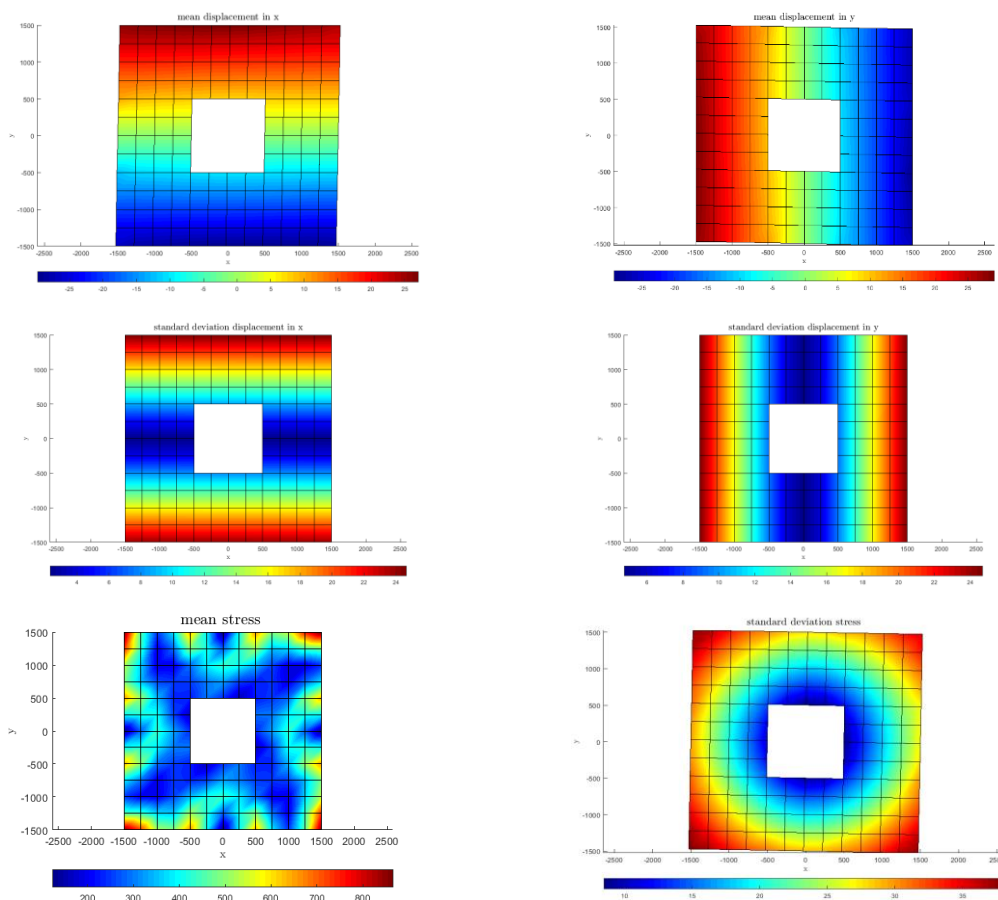
شکل ۱۴ PDF و CDF جابجایی افقی در گره ۱۶ برای  $p=3$  و  $M$ های متغیر



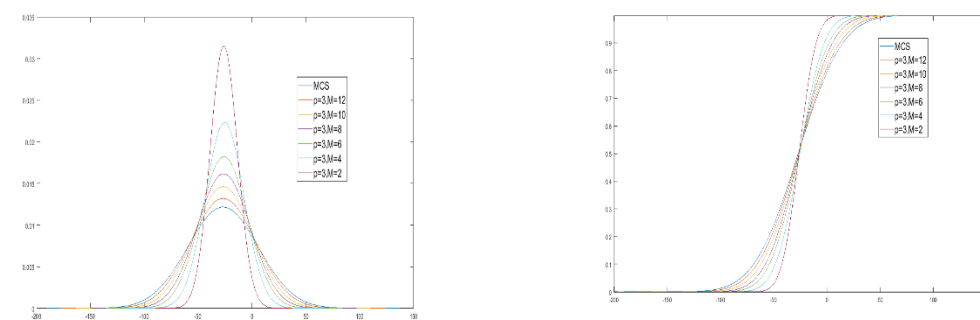
شکل ۱۵ PDF و CDF جابجایی افقی در گره ۱۶ برای  $M=3$  و  $p$  های متغیر



