

## Dynamic Response of Rigid Square Foundations on an Elastic Half-Space Subjected to Oblique Incident SH Waves Using Boundary Element Method

Forough Ashkan<sup>1</sup>, Abbas Eslami Haghghat<sup>2\*</sup>

1- Ph.D. student, civil engineering department, Urmia university, Urmia, Iran

2- Assistant professor, civil engineering department, Urmia university, Urmia, Iran

### ABSTRACT

In this paper, the dynamic response of a rigid square foundation on an elastic half-space was investigated. In order to consider the kinematic soil structure interaction, massless foundation is assumed. In this research, a rigid square foundation was subjected to oblique incident harmonic SH waves. Taking into account the characteristics of the wave, including the obliquity of the wave, which is described by two parameters including the angle of incident wave with the vertical direction and the angle of impact of the wave with the foundation edge in the plan, the analysis of the effect of the soil foundation kinematic interaction was studied. The impedance functions as well as the foundation input motion including the torsional and horizontal motions of the foundation were then calculated. Boundary element method was used for the dynamic analysis of the foundation. The weak and strong singularity in governing integral equations were investigated. The results showed that changes in the vertical and horizontal angle of the incident wave have an important effect on the dynamic foundation response, and in particular, non-vertical waves reduce the translational motion compared to free field motion and also cause additional torsional motion in the foundation. The obtained results were expressed in terms of impedance functions as well as horizontal and torsional motions of the foundation versus the dimensionless frequency. Also, in simple cases, the results were compared with the results in literature and an acceptable agreement was observed. The results show the vertical and horizontal angles of incident waves can influence the foundation response. As vertical angle increases, the foundation response becomes further away from the free field response, and at higher frequencies, its value decreases and approaches to zero. With the increase of the horizontal angle, the horizontal displacement also decreased. The results are shown in dimensionless frequency graphs.

### ARTICLE INFO

**Receive Date:** 04 September 2023

**Revise Date:** 18 November 2023

**Accept Date:** 18 January 2024

### Keywords:

Impedance Functions,  
Oblique Incident SH Wave,  
Rigid Square Foundation,  
Kinematic Soil Structure  
Interaction,  
Boundary Element Method

All rights reserved to Iranian Society of Structural Engineering.

doi: <https://doi.org/10.22065/jsce.2024.411237.3192>

\*Corresponding author:

Email address: [a.eslami@urmia.ac.ir](mailto:a.eslami@urmia.ac.ir)

## پاسخ دینامیکی شالوده‌های مربعی صلب بر روی نیم فضای الاستیک تحت امواج مایل

### SH با روش المان مرزی

فروغ اشکان<sup>۱</sup>، عباس اسلامی حقیقت<sup>۲\*</sup>

۱- دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه ارومیه، ارومیه، ایران

۲- استادیار گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه ارومیه، ارومیه، ایران

#### چکیده

در این مقاله پاسخ دینامیکی یک شالوده مربعی صلب بر روی یک نیم فضای الاستیک مورد بررسی قرار گرفت. به منظور در نظر گرفتن اندرکنش سینماتیکی خاک و سازه، لازم است شالوده بدون جرم فرض شود. در این تحقیق شالوده مربعی صلب در معرض امواج هارمونیک و مایل SH در نظر گرفته شد. با در نظر گرفتن ویژگی‌های موج از جمله مایلیت موج ورودی که با دو پارامتر شامل زاویه ورودی موج با راستای قائم و همچنین زاویه برخورد موج نسبت به ابعاد شالوده در پلان توصیف می‌شود، تجزیه و تحلیل اثر اندرکنش سینماتیکی خاک و شالوده مورد مطالعه قرار گرفت. بدین ترتیب ابتدا توابع امپدانس و سپس حرکت ورودی به شالوده شامل حرکات افقی و پیچشی شالوده محاسبه گردید. به منظور تجزیه و تحلیل دینامیکی شالوده از روش المان مرزی استفاده شد. بدین منظور ناسرگی ضعیف و قوی موجود در معادلات انتگرالی حاکم مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان داد که تغییرات زاویه قائم و افقی موج ورودی تأثیر مهمی بر پاسخ دینامیکی شالوده داشته و به طور خاص، امواج غیر قائم باعث کاهش حرکت انتقالی نسبت به حرکت میدان آزاد گردیده و در عوض باعث ایجاد پیچش اضافی در شالوده می‌گردند. نتایج به دست آمده در قالب توابع امپدانس و نیز جابجایی افقی و پیچشی شالوده در برابر فرکانس بی‌بعد بیان شدند. همچنین یافته‌های حاصل با نتایج موجود در ادبیات فنی مقایسه شدند و تطابق قابل قبولی مشاهده گردید. نتایج نشان دهنده تأثیر زوایای قائم و افقی بر روی پاسخ شالوده می‌باشند. با افزایش زاویه قائم، پاسخ شالوده از پاسخ میدان آزاد دورتر می‌شود و در فرکانس‌های بالاتر مقدار آن کاهش یافته و به صفر نزدیک می‌شود. با افزایش زاویه افقی نیز جابجایی افقی کاهش یافته و نتایج بصورت نمودارهایی در فرکانس بی‌بعد نشان داده شده‌اند.

کلمات کلیدی: توابع امپدانس، موج مایل SH ورودی، شالوده صلب مربعی، اندرکنش سینماتیکی خاک و سازه، روش المان مرزی.

شناسه دیجیتال:		سابقه مقاله:				
doi:	<a href="https://doi.org/10.22065/jsce.2024.411237.3192">https://doi.org/10.22065/jsce.2024.411237.3192</a>	چاپ	انتشار آنلاین	پذیرش	بازنگری	دریافت
	<a href="https://doi.org/10.22065/jsce.2024.411237.3192">10.22065/jsce.2024.411237.3192</a>	۱۴۰۳/۰۶/۳۱	۱۴۰۲/۱۰/۲۸	۱۴۰۲/۱۰/۲۸	۱۴۰۲/۰۸/۲۷	۱۴۰۲/۰۶/۱۳
عباس اسلامی حقیقت <a href="mailto:a.eslami@urmia.ac.ir">a.eslami@urmia.ac.ir</a>					* نویسنده مسئول: پست الکترونیکی:	

## ۱- مقدمه

اندرکنش دینامیکی خاک و سازه از جمله مسائل ژئوتکنیک لرزه‌ای بوده که منجر به تحلیل‌های واقع‌بینانه در طراحی سازه‌های مهندسی عمران می‌گردد. به‌طور کلی اندرکنش دینامیکی خاک و شالوده را می‌توان بر اساس منبع تحریک به دو گروه مسائل پراکندگی<sup>۱</sup> و مسائل تشعشع<sup>۲</sup> تقسیم‌بندی نمود. در مسائل تشعشع، شالوده توسط بارهای خارجی تحریک شده و امواج از شالوده به سمت توده خاک منتشر می‌گردند. در مسائل پراکندگی، پاسخ شالوده تحت اثر امواج لرزه‌ای مورد بررسی قرار می‌گیرد. محاسبه سختی دینامیکی یا توابع امپدانس شالوده، زیرمجموعه مسأله تشعشع و ارزیابی حرکت ورودی به شالوده تحت امواج ورودی مختلف را می‌توان به‌عنوان مسأله پراکندگی قلمداد نمود. با فرض رفتار الاستودینامیک مصالح توده خاک، می‌توان جواب‌های مناسبی برای توابع امپدانس و نیز حرکت ورودی به شالوده به دست آورد. قابل‌ذکر است که معادله حاکم بر رفتار الاستودینامیک معادله ناویر-کوشی بوده که شامل سه دسته معادلات اساسی، تعادل و سازگاری می‌باشد. از آنجاکه توابع امپدانس در حوزه فرکانس مطرح می‌شوند، معادله ناویر-کوشی باید با فرض هارمونیک بودن منبع تحریک تحلیل گردد. بر این اساس، حرکت ورودی به شالوده تحت امواج نیز در حوزه فرکانس به‌دست‌آمده و به کمک تبدیل فوریه آنرا تبدیل به پاسخ زمانمند نمود.

محاسبه توابع امپدانس این مزیت را دارد که توده نامحدود خاک زیر شالوده را می‌توان با یکسری فنر و میراگر جایگزین نمود. در حالت کلی این فنر و دمپرها در جهات مختلف افقی، عمودی، چرخشی و پیچشی در زیر شالوده تعبیه می‌شوند. به کمک توابع امپدانس می‌توان نیروها، لنگرها و پیچش اعمالی به شالوده را با تغییر مکان‌ها، چرخش‌ها و دوران پیچشی نظیر ارتباط داد. همچنین قابل‌ذکر است که اکثر مطالعات اندرکنش دینامیکی بین خاک و شالوده بر اساس فرض صلبیت شالوده استوار است. در ضمن بجای محاسبه توابع امپدانس می‌توان به محاسبه وارون آن‌ها که معرف توابع نرمی<sup>۳</sup> بوده اقدام نمود و به کمک آن‌ها ارتباط بین جابجایی‌ها و نیروهای متناظر را برقرار نمود.

