

Damage Identification of Structures Based on Frequency Response Function (FRF) By Bayesian Method

Babak Taghavi¹, Fariba Shadan^{2*}, Masoud Mahmoodabadi³ and Ahmad Fakharian⁴

1- Ph.D. Candidate, University of Qom, Faculty of Technology and Engineering, Qom, Iran

2- Assistant Professor, Mazandaran University of Science and Technology, Faculty of Technology and Engineering, Mazandaran, Iran

3- Assistant Professor, University of Qom, Faculty of Technology and Engineering, Qom, Iran,

4- Professor, Department of Electrical Engineering, Qazvin Branch, Islamic Azad University, Qazvin, Iran

ABSTRACT

One of the important applications of modal analysis is model updating finite element method by using frequency response functions (FRF) in order to damage detection in the structures. The method is a sensitivity-based model updating approach which utilizes a pseudo-linear sensitivity equation and is applied to identify the location and amount of the changes in structural parameters. The method can be improved against the adverse effects of incomplete measurement, measurement errors and uncertainties such as modelling errors and noise effects. This paper tries to upgrade to solve the problem in a more suitable interval of the response with the Bayesian approach and repeated testing of multiple data resulting from the model updating method with frequency response functions. In fact, although statistical approach can bring a logical result in some problems, but in engineering problems, according to the state of the problem and the answer of repeated experiments (or in non-laboratory problems, according to Monte Carlo repetitions), it can be added conditions to the problem in which he achieved a better estimation of the results by using the Bayesian statistical method. The experimental setup consists of a free-free aluminium beam, where changes are introduced by reducing the stiffness at certain parts of the beam. The results indicate that the location and the size of different level of changes in the structure can be properly identified by the method.

ARTICLE INFO

Receive Date: 15 May 2023

Revise Date: 27 October 2023

Accept Date: 18 November 2023

Keywords:

Damage Identification
Frequency Response Function (FRF)

Incomplete Measurement
Uncertainty principle
Bayesian Estimator

All rights reserved to Iranian Society of Structural Engineering.

doi: <https://doi.org/10.22065/jsce.2023.395641.3108>

*Corresponding author: Fariba Shadan.

Email address: fariba.shadan@mazust.ac.ir

شناسایی خرابی در سازه بر پایه تابع پاسخ فرکانسی به کمک روش آماری بیزین

بابک تقوی^۱، فریبا شادان^{۲*}، مسعود محمودآبادی^۳، احمد فخاریان^۴

۱- دانشجوی دکتری سازه، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه قم، قم، ایران

۲- استادیار، دانشکده مهندسی شیمی و صنایع، دانشگاه علم و فناوری مازندران، مازندران، ایران

۳- استادیار، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه قم، قم، ایران

۴- استاد، گروه مهندسی برق، واحد قزوین، دانشگاه آزاد اسلامی، قزوین، ایران

چکیده

یکی از کاربردهای مهم آنالیز مودال روش بروزرسانی مدل المان محدود با استفاده از توابع پاسخ فرکانسی به منظور تشخیص خرابی می باشد. رویکرد اصلی بروز رسانی مدل مبتنی بر حساسیت است که در مقاله حاضر از یک معادله حساسیت شبه خطی استفاده شده و هدف آن شناسایی مکان و میزان تغییرات در پارامترهای سازه ای می باشد. این روش در برابر اثرات نامطلوبی چون اندازه گیری ناقص، خطاهای اندازه گیری و عدم قطعیت هایی مانند خطاهای مدل سازی و اثرات نویز نیاز به بهبود دارد. این مقاله سعی دارد با رویکرد بیزین و تکرار آزمایش داده های متعدد ناشی از توابع پاسخ فرکانسی روند حل مساله را در یک بازه مناسبتر از پاسخ، بروزرسانی نماید. در واقع رویکرد آماری فراوانی اگرچه می تواند در برخی از مسائل یک نتیجه منطقی به همراه داشته باشد، ولی در مسائل مهندسی با توجه به وضعیت مساله و پاسخ آزمایشهای تکرار شده (و یا در مسائل غیر آزمایشگاهی با توجه به تکرارهای مونت کارلو) می توان شرایطی را به مساله اضافه نمود که در این صورت با استفاده از روش آماری بیزین به تخمین بهتری از نتایج دست یافت. به منظور صحت سنجی روش یک تیر آلومینیومی دو سر آزاد که در آن تغییرات با کاهش سختی و اضافه نمودن جرم در قسمت های خاصی از تیر ایجاد شده است مورد ارزیابی قرار گرفته است. نتایج نشان می دهد که مکان و اندازه سطوح مختلف تغییرات در سازه را می توان به درستی با روش شناسایی کرد.