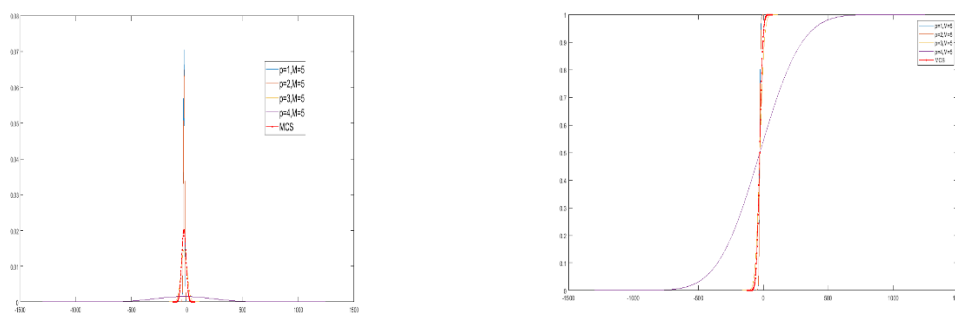
شکل ۱۶ همبستگی بین مقادیر جابجایی میانگین بدست آمده برای مش بندی ۱ مثال ۲ از روش مونت کارلو و روش اجزای محدود طیفی تصادفی  $M=4$  و  $p=3$



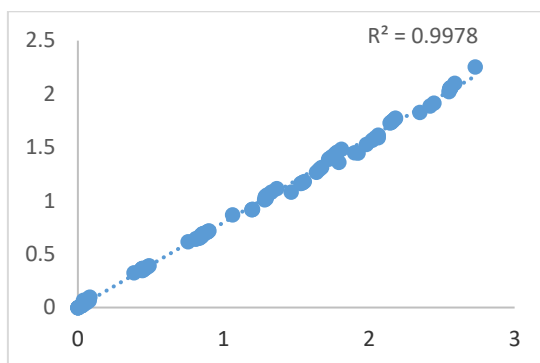
شکل 17 میانگین و انحراف معیار جابجایی و تنش در سازه مثال ۲ مش بندی شماره ۲