برای ارزیابی توابع امپدانس می‌توان از روش‌های تحلیلی و عددی مختلفی استفاده کرد. روش‌های تحلیلی به‌منظور محاسبه توابع امپدانس شالوده با هندسه‌های ساده مانند شالوده‌های نواری یا مدور بر روی توده همگن و نیمه بی‌نهایت خاک مطرح می‌شوند. نتایج تحلیلی برای شالوده نواری سطحی توسط وستمن و لوکو<sup>۴</sup> [۱] و همچنین اوین<sup>۵</sup> [۲] معرفی شده است. شایان‌ذکر است که نتایج فوق تنها برای نسبت پواسون 0.5 دقیق بوده و نتایج حاصله برای نسبت پواسون‌های دیگر و به‌ویژه در محدوده فرکانس بی‌بعد بالا دقیق نیست. یکسری از محققین از روش تابع گرین برای ارزیابی توابع نرمی شالوده مربعی بر روی محیط ویسکوالاستیک استفاده نمودند [۳]. در همین راستا میتا و لوکو<sup>۶</sup> [۴] توابع امپدانس و نیز حرکات ورودی موثر برای پی‌های مربع صلب واقع بر توده نیم فضای الاستیک را برحسب فرکانس بی‌بعد ارائه دادند. از جمله تکنیک‌های دیگر برای محاسبه توابع امپدانس استفاده از مدل مخروطی<sup>۷</sup> [۵] می‌باشد. از این روش برای محاسبه امپدانس شالوده‌های مدور سطحی و مدفون استفاده شده است. اکثر مطالعات صورت گرفته برای شالوده با پلان‌های ساده همچون دایره و مربع می‌باشد. البته برای سایر اشکال هندسی شالوده نیز می‌توان آن را با یک دایره یا مربع هم مساحت معادل تقریب زد و بطور تقریبی از نتایج آنها استفاده نمود. این روش تقریبی توسط کوبوری و همکاران<sup>۸</sup> [۶] برای محاسبه توابع نرمی پی‌های مستطیلی استفاده شده است. همچنین توابع امپدانس و نیز حرکت ورودی به شالوده در اثر انتشار امواج مختلف با روش انتگرال مرزی بر پایه توابع گرین [۷] و نیز روش ترکیبی المان مرزی و روش لایه نازک [۸] توسط محققین مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. عوامل متعددی می‌تواند بر روی توابع امپدانس و حرکت ورودی به شالوده تأثیر گذار باشد. مدفون‌شدگی شالوده تأثیر قابل‌ملاحظه‌ای بر روی این پارامترها دارد. همچنین تماس ناقص بین دیواره‌های شالوده مدفون و خاک اطراف نیز از دیگر عوامل تأثیرگذار می‌باشد [۹]. همچنین قابل‌تصور است که وجود شالوده مجاور نیز توابع امپدانس و حرکت ورودی به شالوده را تغییر دهد [۱۰]. این تأثیر بالطبع به فاصله دو شالوده و نیز سطحی یا مدفون‌شدگی آن‌ها نیز بستگی دارد. برخی از محققین نیز به کمک مدل‌های آزمایشگاهی به بررسی نحوه تغییرات توابع امپدانس پرداخته‌اند. مالکی و همکاران توسط مدل‌های آزمایشگاهی، اثر جنبه‌های مختلف هندسی بر تابع امپدانس افقی پی‌های سطحی را مورد بررسی قرار دادند. نتایج آنها نیز نشان داد که نسبت عمق فرورفتگی پی در خاک به‌طور قابل‌توجهی بر توابع امپدانس تأثیرگذار است [۱۱]. در ادامه تحقیقات

آزمایشگاهی، بررسی تاثیر اندرکنش سینماتیک به کمک آزمایشات بزرگ مقیاس نیز صورت گرفته است [۱۲]. انتخاب رفتار خطی معادل به منظور مدل سازی رفتار غیرخطی خاک تحت امواج لرزه ای شدید نیز توسط برخی محققین برای محاسبه توابع امیدانس و حرکت ورودی به شالوده مورد استفاده قرار گرفته است [۱۲]. همچنین برخی محققین تمرکز خود را به پاسخ سازه واقع بر شالوده تحت امواج لرزه ای مختلف گذاشتند [۱۳، ۱۴ و ۱۵]. فعالیتهای گسترده ای نیز با نصب سنسورها در ساختمانها صورت گرفته تا تاثیر اندرکنش خاک و سازه را نسبت به حرکت میدان آزاد ملاحظه نمایند. در این تحقیقات، تأکید اصلی بر روی وجود طبقه زیرزمین بود تا اختلاف حرکت ورودی به شالوده و حرکت میدان آزاد را بهتر نمایان سازد. مرور نسبتا جدیدی بر فعالیتهای صورت گرفته در این زمینه موجود می باشد [۱۶]. در همین راستا روابط ساده ریاضی پیشنهاد شد که بر اساس برازش آنها با نتایج میدانی بدست آمده، اثر اندرکنش سینماتیکی را بیان نمایند [۱۷ و ۱۸]. برخی محققین نیز به مدل سازی نتایج میدانی با نتایج نرم افزاری پرداختند و برای تطبیق بهتر نتایج، رفتار غیر خطی خاک را وارد مدلسازی کامپیوتری نمودند [۱۹].

عامل اصلی اختلاف بین پاسخ میدان آزاد و حرکت ورودی به شالوده، همان سختی شالوده و اثر سینماتیک اندرکنش خاک و سازه می باشد که از نقطه نظر کاربردی در مراجع مختلفی به آن اشاره شده است [۱۶، ۱۷، ۱۸ و ۱۹]. با توجه به اهمیت این قضیه، مدل سازی های عددی حرکت ورودی به شالوده و نیز محاسبه توابع امیدانس آنها از دیرباز مورد توجه محققین مختلف قرار گرفته و در چند سطر قبل به مراجع اصلی در این زمینه اشاره گردید. اما نوآوری موجود در این تحقیق، محاسبه حرکت ورودی به این نوع شالوده ها با دو متغیر مایلیت قائم و افقی برای امواج  $SH$  می باشد. برای نشان دادن تاثیر زوایای ورودی به شالوده، شالوده های سطحی مربعی صلب مورد بررسی قرار می گیرد و نتایج در قالب حرکات افقی و پیچشی شالوده بیان می شود. نتایج نشان می دهد که تفاوت آزمون انتشار موج  $SH$  با راستای شالوده مربعی عاملی کاملا تاثیرگذار در پاسخ ورودی به شالوده داشته و نیز ماکزیمم پاسخ مشاهده شده به ابعاد شالوده و فرکانس ورودی موج بستگی دارد.

## ۲- روش المان مرزی

یک روش حل برای بررسی معادلات الاستودینامیک حاکم و محاسبه و ارزیابی پاسخ حاصله، استفاده از روش معادلات انتگرال مرزی می باشد. استفاده از این روش برای حل مسائل الاستودینامیک در مقایسه با دیگر روش ها مزایای منحصربه فردی دارد. از جمله مزایای این روش، مش بندی صرفا مرز مسأله و بالطبع کاهش ابعاد مساله از نقطه نظر مش بندی و نیز مدل سازی دقیق و ساده برای محیط های نامحدود می باشد، به طوری که شرایط تشعشع ناشی از انتشار امواج به توده بی نهایت به طور اتوماتیک در فرمول بندی مسأله ارضا شده است. حل عددی معادلات انتگرال مرزی به کمک تکنیک المان مرزی صورت می گیرد. روش المان مرزی یک تکنیک قدرتمند برای تحلیل عددی معادلات انتگرال مرزی می باشد. با صرف نظر از نیروهای حجمی، معادله انتگرال مرزی حاکم برای یک محیط سه بعدی همگن، الاستیک و همسانگرد را می توان با استفاده از قضیه متقابل بتی به صورت زیر به دست آورد [۲۰]:

$$c_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_s p_{ij}^*(\xi, \chi)u_j(\chi)ds = \int_s p_j(\chi)u_{ij}^*(\xi, \chi)ds \quad (1)$$

که در آن  $\xi$  نشان دهنده نقطه مبدا و  $\chi$  نقطه مشاهده بر روی مرز است. همچنین پارامتر  $c$  ضریب پرش،  $u_j$  و  $p_j$  به ترتیب جابجایی و ترکشن نقاط روی مرز و  $ds$  نمو مساحت بر روی مرز می باشد. همچنین  $u_{ij}^*(\xi, \chi)$  و  $p_{ij}^*(\xi, \chi)$  حل های اساسی هارمونیک بوده که جابجایی و ترکشن را در نقطه مشاهده  $\chi$  تحت یک واحد بار نقطه ای هارمونیک اعمال شده در نقطه چشمه  $\xi$  در یک محیط نامحدود نشان می دهند. حل های اساسی جابجایی و ترکشن برای مسائل سه بعدی به صورت زیر بیان می شود:

$$u_{ij}^* = \frac{1}{4\pi\mu} [\psi\delta_{ij} - \chi r_{,i}r_{,j}]$$

$$p_{ij}^* = \frac{1}{4\pi} \left[ \left( \frac{c_p^2}{c_s^2} - 2 \right) \left( \frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\partial\chi}{\partial r} - \frac{2}{r}\chi \right) r_{,i}n_{,j} + \left( \frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\chi}{r} \right) \left( \delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,j}n_{,i} \right) - 2\frac{\chi}{r} \left( n_{,j}r_{,i} - 2r_{,i}r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} \right) - 2\frac{\partial\chi}{\partial r} r_{,i}r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} \right] \quad (2)$$

$$\psi = \left[ 1 - \frac{c_s^2}{\omega^2 r^2} + \frac{c_s}{i\omega r} \right] \frac{e^{-i\omega r/c_s}}{r} - \frac{c_s^2}{c_p^2} \left[ \frac{-c_p^2}{\omega^2 r^2} + \frac{c_p}{i\omega r} \right] \frac{e^{-i\omega r/c_p}}{r} \quad (3)$$

$$\chi = \left[ 1 - \frac{3c_s^2}{\omega^2 r^2} + \frac{3c_s}{i\omega r} \right] \frac{e^{-i\omega r/c_s}}{r} - \frac{c_s^2}{c_p^2} \left[ 1 - \frac{3c_p^2}{\omega^2 r^2} + \frac{3c_p}{i\omega r} \right] \frac{e^{-i\omega r/c_p}}{r}$$

$$c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho}$$

$$c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (4)$$

که در آن  $r$  فاصله بین نقاط چشمه و مشاهده و  $\omega$  و  $c_p, c_s$  به ترتیب فرکانس و سرعت انتشار امواج فشاری  $p$  و برشی  $s$  می باشد. همچنین  $\rho$  دانسیته محیط و  $\delta_{ij}$  دلتای کرونگر و  $\mu$  ضرایب لامه می باشند که در آن معادله انتگرال مرزی سه بعدی را می توان با گسسته سازی مرز به یکسری المان های سطحی و انتخاب مناسب گره ها تحلیل نمود. در اینجا المان سطحی چهارضلعی با انتخاب یک گره در داخل آن در نظر گرفته شده است. این المان ثابت بوده بدین مفهوم که جابجایی و ترکشن در کلیه نقاط المان ثابت می ماند. از نقطه نظر محاسباتی، معادله انتگرالی (۱) برای هر نقطه مرزی به صورت زیر نوشته شده و برای محاسبه انتگرال ها به مختصات محلی برده می شود [۲۰]:

$$c_q u_q + \sum_{e=1}^{nElems} \left\{ \int_{S_e} [p_{ij}^*] \{N\}^T dS_e \{u^e\} \right\} = \sum_{e=1}^{nElems} \left\{ \int_{S_e} [u_{ij}^*] \{N\}^T dS_e \{p^e\} \right\} \quad (5)$$

$$\int_{L_e} [p_{ij}^*] \{N\}^T dL_e = \int_{-1}^1 [p_{ij}^*] \{N\}^T |J| d\xi$$

$$\int_{L_e} [u_{ij}^*] \{N\}^T dL_e = \int_{-1}^1 [u_{ij}^*] \{N\}^T |J| d\xi \quad (6)$$

که در آن  $q$  شماره گره و بردارهای ستونی  $\{u^e\}$  و  $\{p^e\}$  به ترتیب نشان دهنده جابجایی های گرهی و بردارهای ترکشن در هر المان می باشد که برای المان چهارضلعی ثابت تک گرهی، هریک از این بردارها شامل یک عضو می باشند. همچنین  $\{N\}$  بردار درون یاب،  $nElems$  تعداد المان های سطحی مرزی و  $S_e$  مساحت المان  $e$  ام است. قابل ذکر است که با انتقال انتگرال ها به مختصات محلی در

معادله (۶)، ترم ژاکوبین  $|J|$  در انتگرال ظاهر می‌شود. در نهایت انتگرال‌های موجود در سیستم مختصات محلی و با استفاده از روش گوس استاندارد محاسبه گردیده و دستگاه معادلات زیر به دست می‌آید:

$$[F]\{u\} = [G]\{p\} \quad (7)$$

که در آن  $[F]$  و  $[G]$  ماتریس‌های ضرایب تأثیر و بردارهای  $\{u\}$  و  $\{p\}$  به ترتیب شامل جابجایی و ترکشن همه گره‌های واقع بر سطوح مرزی می‌باشند. با انتگرال‌گیری حل‌های اساسی  $u_{ij}^*$  و  $p_{ij}^*$  بر روی المان‌های مختلف، کلیه درایه‌های ماتریس  $F$  و  $G$  به دست می‌آید. پس از تنظیم مجدد جابجایی‌ها و ترکشن‌های معلوم و مجهول در گره‌های مرزی، دستگاه مختصات خطی به دست آمده را می‌توان به راحتی برای جابجایی‌ها و ترکشن‌های مجهول در مرز حل نمود. قابل ذکر است که پس از حل مسأله و محاسبه مقادیر مجهول مرزی، پاسخ هر نقطه از دامنه را نیز در صورت نیاز می‌توان به دست آورد. برای این کار کافی است ضریب پرش  $C_q$  در معادله (۵) برابر یک قرار داده شود.

### ۳- بررسی انتگرال‌های ناسره

محاسبه ترم‌های قطری ماتریس‌های ضرایب تأثیر  $[F]$  و  $[G]$ ، مستلزم انتگرال‌گیری در المان‌هایی است که نقاط چشمه و مشاهده در یک المان واقع شده‌اند. بنابراین با انطباق نقاط چشمه و مشاهده، فاصله  $r$  صفر گردیده و در ترم‌های انتگرالی شامل حل-های اساسی جابجایی و ترکشن یعنی  $u_{ij}^*$  و  $p_{ij}^*$ ، ناسرگی در انتگرال‌ها رخ می‌دهد. از آنجاکه معادله (۵) برای هر یک از المان‌های مرزی در نظر گرفته می‌شود، بنابراین هر یک از گره‌های مرزی نقش نقاط چشمه را خواهند داشت، لذا در هر یک از المان‌های مرزی ناسرگی به وجود می‌آید. ضمناً این ناسرگی‌ها شامل ناسرگی ضعیف و قوی می‌باشد.

طرف راست معادله انتگرالی (۵) دارای ناسرگی ضعیف می‌باشد. برای رفع ناسرگی در انتگرال موجود، مطابق شکل (۱-الف)، نقطه چشمه در داخل المان را به چهار رأس المان وصل کرده و در نتیجه المان چهارضلعی به ۴ مثلث داخلی افزای می‌گردد. سپس با انتقال انتگرال به مختصات محلی، به هر یک از المان‌های مثلثی مطابق شکل (۱-ب) مانند المان چهارضلعی برخورد کرده به طوری که گره چهارم بر گره چشمه یعنی نقطه داخلی المان منطبق باشد. بدین ترتیب بجای انجام انتگرال بر روی یک المان چهارضلعی، چهار انتگرال بر روی المان‌های مثلثی انجام شده و حاصل آن‌ها باهم جمع می‌شود. این تکنیک توسط لاچات<sup>۱</sup> [۲۱] و منگ<sup>۲</sup> [۲۲] ارائه گردید. این محققین نشان دادند که با استفاده از این روش، ژاکوبین موجود در انتگرال محلی از مرتبه  $r$  شده و با  $r$  موجود در مخرج حل اساسی  $u_{ij}^*$  ساده می‌شود و این امر باعث حذف ناسرگی انتگرال می‌گردد. در نهایت کلیه انتگرال‌ها با روش انتگرال‌گیری گوس استاندارد محاسبه شده و بدین ترتیب اعضای قطری ماتریس  $[G]$  محاسبه می‌شوند.

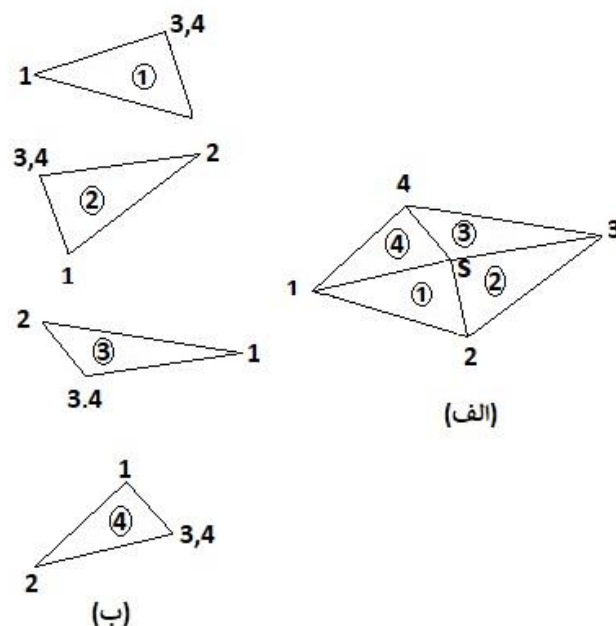
انتگرال موجود در طرف چپ معادله انتگرالی (۵) از نوع ناسرگی قوی است. علاوه بر آن، ضریب پرش  $C_q$  نیز با ترم‌های قطری ماتریس  $[F]$  جمع می‌شود. روش متداول برای مواجهه با این ناسرگی، استفاده از تکنیک حرکت جسم صلب می‌باشد. این تکنیک بر این اصل استوار است که حرکت جسم صلب، باعث ایجاد ترکشن نمی‌شود. البته استفاده از حرکت جسم صلب مختص مسائل استاتیکی است، اما با توجه به توضیحاتی که در ادامه آورده می‌شود، می‌توان آن را در حالت هارمونیک نیز بکار برد. با توجه به اینکه در روابط هارمونیک یعنی معادلات (۲) و (۳)، همواره  $w$  و  $r$  همراه باهم ظاهر شده‌اند، بنابراین وقتی فاصله  $r$  به سمت صفر میل می‌کند مثل این است که  $w$  به سمت صفر میل می‌کند و متناظراً می‌توان فرض کرد که  $w$  به سمت صفر میل می‌کند و این بدان معناست که حل دینامیکی در حالت ناسرگی انتگرال‌ها به حل استاتیکی میل می‌کند. به عبارت دیگر، ناسرگی موجود در

<sup>۱</sup> Lachat

<sup>۲</sup> Mang

انتگرال‌های استاتیکی و دینامیکی یکسان بوده و ضریب پرش در هر دو حالت یکسان است. بنابراین حل اساسی ترکشن استاتیکی را یک بار از حل اساسی ترکشن دینامیکی تفریق نموده و بر اساس توضیحات فوق این قسمت دیگر ناسرگی ندارد و سپس یک بار هم جمع شده که برای این قسمت تکنیک حرکت جسم صلب برقرار است. ضمناً حل اساسی ترکشن استاتیکی که برای تحلیل مسائل مربوط به موج هارمونیک  $SH$  مورد استفاده قرار می‌گیرد به صورت زیر می‌باشد:

$$P_{ij}^* = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \left[ (1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_i r_j \right] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu) \left[ r_i n_j - r_j n_i \right] \right\} \quad (8)$$



شکل ۱: (الف) افراز المان چهارضلعی به سه المان مثلثی (ب) چهار المان مثلثی هر یک با چهار گره

#### ۴- محاسبه توابع امیدانس شالوده مربعی صلب واقع بر توده همگن خاک

روش المان مرزی ابزاری قدرتمند برای محاسبه توابع امیدانس شالوده‌های سطحی و مدفون محسوب می‌شود. همچنین به کمک این روش، پاسخ شالوده تحت انواع مختلف امواج حجمی و سطحی قابل محاسبه است. در ابتدا نحوه محاسبه توابع امیدانس شالوده‌های صلب و در ادامه محاسبه حرکت ورودی به شالوده آورده می‌شود.