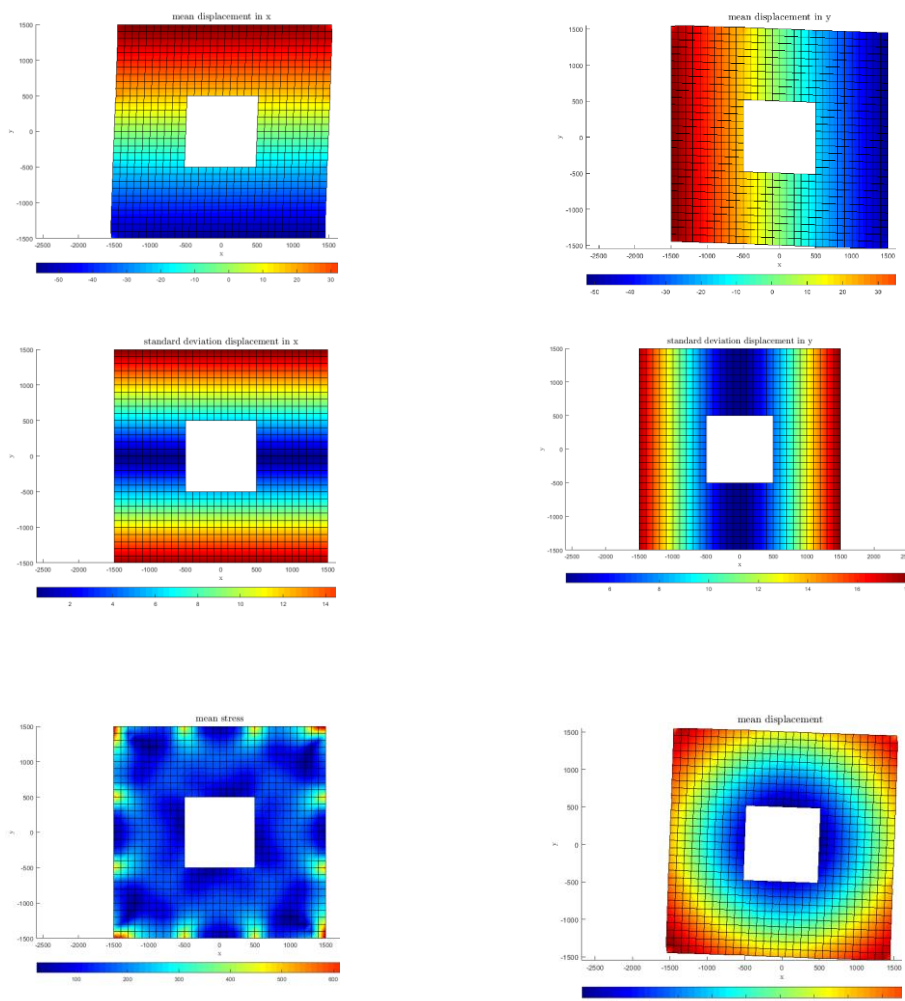
شکل 18 PDF و CDF جابجایی افقی در گره ۴۸ برای  $p=4$  و  $M$ های متغیر



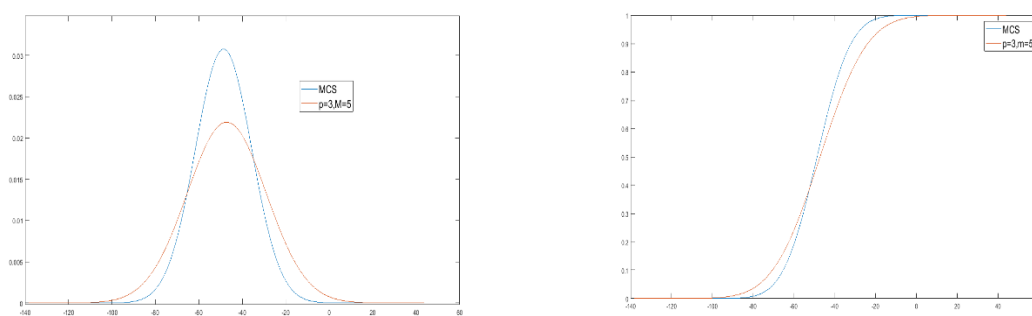
شکل 19 PDF و CDF جابجایی افقی در گره ۱۶ برای  $M=4$  و  $p$  های متغیر



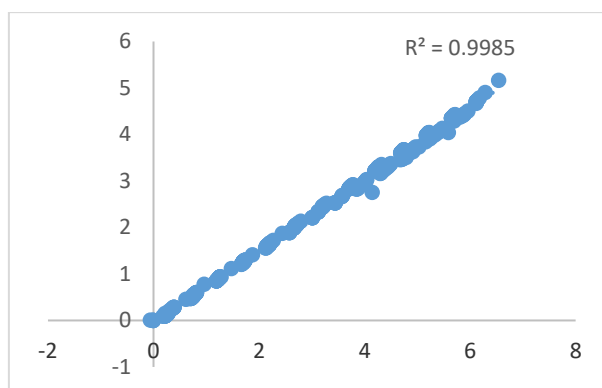
شکل 20 همبستگی بین مقادیر جابجایی میانگین بدست آمده برای مش بندی 3 مثال ۲ از روش مونت کارلو و روش اجزای محدود طیفی تصادفی  $p=3$  و  $M=4$