توابع امیدانس یا سختی‌های دینامیکی شالوده در حوزه فرکانس مطرح می‌شود. نیروهای وارد بر یک شالوده صلب شامل سه نیرو و سه لنگر در جهات  $x$ ،  $y$  و  $z$  بوده و جابجایی‌های متناظر نیز شامل سه جابجایی انتقالی و سه دوران حول محورهای اصلی می‌باشد. به کمک ماتریس  $6 \times 6$  توابع امیدانس، رابطه بین دامنه نیروها و جابجایی‌های هارمونیک به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{HHx}(a_0) & 0 & 0 & 0 & K_{HM}(a_0) & 0 \\ 0 & K_{HHy}(a_0) & 0 & -K_{HM}(a_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{VV}(a_0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K_{MH}(a_0) & 0 & K_{MMx}(a_0) & 0 & 0 \\ K_{MH}(a_0) & 0 & 0 & 0 & K_{MMy}(a_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{TT}(a_0) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \\ \Delta_z \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix} \quad (9)$$

اندیس‌های  $T, M, V, H$  به ترتیب معرف راستاهای افقی، قائم، چرخشی و پیچشی هستند. بنابراین مؤلفه‌های  $K_{HM}, K_{TT}, K_{MM}, K_{VV}, K_{HH}$  به ترتیب معرف سختی پی در جهات افقی و قائم و چرخشی و پیچشی می‌باشد. همچنین مؤلفه‌های  $K_{MH}$  و  $K_{HM}$  معرف ترکیب جابجایی افقی و چرخش شالوده بوده که باهم کوپل می‌باشند. در صورتی که محورهای  $x-y$  در صفحه شالوده قرار داشته باشد، نیروی افقی در راستای  $x$  با لنگر حول محور  $y$  و نیز نیروی افقی در راستای  $y$  با لنگر حول محور  $x$  کوپل می‌گردد. به عبارت دیگر، برش و خمش حول محورهای اصلی شالوده باهم کوپل بوده به طوری که مثلاً خمش اعمالی به شالوده علاوه بر دوران باعث ایجاد لغزش افقی شالوده نیز می‌گردد. همچنین همان‌طور که در ماتریس توابع امپدانس مشاهده می‌شود، بعضی از مؤلفه‌های این ماتریس صفر می‌باشد. به‌طور خاص اگر به مؤلفه‌های  $K_{TT}$  و  $K_{VV}$  در ماتریس توجه شود، دیگر مؤلفه‌های سطری و ستونی این اعضا برابر صفر می‌باشد. این بدان معناست که نیروی قائم و جابجایی متناظر آن و همچنین پیچش شالوده و زاویه پیچشی متناظر آن نسبت به دیگر مؤلفه‌ها مستقل می‌باشد. در حالت کلی، توابع امپدانس به فرکانس و ضریب پواسون و هندسه شالوده بستگی دارد. در حالت پی مربعی صلب سطحی، کلیه مؤلفه‌های ماتریس امپدانس وابسته به فرکانس بی بعد  $a_0$  بوده که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$a_0 = \frac{\omega B}{c_s} \quad (10)$$

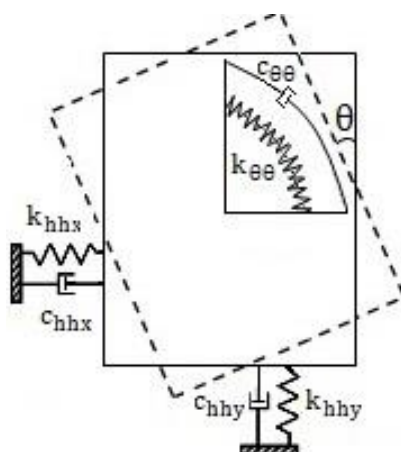
که  $B$  معرف نصف بعد شالوده مربعی می‌باشد. قابل ذکر است که هر یک از مؤلفه‌های ماتریس توابع امپدانس یک عدد مختلط می‌باشد که قسمت موهومی تابع امپدانس نشان‌دهنده میرایی تشعشعی خاک می‌باشد. بنابراین توده خاک می‌تواند رفتار کاملاً الاستیک داشته باشد و فاقد هرگونه میرایی مصالح یا هیستریسیس باشد اما به علت وجود توده بینهایت یا نیمه‌بینهایت خاک، موج منتشر شده را در قالب میرایی تشعشعی مستهلک نماید. در هر حال مقدار حقیقی توابع امپدانس معرف هم‌فاز بودن نیرو و جابجایی بوده و مقدار مختلط آن‌ها نشان می‌دهد که یک اختلاف فاز به میزان  $90^\circ$  بین نیرو و جابجایی موجود است. از نقطه نظر فیزیکی، مقادیر حقیقی توابع امپدانس معرف سختی سیستم بوده که با فنر شبیه‌سازی می‌شود و مقادیر مختلط آن‌ها معرف میرایی سیستم بوده و با دمپر مدل‌سازی می‌شود. از آنجاکه در اثر انتشار امواج  $SH$ ، سختی‌های افقی در صفحه شالوده و نیز سختی پیچشی شالوده فعال می‌شوند، نمایش این مؤلفه‌ها در قالب فنر و دمپر، در شکل ۲ نشان داده شده و به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$K_{HHx} = K_{hhx} + i\omega C_{hhx} \quad (11)$$

$$K_{HHy} = K_{hhy} + i\omega C_{hhy} \quad (12)$$

$$K_{TT} = K_{\theta\theta} + i\omega C_{\theta\theta} \quad (13)$$

که به ترتیب  $k_{hhx}$  و  $C_{hhx}$  معرف سختی و میرایی افقی در جهت  $x$  و  $k_{hhy}$  و  $C_{hhy}$  معرف سختی و میرایی افقی در جهت  $y$  و  $k_{\theta\theta}$  و  $C_{\theta\theta}$  معرف سختی پیچشی و میرایی پیچشی می‌باشند.



شکل ۲: پلان شبیه‌سازی زمین و شالوده با فنر و دمپر

با توجه به صلب مفروض دانستن شالوده، تغییر مکان هر نقطه‌ای دلخواه از شالوده ( $u$ )، وابسته به شش حرکت جسم صلب بوده که توسط ماتریس تبدیل  $D$  این ارتباط و وابستگی صورت می‌گیرد:

$$u = D\bar{u} \quad (14)$$

ماتریس تبدیل  $D$  برای یک شالوده مربعی با مرکزیت  $(x_0, y_0, z_0)$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & (z - z_0) & -(y - y_0) \\ 0 & 1 & 0 & -(z - z_0) & 0 & (x - x_0) \\ 0 & 0 & 1 & (y - y_0) & -(x - x_0) & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

همچنین طبق رابطه کار مجازی در محاسبه نیروی گرهی المان، کار ایجادشده توسط جسم صلب با کار ایجادشده توسط نقاط گرهی برابر در نظر گرفته می‌شود و رابطه زیر بین نیروها حاصل می‌گردد:

$$\bar{F} = D^{-1}F \quad (16)$$

که در آن  $F$  نیرو در هر نقطه از پی در نظر گرفته می‌شود و  $\bar{F}$  نیروی وارد بر شالوده صلب می‌باشد.

## ۵- محاسبه حرکت ورودی به شالوده مربعی صلب واقع بر توده همگن خاک

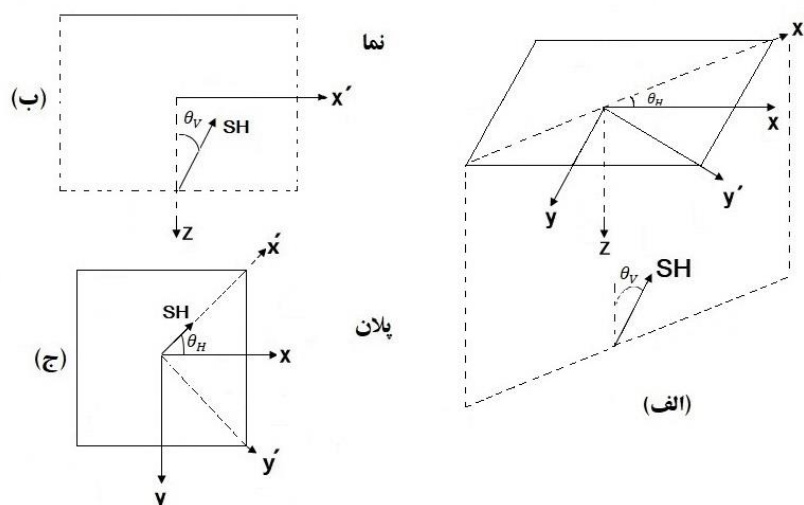
شکل (۳-الف) یک شالوده صلب مربعی با اضلاعی در راستای  $x$  و  $y$  را نشان می‌دهد که تحت امواج ورودی  $SH$  قرار دارد. جهت انتشار امواج در این شکل نشان داده شده و برای این نوع امواج جهت ارتعاش ذرات عمود بر صفحه  $x'z'$  می‌باشد. مطابق اشکال (۳-ب) و (۳-ج)، مایلیت امواج ورودی در صفحه قائم (نما) و صفحه افقی (پلان) را با دو پارامتر  $\theta_H$  و  $\theta_V$  می‌توان نشان داد. همان‌طور که در شکل (۳-ج) مشاهده می‌شود موج در صفحه افقی در راستای  $x$  منتشر شده و جابجایی ذرات آن در راستای  $y$  بوده و جهت انتشار با راستای  $x'$  زاویه  $\theta_H$  می‌سازد. بر اساس توضیحات فوق، پاسخ میدان آزاد موج  $SH$  را با روابط زیر می‌توان بیان نمود:

$$\begin{bmatrix} u_0 x \\ u_0 y \\ u_0 z \end{bmatrix} = A_0 \begin{bmatrix} -\sin \theta_H \\ \cos \theta_H \\ 0 \end{bmatrix} e^{-ik_0(-x' \sin \theta_V + z \cos \theta_V - c_s t)} + A_2 \begin{bmatrix} -\sin \theta_H \\ \cos \theta_H \\ 0 \end{bmatrix} e^{-ik_2(-x' \sin \theta_V - z \cos \theta_V - c_s t)} \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_H & \sin \theta_H & 0 \\ -\sin \theta_H & \cos \theta_H & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$k_0 = k_2 = \frac{\omega}{c_s} \quad (19)$$

که در آن  $\omega$  فرکانس موج ورودی،  $c_s$  سرعت انتشار موج برشی  $SH$ ،  $k_0$  و  $k_2$  اعداد موج ورودی و انعکاسی و  $u_0 x$ ،  $u_0 y$  و  $u_0 z$  به ترتیب پاسخ میدان آزاد موج  $SH$  در راستای  $x$ ،  $y$  و  $z$  می باشد. همچنین  $A_0$  و  $A_2$  دامنه موج ورودی و منعکس شده می باشد که با اعمال شرط صفر بودن ترکشن در سطح نیم فضا، می توان نشان داد که در پاسخ میدان آزاد حاصله، زاویه و دامنه امواج ورودی و منعکس شده یکسان می باشد.

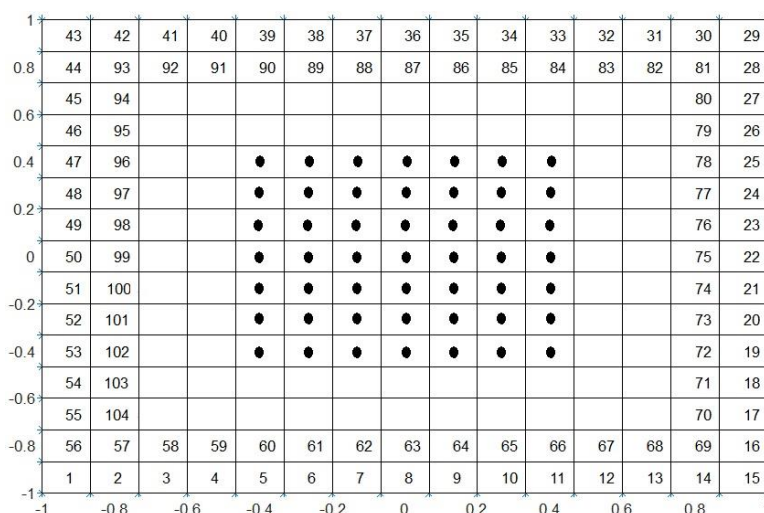


شکل ۳: (الف) هندسه پی در نیم فضا (ب) نمای انتشار موج ورودی  $SH$  (ج) پلان انتشار موج ورودی  $SH$

## ۶- نحوه انجام محاسبات

برای محاسبه توابع امپدانس شالوده مربعی، کافی است جابجایی های مختلف به شالوده صلب داده شده و با حل مسأله تشعشع و با انتگرال گیری از ترکشن های حاصله در زیر شالوده، مقادیر مختلف توابع امپدانس را محاسبه نمود. همچنین پاسخ کل محیط ناشی از انتشار موج  $SH$  را می توان به دو قسمت شامل پاسخ میدان آزاد و پاسخ میدان پراکنده تقسیم نمود. بر اساس روابط معرفی شده در فوق، ابتدا پاسخ میدان آزاد به کمک روابط تحلیلی محاسبه شده و سپس پاسخ میدان پراکنده به کمک روش المان

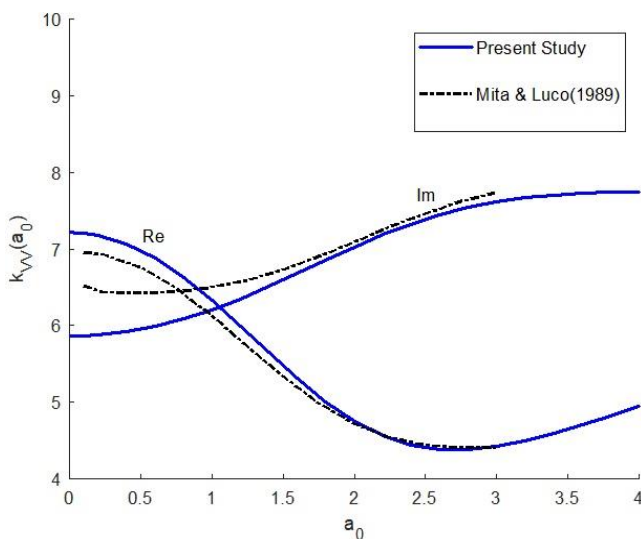
مرزی محاسبه می‌گردد. بدین منظور برنامه‌ای در محیط برنامه‌نویسی متلب R2021b [۲۳] تهیه گردیده که کلیه محاسبات فوق را انجام دهد. در اینجا یک پی مربعی با بعد طول  $2m$  در نظر گرفته شده و مطابق شکل زیر به  $225$  المان مربعی یکسان افزای می‌شود. البته در ادامه نتایج بر اساس پارامتر بی‌بعد  $a_0$  ارائه خواهد شد و انتخاب این بعد مشخص برای شالوده صرفاً برای سادگی محاسبات می‌باشد. برای محاسبه انتگرال‌ها نیز از ده نقطه گوسی استفاده گردید. همچنین در این شکل نحوه شماره‌گذاری المان‌ها نشان داده شده است. قابل ذکر است که افزایش بیشتر المان‌ها تأثیر ناچیزی در جواب‌های حاصله دارد و لذا همین تعداد المان برای انجام محاسبات بهینه می‌باشد. با توجه به ثابت فرض کردن نوع المان‌ها، یک گره در مرکز هر المان مربعی در نظر گرفته شده و شماره گره‌ها همانند شماره المان‌ها خواهد بود. به منظور وضوح بهتر در شماره‌گذاری و گره بندی المان‌ها، در شکل ۴ صرفاً نحوه شماره‌گذاری المان‌های اطراف شالوده مربعی و همچنین گره بندی المان‌های داخل آن نشان داده شده است.



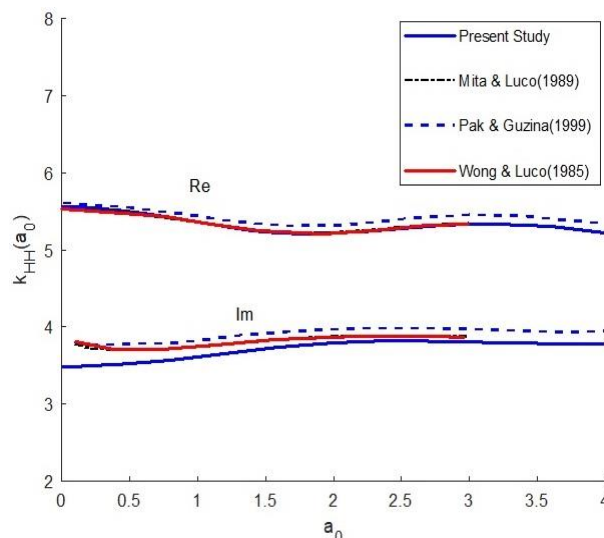
شکل ۴: پلان مش بندی و نقاط گرهی پی مربعی صلب

## ۷- صحت سنجی نتایج

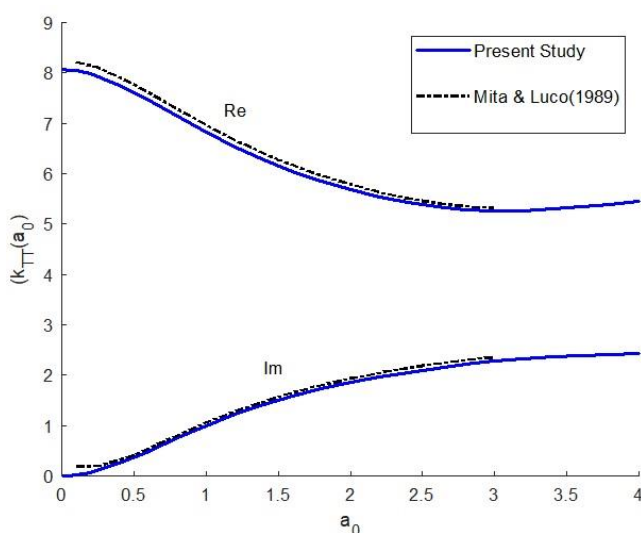
در این قسمت، مسأله شالوده سطحی مربعی صلب بر روی توده نیمه‌بینهایت، الاستیک و همگن خاک در نظر گرفته شده است. در ابتدا توابع امیدانس برای محدوده فرکانس بی‌بعد  $a_0$  در محدوده ۰ تا ۴ محاسبه شده و با نتایج موجود در تاریخچه مقایسه شده است. ابتدا در شکل (۵) مقادیر حقیقی و موهومی تابع امیدانس افقی با نتایج یکسری از محققین مقایسه گردیده است [۳، ۲۴ و ۲۵]. تطابق کامل نتایج حاصله در قسمت حقیقی با مراجع [۳ و ۲۵] کاملاً مشهود است. همچنین در مورد قسمت موهومی، نتایج حاصله حد پایین نتایج دیگر محققین بوده و با افزایش  $a_0$  تطابق بیشتری مشاهده می‌شود. ماکزیمم خطای نسبی در این حالت حدود ۵٪ درصد می‌باشد. نتایج توابع امیدانس قائم، خمشی و پیچشی نیز با نتایج مرجع [۳] مقایسه شده است. همان‌طور که شکل‌های ۶، ۷ و ۸ نشان داده شده، روند تغییرات قسمت‌های حقیقی و موهومی این نتایج کاملاً باهم سازگار می‌باشد. با این حال تطابق مناسب در توابع امیدانس خمشی و پیچشی وجود داشته اما در تابع امیدانس قائم، بیشترین تفاوت حدود ۱۱٪ مشاهده می‌گردد. در اینجا نیز در مقادیر بالاتر  $a_0$ ، انطباق بیشتری صورت می‌گیرد. ذکر این نکته نیز ضروری است که روش استفاده در مرجع [۳] بر اساس روش توابع گرین بوده و در این روش نیز صرفاً ناحیه زیر شالوده مش‌بندی می‌شود. ضمناً توابع گرین جابجایی و ترکشن، همان حل اساسی این پارامترها می‌باشد که در شرایط مرزی نیز صادق می‌باشند. در هر حال روش توابع گرین نیز یک روش عددی مرزی محسوب می‌شود که قرابت بسیار نزدیکی با روش المان مرزی دارد.