شکل شماره 21 میانگین و انحراف معیار جابجایی و تنش در سازه مثال ۲ مش بندی شماره ۳



شکل شماره 22 PDF و CDF جابجایی افقی در گره ۸۸۰



شکل 23 همبستگی بین مقادیر جابجایی میانگین بدست آمده برای مش بندی ۳ مثال ۲ از روش مونت کارلو و روش اجزای محدود طیفی تصادفی  $p=3$  و  $M=5$

در این مثال برای نشان دادن نحوه دستیابی به جواب مطلوب و تاثیر ابعاد مش بندی از سه نوع مش بندی مختلف استفاده شده است. در دو نوع مش بندی ۱ و ۲ نتایج برای  $M$  و  $p$  های مختلف بدست آمده و نتایج با مقادیر حاصله از روش مونت کارلو مقایسه شده اند. (شکل های ۲۱-۱۴) با مشاهده نمودارهای PDF و CDF (شکل های ۱۳-۱۶ و ۱۸-۲۰) بدست آمده برای جابجایی ها می توان دریافت با افزایش جملات KLE و PC بر دقت نتایج افزوده می شود تا جایی که در هر دو مش بندی با  $p=3$  و  $M=5$  مقدار انحراف معیار و میانگین جابجایی ها در گره ها با درصد خطایی کمتر از ۶ درصد با مقادیر حاصله از مونت کارلو مطابقت دارد. (شکل های ۱۶ و ۲۰ و ۲۳) برای مش-بندی سوم تنها از  $p=3$  و  $M=5$  در مدلسازی پارامترهای احتمالاتی استفاده شده که نتایج حاصله در شکل های ۲۱ و ۲۲ و ۲۳ قابل مشاهده هستند. شکل ۲۳ همبستگی بین خروجی های روش MCS و SSFEM را نشان می دهد که به وضوح می توان تطبیق نتایج را مشاهده نمود. در این مثال میانگین خطاها کمتر از ۴ درصد می باشد. جابجایی های و تنش های میانگین و انحراف معیارهای حاصله از روش تحلیل روش اجزای محدود طیفی تصادفی غیر خطی SSFEM در شکل ۱۷ و ۲۱ و ۲۳ برای هر سه نوع مش بندی قابل مشاهده هستند. مقادیر بدست آمده برای احتمال خرابی و همچنین مدت زمان انجام محاسبات هر دو روش SSFEM و MCS در جدول شماره ۵ ارائه شده است.

جدول 5 احتمال خرابی و مدت زمان تحلیل سازه مثال شماره ۲

مورد	Pf	$\beta$	زمان (ثانیه)
MCS	۰/۰۱۱۲	۳/۲۸۲۵	۱۲۵۰۱۸
SSFEM	۰/۰۱۲۳	۳/۲۴۷۶	۱۶۸۱

## ۵- نتیجه گیری

در تحقیق حاضر با گسترش روش اجزای محدود طیفی تصادفی روش پیشنهادی جهت فرمول بندی مسائل سازه ای دارای تغییر شکل بزرگ ارائه شده است. جهت دستیابی به ساختار مناسب از روش اجزای محدود طیفی تصادفی، سازه های ارائه شده در این تحقیق با ترم های مختلفی از  $M$  از KLE و ترم  $p$  چند جمله ای آشوبی PC مورد ارزیابی قرار گرفته اند. نتایج ارائه شده به وضوح نشان می دهند که:

۱- تاثیر تعداد جملات KLE در دستیابی به جواب مطلوب بعد از آنکه مقدار  $\lambda$  به سمت همگرایی میل کرد کاهش می یابد و عملاً افزایش تعداد جملات تنها حجم محاسبات و زمان انجام محاسبات را افزایش می دهد لذا انتخاب تعداد ترم  $M$  بزرگتر از ۱۰، اثر گذاری مطلوبی ندارد.