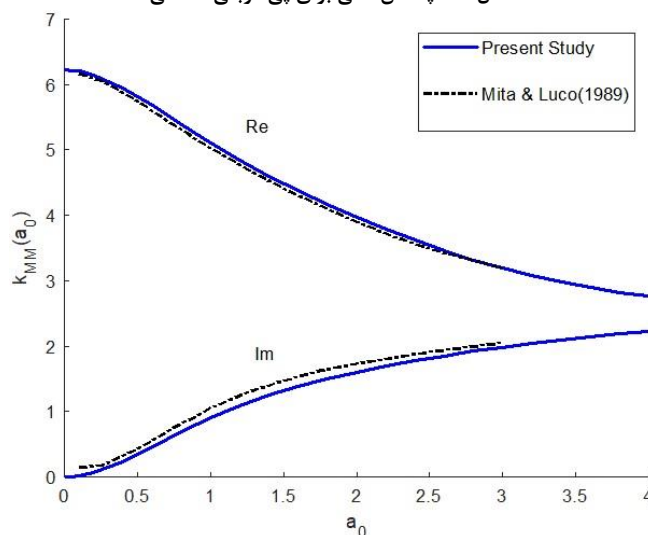
شکل ۶: امپدانس قائم برای پی مربعی سطحی



شکل ۵: امپدانس افقی برای پی مربعی سطحی



شکل ۸: امپدانس پیچشی برای پی مربعی سطحی



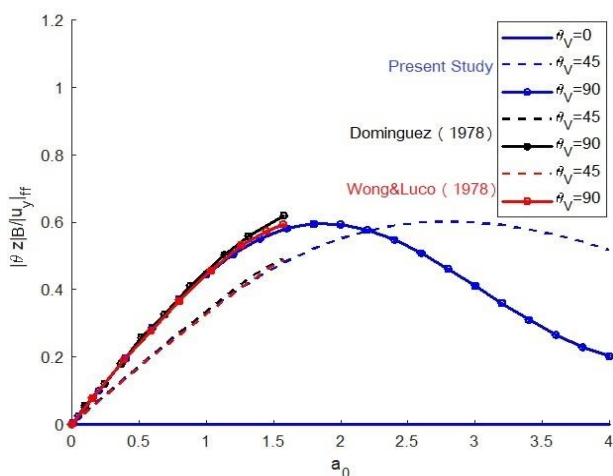
شکل ۷: امپدانس چرخشی برای پی مربعی سطحی

به منظور صحت‌سنجی نتایج حاصل از انتشار امواج  $SH$  به سمت شالوده مربعی صلب، نتایج حرکت ورودی به شالوده نیز با نتایج موجود در تاریخچه مقایسه گردیده است. در شکل‌های ۹ و ۱۰ به ترتیب جابجایی افقی و دوران پیچشی شالوده صلب نسبت به فرکانس بی‌بعد  $a_0$  آورده شده است. نتایج حاصله با نتایج مراجع [۲۶ و ۲۷] برای حالت  $\theta_H = 0^\circ$  و  $\theta_V = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$  مقایسه گردیده است. روش محاسباتی مرجع [۲۶] همان روش موجود در این تحقیق یعنی المان مرزی با المان‌های ثابت بوده و روش مورد استفاده در مرجع [۲۷]، روش توابع گرین می‌باشد برای حالات محدود زوایای ورودی، نتایج موجود در مرجع [۲۶] صرفاً تا مقدار  $a_0$  برابر ۱.۵ موجود بوده و لذا صرفاً شاخه صعودی در مقدار پیچش و شاخه نزولی در مقدار جابجایی افقی را می‌تواند نشان دهد. از نقطه نظر مقایسه‌ای، روند تغییرات هر یک از پارامترهای جابجایی و پیچش، کاملاً باهم سازگار می‌باشند. در اینجا جواب‌های حاصل نسبت به جابجایی در راستای محور  $x$  حاصل از میدان آزاد، نرمالایز شده است. البته برای موج  $SH$  با هر زاویه مایلیت  $\theta_V$ ، مقدار ماکزیمم پاسخ میدان آزاد همراه برابر عدد ثابت ۲ می‌باشد.

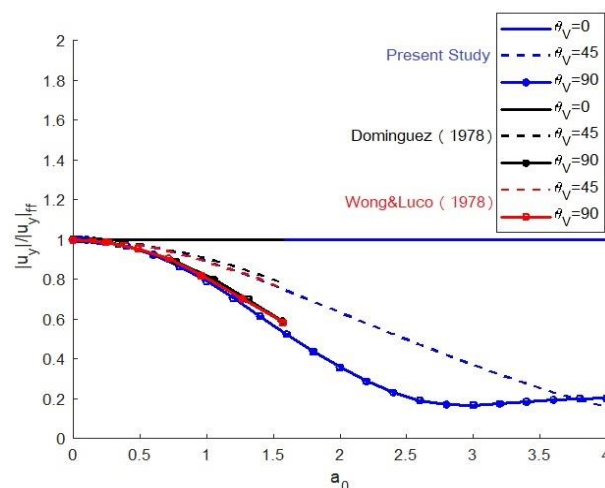
در شکل ۹ نتایج حاکی از آن است که در حالت  $\theta_V \neq 0^\circ$ ، جابجایی افقی نسبت به پاسخ میدان آزاد کاهش یافته و این میزان کاهش با افزایش زاویه تابش ورودی  $\theta_V$ ، بیشتر است. ضمناً روند نزولی برای مقادیر بیشتر  $a_0$ ، متوقف شده است. همچنین همان‌طور

که در شکل ۱۰ مشاهده می‌شود، در حالت  $\theta_V \neq 0^\circ$ ، در ابتدا دوران پیچشی افزایش یافته و برای مقادیر بالاتر  $a_0$  روند نزولی می‌گردد.

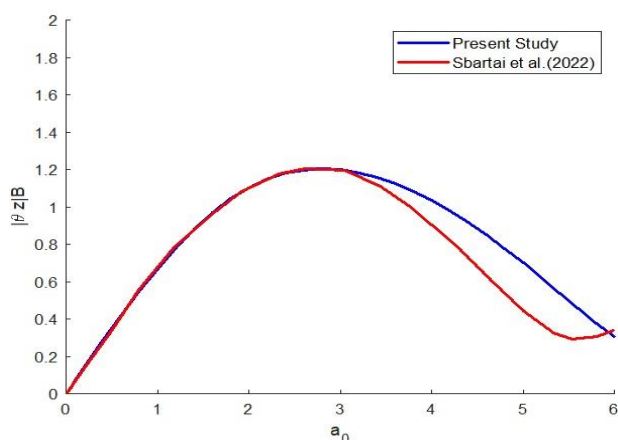
به عبارت دیگر بسته به مقدار  $\theta_V$ ، پیچش در محدوده‌های میانی  $a_0$ ، بحرانی‌ترین مقدار را داراست. البته در اینجا نیز نتایج ارائه شده در تاریخچه تا  $a_0 = 1.5$  بوده و لذا صرفاً روند نزولی در جابجایی و روند صعودی در پیچش وارد بر شالوده را نشان می‌دهند. همچنین باید توجه داشت که در حالت خاص  $\theta_H = 0^\circ$  و  $\theta_V = 0^\circ$ ، علاوه بر انطباق نتایج بر هم، از این نمودارها چنین استفاده می‌شود که در این حالت هیچ‌گونه اندرکنش سینماتیکی وجود نداشته و مقدار جابجایی و دوران نرمالایز شده به ترتیب ۱ و صفر یعنی همان پاسخ میدان آزاد می‌باشند. در شکل ۱۱ و ۱۲ نیز مقایسه روش موجود با روش ترکیبی المان مرزی- لایه نازک صورت گرفته است [۸ و ۱۲]. البته قابل ذکر است که در روش مورد استفاده در این مراجع، سنگ‌بستر در فاصله دور و در انتهای مدل قرار دارد. همچنین میرایی مصالح ۵ درصد برای توده خاک در نظر گرفته شده است. در هر حال انطباق خوبی بین نتایج خصوصاً در مقادیر کم فرکانس بدون بعد مشاهده می‌گردد. نکته قابل ذکر دیگر اینکه در محور قائم در شکل ۱۲، پیچش برحسب رادیان در نصف بعد شالوده ضرب گردیده و برحسب پارامتر طول می‌باشد. بنابراین از آنجاکه در مراجع [۸ و ۱۲]، ابعاد شالوده مربعی برابر یک در نظر گرفته شده و لذا مقادیر پیچش ارائه شده در این مراجع، ابتدا در مقدار نیم ضرب شده و سپس برای مقایسه آورده شده است.



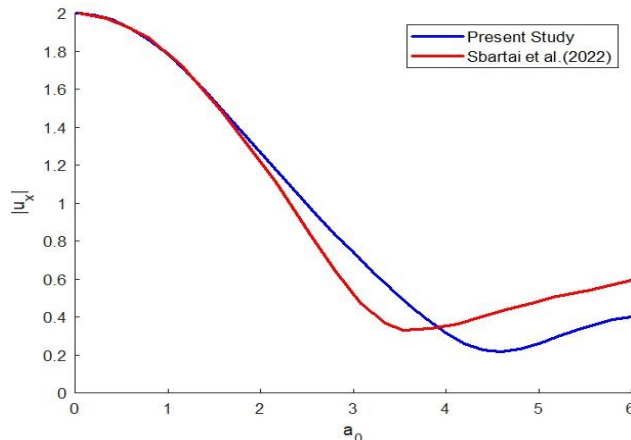
شکل ۱۰: دوران پیچشی برای پی مربعی سطحی  $\theta_H = 0^\circ$



شکل ۹: جابجایی افقی برای پی مربعی سطحی  $\theta_H = 0^\circ$



شکل ۱۲: دوران پیچشی برای شالوده مربعی سطحی  $\theta_H = 90^\circ$ ,  $\theta_V = 45^\circ$



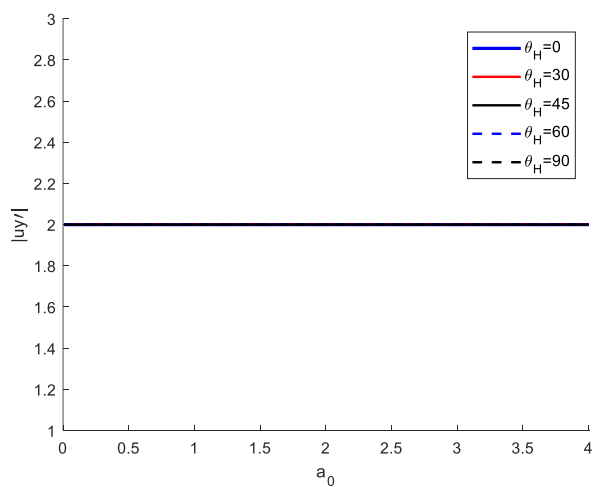
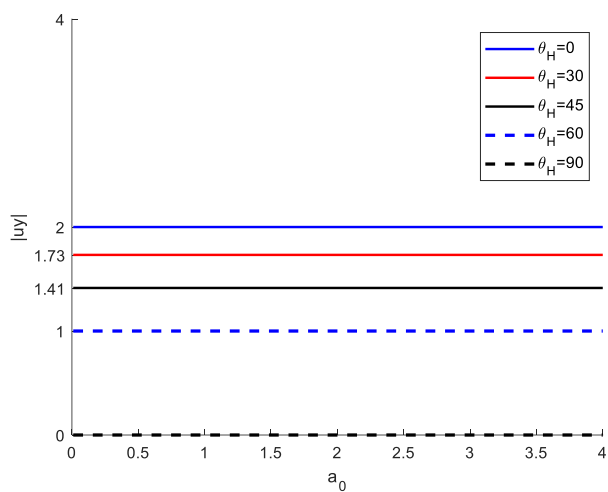
شکل ۱۱: جابجایی افقی برای شالوده مربعی سطحی  $\theta_H = 90^\circ$ ,  $\theta_V = 45^\circ$