۲- تاثیر مقدار  $M$  نسبت به مقدار  $p$  در دستیابی به نتیجه مطلوب بیشتر بوده و از آنجا که مقدار  $p$  بر پراکندگی نتایج اثرگذار است انتخاب مقدار  $p$  بیش از حد بزرگ منجر به دستیابی به نتایج اشتباه شده لذا پیشنهاد می گردد در انتخاب مقدار  $p$  از آنالیز حساسیت استفاده شده و حتی الامکان مقدار  $p$  کوچکتر از ۵ انتخاب گردد.

۳-دقت روش بسیار مطلوب ارزیابی شده، بطوریکه خطای روش پیشنهادی در مقایسه با روش مونت کارلو کمتر از ۵ درصد برآورد گردیده است.

## مراجع

- [1] Onkar, A. K., Upadhyay, C. S., and Yadav, D. (2007). *Probabilistic failure of laminated composite plates using the stochastic finite element method*. Compos. Struct[online] vol. 77, no. 1, pp. 79–91, doi: 10.1016/j.compstruct.2005.06.006.
- [2] Kamiński, M. and Świta, P. (2015), *Structural stability and reliability of the underground steel tanks with the Stochastic Finite Element Method*, Arch. Civ. Mech. Eng. [online] vol. 15, no. 2, pp. 593–602, doi: 10.1016/j.acme.2014.04.010.
- [3] Mouyiaux, A., Carvajal, C., Bressolette, P., Peyras, L., Breul, P., and Bacconnet, C. (2018), *Probabilistic stability analysis of an earth dam by Stochastic Finite Element Method based on field data*, Comput. Geotech[online] vol. 101, pp. 34–47, doi: 10.1016/j.compgeo.2018.04.017.
- [4] Guedri, M. Lima, A. M. Bouhaddi, G. N. and Rade, D. A., (2010), *Robust design of viscoelastic structures based on stochastic finite element models*, Mech. Syst. Signal Process[online] vol. 24, no. 1, pp. 59–77, doi: 10.1016/j.ymsp.2009.03.010.
- [5] Sepahvand, K. and Marburg, S., (2017), *Spectral stochastic finite element method in vibroacoustic analysis of fiber-reinforced composites*, Procedia Eng[online] vol. 199, pp. 1134–1139, doi: 10.1016/j.proeng.2017.09.241.
- [6] Kamiński, M. M. and Świta, P., (2011), *Generalized stochastic finite element method in elastic stability problems*, Comput. Struct[online] vol. 89, no. 11–12, pp. 1241–1252, doi: 10.1016/j.compstruc.2010.08.009.
- [7] Isfeld, A. C. Stewart, M. G. and Masia, M. J., (2021), *Stochastic finite element model assessing length effect for unreinforced masonry walls subjected to one-way vertical bending under out-of-plane loading*, Eng. Struct[online] vol. 236, doi: 10.1016/j.engstruct.2021.112115.
- [8] Zhang, H. An, N. and Zhu, X., (2022), *Structural dynamic reliability analysis of super large-scale lattice domes during earthquakes using the stochastic finite element method*, Soil Dyn. Earthq. Eng[online] vol. 153, doi: 10.1016/j.soildyn.2021.107076.
- [9] Vrijdaghs, R. and Verstrynghe, E., (2022), *Probabilistic structural analysis of a real-life corroding concrete bridge girder incorporating stochastic material and damage variables in a finite element approach*, Eng. Struct[online] vol. 254, doi: 10.1016/j.engstruct.2021.113831.
- [10] Ghanem, R. G. and Spanos, P. D., (1997), *Spectral techniques for stochastic finite elements*, Arch. Comput. Methods Eng [online] vol. 4, no. 1, pp. 63–100, doi: 10.1007/BF02818931.
- [11] Zhang, S., Guan, X. and Jiang, L., (2021), *Convergence analysis of constraint energy minimizing generalized multiscale finite element method for a linear stochastic parabolic partial differential equation driven by additive noises*, J. Comput. Appl. Math., [online] vol. 389, doi: 10.1016/j.cam.2020.113328.
- [12] Ngah, M. F. and Young, A., (2007), *Application of the spectral stochastic finite element method for performance prediction of composite structures*, Compos. Struct., [online] vol. 78, no. 3, pp. 447–456, doi: 10.1016/j.compstruct.2005.11.009.
- [13] Ghanem, R. G. and Spanos, P. D., (1991), *Stochastic Finite Element Method: Response Statistics*, Springer, doi: 10.1007/978-1-4612-3094-6\_4.
- [14] Trcala, M., (2015), *Spectral stochastic modeling of uncertainties in nonlinear diffusion problems of moisture transfer in wood*, Appl. Math. Model., [online] vol. 39, no. 5–6, pp. 1740–1748, doi: 10.1016/j.apm.2014.09.032.
- [15] Zakian, P. and Khaji, N., (2016), *A novel stochastic-spectral finite element method for analysis of elastodynamic problems in the time domain*, Meccanica, [online] vol. 51, no. 4, pp. 893–920, doi: 10.1007/s11012-015-0242-9.
- [16] Nastos, C. and Zarouchas, D., (2022), *Probabilistic failure analysis of quasi-isotropic CFRP structures utilizing the stochastic finite element and the Karhunen–Loève expansion methods*, Compos. Part B Eng., [online] vol. 235, doi: 10.1016/j.compositesb.2022.109742.
- [17] Stefanou, G. and Papadrakakis, M., (2004), *Stochastic finite element analysis of shells with combined random material and geometric properties*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., [online] vol. 193, no. 1–2, pp. 139–160, doi: 10.1016/j.cma.2003.10.001.
- [18] Chen, N. Z. and Soares, C. Guedes, (2008), *Spectral stochastic finite element analysis for laminated composite plates*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., [online] vol. 197, no. 51–52, pp. 4830–4839, doi: 10.1016/j.cma.2008.07.003.
- [19] Yazdani, A., Ghohani Arab, H., and Rashki, M., (2020), *Simplified spectral stochastic finite element formulations for uncertainty quantification of engineering structures*, Structures, [online] vol. 28, pp. 1924–1945, doi: 10.1016/j.istruc.2020.09.040.

- [20] Zakian, P., Khaji, N., and Kaveh, A., (2017), *Graph theoretical methods for efficient stochastic finite element analysis of structures*, Comput. Struct., [online] vol. 178, pp. 29–46, doi: 10.1016/j.compstruc.2016.10.009.
- [21] Ghanem, R. G. and Spanos, P. D., *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*. Courier Dover Publications, 1991. doi: 10.1007/978-1-4612-3094-6.
- [22] Vissarion Papadopoulos, D. G. G., (2018), *Stochastic Finite Element Methods*. Springer
- [23] Sudret, B. and Der Kiureghian, A., (2000), *Stochastic finite element methods and reliability*, no. October.
- [24] Bathe, K. J., (2005) *Finite Element Procedures*. Prentice-Hall, [Online]. Available: [http://books.google.com/books?id=wKRRAAAAMAAJ&pgis=1%5Cnftp://ftp.demec.ufpr.br/disciplinas/EME748/Textos/Bathe, K.-J. - Finite Element Procedures - 1996 - Prentice-Hall - ISBN 0133014584 - 1052s.pdf](http://books.google.com/books?id=wKRRAAAAMAAJ&pgis=1%5Cnftp://ftp.demec.ufpr.br/disciplinas/EME748/Textos/Bathe,K.-J.-FiniteElementProcedures-1996-Prentice-Hall-ISBN0133014584-1052s.pdf)