## ۸- نتایج

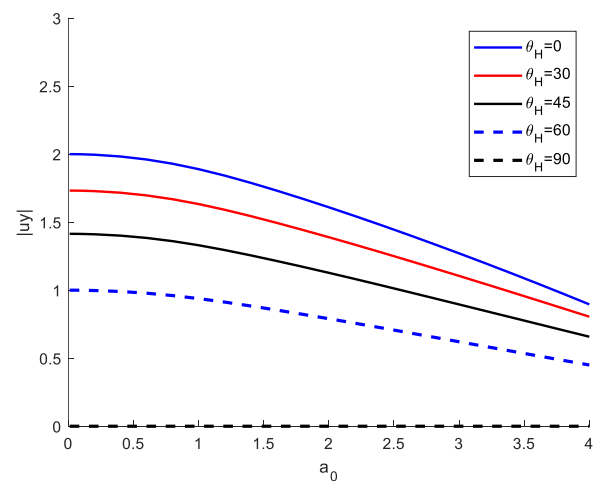
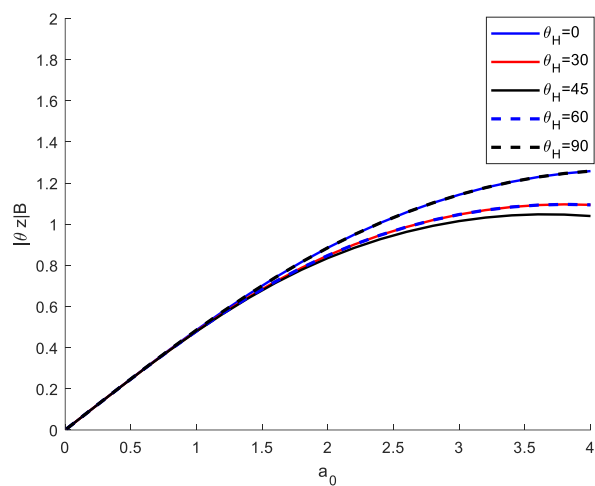
در اینجا با تغییر پارامترهای  $\theta_H$  و  $\theta_V$ ، به بررسی میزان جابجایی و پیچش شالوده مربعی صلب و بدون جرم پرداخته می‌شود. در ابتدا حالت انتشار موج ورودی قائم یعنی  $\theta_V = 0^\circ$  را در نظر می‌گیریم. شکل ۱۳ و ۱۴ مقادیر جابجایی افقی برای موج ورودی  $SH$  با زوایای مختلف  $\theta_H = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$  را نشان می‌دهد. از آنجاکه در این حالت اندرکنش سینماتیکی وجود نخواهد داشت، پاسخ شالوده صلب سطحی متناظر با پاسخ میدان آزاد بوده و لذا مستقل از ابعاد شالوده و فرکانس بی‌بعد  $a_0$  می‌باشد. همچنین برای موج  $SH$ ، پاسخ جابجایی در راستای عمود بر آزمون راستای انتشار امواج (محور  $y'$ )، همواره برابر ۲ می‌باشد (شکل ۱۳). اما برای محاسبه پاسخ جابجایی در حالت  $\theta_V = 0^\circ$  و در راستای ضلع  $y$  شالوده مربعی، کافی است مقدار دامنه ثابت ۲ در راستای  $y'$  را در راستای  $y$  تصویر کنیم یعنی عدد ۲ در  $\cos(\theta_H)$  ضرب گردد (شکل ۱۴). بنابراین با افزایش  $\theta_H$ ، شاهد کاهش پاسخ جابجایی در راستای  $y$  خواهیم بود. همان‌طور که انتظار می‌رود، در حالت حدی  $\theta_H = 90^\circ$ ، پاسخ جابجایی افقی میدان آزاد کلاً در راستای  $x$  بوده و دامنه جابجایی هارمونیک در راستای  $y$  برابر صفر می‌باشد. ضمناً از آنجاکه در پاسخ میدان آزاد برای حالت  $\theta_V = 0^\circ$ ، هیچ‌گونه پیچشی برای شالوده متصور نیست، مقادیر پیچش شالوده برابر صفر بوده و به جهت اختصار از آوردن نمودار مربوطه صرف‌نظر شده است.

در ادامه نتایج پاسخ جابجایی و دوران برای حالت  $\theta_V \neq 0^\circ$  آورده شده است. نتایج در حالت  $\theta_V = 30^\circ$  و مقادیر مختلف  $\theta_H$  یعنی  $\theta_H = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$  در شکل‌های ۱۵ و ۱۶ آورده شده است. همان‌طور که در شکل ۱۵ مشاهده می‌شود، اندرکنش سینماتیکی شالوده صلب، باعث کاهش پاسخ جابجایی افقی نسبت به میدان آزاد گردیده و همچنین با افزایش زاویه برخورد موج در صفحه پلان  $90^\circ \rightarrow 0^\circ$ ، مقدار جابجایی افقی کاهش یافته و در حالت  $\theta_H = 90^\circ$  به صفر می‌رسد. شکل ۱۶ نیز معرف پیچش شالوده بوده که با افزایش زاویه برخورد  $45^\circ \rightarrow 0^\circ$  مقدار پیچش ماکزیمم، حداکثر تا ۲۱ درصد کاهش یافته و با توجه به مربعی بودن شالوده و تقارن موجود، با افزایش بیشتر زاویه برخورد  $90^\circ \rightarrow 45^\circ$  مقدار پیچش مجدداً افزایش یافته و مقادیر پیچش  $90^\circ, 0^\circ$  و نیز  $60^\circ, 30^\circ$  بر هم منطبق می‌شوند.

در شکل ۱۷، مقادیر پاسخ جابجایی و پیچش برای  $\theta_V = 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$  و نیز مقادیر مختلف  $\theta_H$  نشان داده شده است. در این دیاگرام‌ها نیز روند کاملاً مشابه با  $\theta_V = 30^\circ$  مشاهده می‌شود. به‌طور خاص با افزایش  $\theta_V$  شیب روند نزولی پاسخ جابجایی افقی نسبت به میدان آزاد بیشتر شده است. همچنین در کلیه حالات، مقدار ماکزیمم پیچش ثابت و حدوداً برابر  $\theta_Z \times B = 1.2$  می‌باشد و کماکان مقادیر  $\theta_V = 45^\circ$  پوش پایین کلیه جواب‌ها می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش  $\theta_V$  مقدار ماکزیمم پیچش در فرکانس بی‌بعد کمتر اتفاق می‌افتد. شکل‌های ۱۸ و ۱۹ نیز جمع‌بندی نتایج برای  $\theta_H = 45^\circ$  و مقادیر مختلف  $\theta_V$  را نشان می‌دهد.

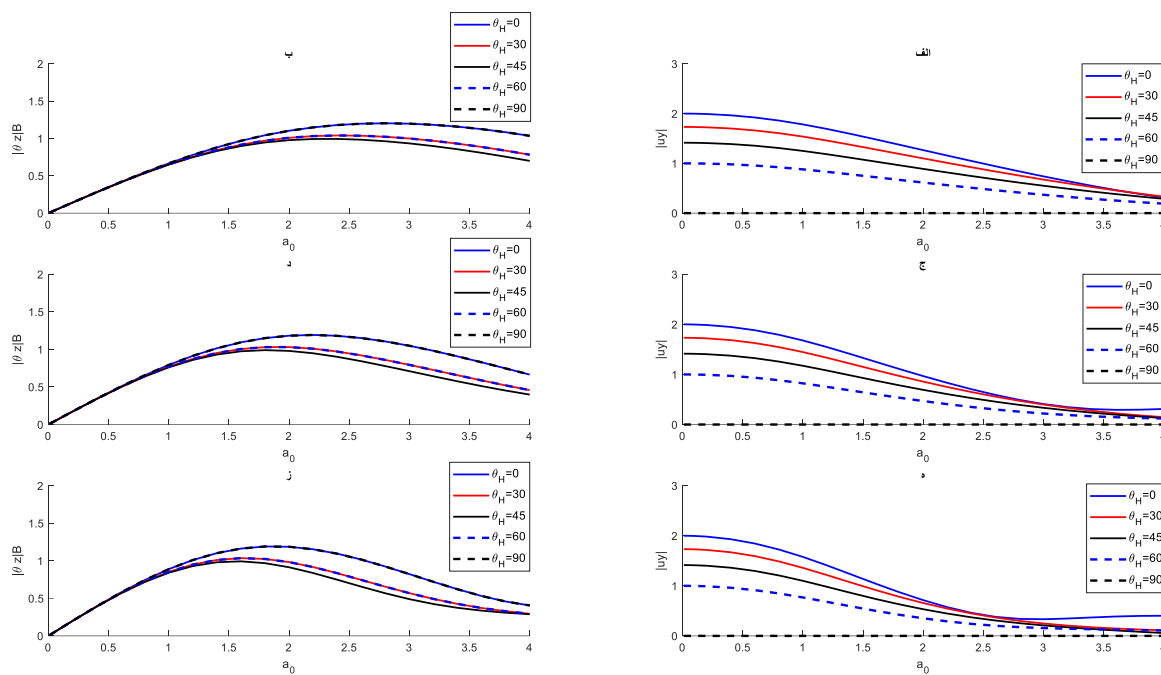


شکل ۱۳: جابجایی افقی در راستای محور  $y'$  برای  $\theta_v = 0^\circ$  و مقادیر مختلف  $\theta_H$       شکل ۱۴: جابجایی افقی در راستای محور  $y$  برای  $\theta_v = 0^\circ$  و مقادیر مختلف  $\theta_H$

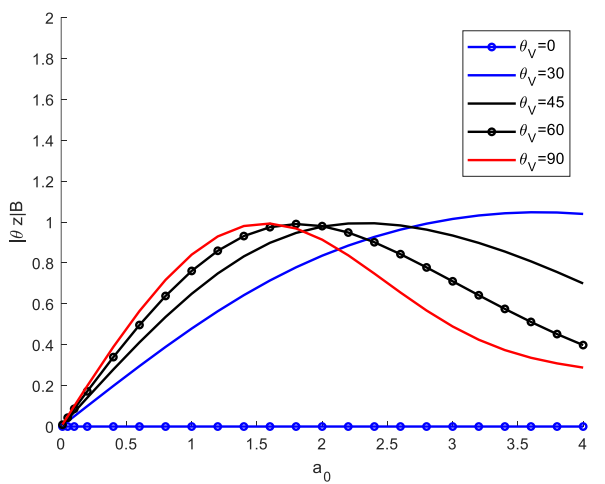


شکل ۱۵: پیچش حول محور  $z$  برای  $\theta_v = 30^\circ$

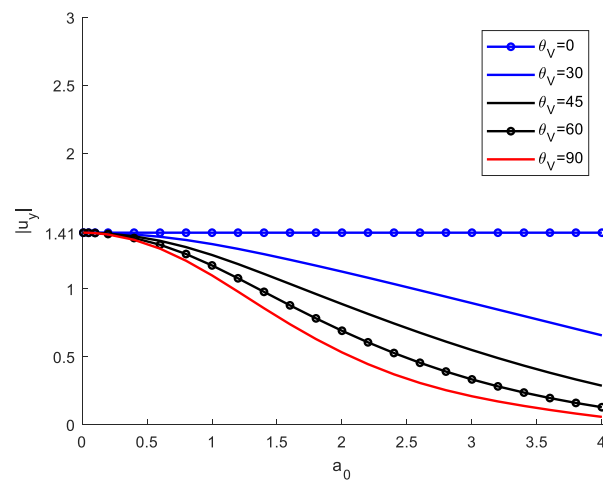
شکل ۱۶: جابجایی افقی در راستای محور  $y$  برای  $\theta_v = 30^\circ$



شکل ۱۷: جابجایی افقی در راستای محور  $y$  و پیچش حول محور  $z$  الف و ب:  $\theta_V = 45^\circ$ ، ج و د:  $\theta_V = 60^\circ$ ، ه و ز:  $\theta_V = 90^\circ$



شکل ۱۹: دوران پیچشی برای پی مربعی سطحی  $\theta_H = 45^\circ$



شکل ۱۸: جابجایی افقی برای پی مربعی سطحی  $\theta_H = 45^\circ$

## ۹- نتیجه گیری

در این تحقیق توابع امپدانس و پاسخ وردی به شالوده‌های مربعی سطحی تحت موج  $SH$  مورد بررسی قرار گرفت. صلبیت شالوده مربعی باعث اندرکنش سینماتیکی و تغییر در پاسخ جابجایی افقی و ایجاد پیچش در شالوده می‌گردد. میدان جابجایی ناشی از انتشار امواج  $SH$  با دو زاویه  $\theta_H$  و  $\theta_V$  بطور کامل مورد بررسی قرار گرفت و نتایج حاصل بصورت زیر خلاصه می‌گردد.

۱- در حالت  $\theta_V \neq 0^\circ$  پاسخ شالوده مربعی صلب با پاسخ میدان آزاد هماهنگ نبوده و اندرکنش سینماتیکی رخ می‌دهد. کلیه گراف‌ها برحسب فرکانس بی‌بعد می‌تواند بیان شود. پاسخ شالوده با افزایش زاویه  $\theta_V$ ، از پاسخ میدان آزاد فاصله گرفته و در فرکانس‌های بالاتر به صفر نزدیک می‌شود. این یعنی پاسخ شالوده برای زاویه ورودی صفر مقدار ثابت  $1/4$  دارد و برای زاویه ورودی  $\theta_V = 90^\circ$ ، با افزایش فرکانس به مقدار صفر نزدیک می‌شود.

۲- در حالت  $\theta_V$  ثابت و با افزایش  $\theta_H$  شاهد کاهش بیشتر جابجایی افقی نسبت به حرکت میدان آزاد هستیم. مقدار جابجایی افقی برای  $\theta_V = 0^\circ$  به صورت خطی کاهش پیدا می‌کند ولی با افزایش زاویه  $\theta_V$  تغییرات از حالت خطی خارج شده و شاهد نزول بیشتری در فرکانس‌های بالاتر هستیم. جابجایی افقی برای  $\theta_H = 90^\circ$  همواره صفر می‌باشد. همچنین پوش ماکزیمم پیچش مربوط به دیاگرام  $\theta_H = 0^\circ$  و پوش مینیمم پیچش مربوط به دیاگرام  $\theta_H = 45^\circ$  می‌باشد.

۳- از نقطه نظر طراحی، ماکزیمم پیچش ایجاد شده در اثر انتشار موج  $SH$  با دامنه واحد و در زوایای مورد بررسی و آنالیز حساسیت صورت گرفته، با رابطه  $\theta_Z \times B \approx 1.2$  قابل محاسبه می‌باشد. به عبارت دیگر، پیچش ماکزیمم ایجاد شده با بعد شالوده رابطه معکوس دارد. در حالت  $\theta_H$  ثابت و با افزایش  $\theta_V$ ، پاسخ جابجایی افقی کاهش یافته و همچنین ماکزیمم پاسخ پیچش در فرکانس بی‌بعد کمتر رخ می‌دهد.

## مراجع

- [1] Luco, J. E. and Westmann, R. A. (1972). *Dynamic Response of a Rigid Footing Bonded to an Elastic Half Space*. Journal of Applied Mechanics, ASME, 39(E2), pages (527-534)
- [2] Oien, M.A. (1971). *Steady Motion of a Rigid Strip Bonded to an Elastic Half Space*. Journal of Applied Mechanics, ASME, 38(E2), pages (328-334)
- [3] Mita, A. and Luco, J. E. (1989). *Impedance Functions and Input Motions for Embedded Square Foundations*. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, 115, pages (491-503)
- [4] Luco, J. E. and Mita, A. (1987). *Response of a Circular Foundation on a Uniform Half-Space to Elastic Wave*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 15(1), pages (105-118)
- [5] Wolf JP, Deeks AJ. (2004). *Cones to model foundation vibrations: incompressible soil and axi-symmetric embedment of arbitrary shape*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 24(12), pages (963-978)
- [6] Kobori, T. and Minai, R. and Suzuki, T. and Kusakabe, K. (1968). *Dynamic ground compliance of rectangular foundation on a semi-infinite viscoelastic medium*. Annual Report, Disaster Prevention Research Institute of Kyoto University, No. 11A, pages (349-367)
- [7] Qian, J. and Beskos, D.E. (1996). *Harmonic wave response of two 3-D rigid surface foundations*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 15, pages (95-110)
- [8] Messiod, S., Sbartai, B., & Dias, D. (2016). *Seismic response of a rigid foundation embedded in a visco-elastic soil by taking into account the soil-foundation interaction*. Structural Engineering and Mechanics, 58 (5), pages (887-903).
- [9] Jahankhah, H. and Taheri, M. (2022). *Incomplete soil-foundation contact and foundation input motion: From numerical analysis to field evidence*. 51(2), pages (418-437)
- [10] Zeolla, E. and Silva, F. and Sica, S. (2023). *A Simplified Approach to Account for Through-Soil Interaction between Two Adjacent Shallow Foundations*. Bulletin of Earthquake and Engineering, 21, pages (2503-2532)

- [11] Maleki, J. and Jafarzadeh, F. (2023). *Model Tests on Determining the Effect of Various Geometrical Aspects on Horizontal Impedance Function of Surface Footings*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, DOI: 10.24200/SCI.2023.59744.6403. (In press)
- [12] Belkhir, H., Sbartai, B., Filali, K., & Messiou, S. (2022). *Linear equivalent seismic response of a surface foundation excited by an SH harmonic wave*. European Journal of Environmental and Civil Engineering, pages(1-18)
- [13] Trifunac, M. D. (2008). *Buildings as sources of rotational waves*. In Physics of Asymmetric Continuum: Extreme and Fracture Processes: Earthquake Rotation and Soliton Waves Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, pages (49-66)
- [14] Gičev, V. and Trifunac, MD. and Orbović, N. (2015). Translation, Torsion, and Wave Excitation of a Building during Soil-Structure Interaction Excited by an Earthquake SH Pulse. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, VOL. 77, pages (391-401)
- [15] Zhou FY, Xiang WL, Wang HD, Zhu H, Zhou Z (2020). *Torsional and rocking response of the foundation induced by obliquely spatial incident S waves*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 130, 105977
- [16] Tadesse, Z. L., Padavala, H. K., & Koteswara, V. R. (2022). *Seismic response assessment of building structures with underground stories: a state-of-the-art review*. Innovative Infrastructure Solutions, 7(6), 336.
- [17] Sotiriadis, D., Klimis, N., Margaritis, B., & Sextos, A. (2020). *Analytical expressions relating free-field and foundation ground motions in buildings with basement, considering soil-structure interaction*. Engineering Structures, 216, 110757.
- [18] Conti, R., Morigi, M., & Viggiani, G. M. (2017). *Filtering effect induced by rigid massless embedded foundations*. Bulletin of Earthquake Engineering, 15, pages (1019-1035)
- [19] Cavalieri, F., Correia, A. A., & Pinho, R. (2021). *On the applicability of transfer function models for SSI embedment effects*. Infrastructures, 6(10), 137.
- [20] Dominguez, J. (1993). *Boundary Elements in Dynamics*. Computational Mechanics Publications, Southampton and Boston.
- [21] Lachat, J.C. (1975). *A Further Development of the Boundary Integral Technique for Elastostatics*. Ph. D. Thesis. University of Southampton, U.K.
- [22] Mang, H. and Li, H. and Han, G. (1985). *A New Method for Evaluating Singular Integrals in Stress Analysis of Solids by the Direct BEM*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 21(11), pages (2071-2098)
- [23] MATLAB Software. (R2021b)
- [24] Pak, R. Y. S and Guzina, B. B. (1998). *Seismic Soil-Structure Interaction Analysis by Direct Boundary Element Methods*. International Journal of Solids and Structures, 25, pages (4743-4766)
- [25] Wong, H. L. and Luco, J. E. (1985). *Tables of Impedance Functions for square Foundations on Layered Media*. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 3, pages (53-70)
- [26] Dominguez, J. (1978). *Response of Embedded Foundations to Travelling Waves*. Massachusetts Institute of Technology Department of Civil Engineering Constructed Facilities Division Cambridge
- [27] Wong, H. L. and Luco, J. E. (1978). *Dynamic Response of Rectangular Foundations to Obliquely Incident Seismic Waves*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 6, pages (3-16)