کلمات کلیدی: شناسایی خرابی - تابع پاسخ فرکانسی - عدم اندازه گیری کامل - عدم قطعیت - روش بیزین

| شناسه دیجیتال: | | سابقه مقاله: | | | | |
|----------------|---|--------------|----------------------------|------------|-----------------|------------|
| doi: | https://doi.org/10.22065/jsce.2023.395641.3108 | چاپ | انتشار آنلاین | پذیرش | بازنگری | دریافت |
| | 10.22065/jsce.2023.395641.3108 | ۱۴۰۲/۰۵/۳۱ | ۱۴۰۲/۰۸/۲۷ | ۱۴۰۲/۰۸/۲۷ | ۱۴۰۲/۰۸/۰۵ | ۱۴۰۲/۰۲/۲۵ |
| | | | فریبا شادان | | *نویسنده مسئول: | |
| | | | fariba.shadan@mazust.ac.ir | | پست الکترونیکی: | |

۱- مقدمه

بطور کلی روش‌های تشخیص خرابی مبتنی بر پاسخ فرکانسی داده‌های زیادی از سازه را در اختیار قرار می‌دهند. این روش‌ها برخلاف روش‌های برپایه داده‌های مودال که تنها از اطلاعات اطراف فرکانس‌های طبیعی استفاده می‌کنند، داده‌ها را در محدوده وسیعی از فرکانس‌های تحریک مورد استفاده قرار می‌دهند. از طرفی می‌دانیم اندازه‌گیری در تمام درجات آزادی امکانپذیر نمی‌باشد، بفرض درجات آزادی محدود و اندازه‌گیری در تمام درجات آزادی، در نهایت برای تعیین محل دقیق خرابی بایستی المان‌ها را ریزتر نمود، در نتیجه اینکار درجات آزادی افزایش می‌یابد که امکان اندازه‌گیری در تمام آن‌ها وجود ندارد. همچنین عدم قطعیت علاوه بر داده‌ها در مدل المان محدود نیز وجود دارد که دستیابی به پاسخ را پیچیده تر می‌کند. در واقع مشکل اصلی روش‌های تشخیص خرابی بر پایه مدل حساسیت بالا به عدم اندازه‌گیری کامل داده‌های درجات آزادی و عدم قطعیت‌ها می‌باشد. از طرف دیگر می‌دانیم روش‌های پایش سلامت کلی سازه‌ها به دو دسته کلی احتمالاتی (آماري) و قطعی تقسیم می‌شوند. در روش احتمالاتی عدم قطعیت، در برآورد داده‌ها در نظر گرفته می‌شود که در نتیجه آن یک تابع توزیع چگالی برای هر پارامتر بدست می‌آید. این تابع شامل یک میانگین (به عنوان بیشترین احتمال رخداد) و یک انحراف معیار (به عنوان تابع خطا) است. هدف این مقاله ارائه یک چارچوب آماری بیزین با استفاده از داده‌های دینامیکی برای شناسایی خرابی در سازه می‌باشد. این مقاله سعی دارد مشکل نقص داده‌ها (عدم اندازه‌گیری کامل) را به کمک تکرار آزمایش و استفاده از روش بیزین تقلیل دهد.

محققین برای رفع مشکل اندازه‌گیری و عدم قطعیت‌ها روش‌هایی را پیشنهاد نموده‌اند. بر این اساس در سال ۲۰۰۹ اسفندیاری و همکاران [۱] روشی برای بروزرسانی سازی مدل اجزاء محدود با استفاده از تابع پاسخ فرکانسی و فرکانس‌های طبیعی سازه ارائه نمودند. در این روش با استفاده از معادلات حساسیت، تغییرات تابع پاسخ فرکانسی به تغییرات مشخصات سختی، جرم و میرایی مرتبط گردید. آن‌ها نقص در داده‌ها (عدم اندازه‌گیری) را که یکی از چالش‌های اساسی روش‌های تشخیص خرابی می‌باشد، با یک معادله حساسیت شبه دقیق از تابع پاسخ فرکانسی جبران نمودند. در سال ۲۰۱۰ اسفندیاری و همکاران رابطه تقریبی ارائه شده را بهبود بخشیدند. آنها شکل مود سازه آسیب دیده را به روش تقریب شکل مود برآورد نموده و در فرم تجزیه شده تابع پاسخ فرکانسی به کار بردند [۲]. در سال ۲۰۱۲، صنایعی و همکاران روش پیشنهادی [۱] و [۲] را بر روی یک قاب صحت سنجی آزمایشگاهی نمودند. آن‌ها محدوده‌هایی از فرکانس تحریک، که تابع پاسخ فرکانسی دارای حساسیت بالاتر به آسیب و حاوی نویز کمتری هستند را انتخاب نمودند. نتایج شناسایی به دست آمده از سختی و جرم قاب رضایت بخش بود. استفاده از روش فوق‌الذکر به عنوان یک روش مناسب تشخیص خرابی در حالت اندازه‌گیری ناکامل با توجه به قدرت روش نسبت روش‌هایی چون گویان^۱، سرپ^۲ و هیبرید^۳ در تحقیقات دیگر ادامه یافت. شادان و همکاران [۳] در سال ۲۰۱۵ روش ابتکاری عنوان شده را در فرم تجزیه شده تابع پاسخ فرکانسی و با استفاده از داده‌های دینامیکی استفاده نمودند. آنها قدرت تشخیص روش را در نسبت درجات آزادی اندازه‌گیری شده به کل درجات آزادی افزایش داده، تشخیص خرابی را روی یک خرپای ۴۰ عضوی انجام دادند. در سال ۲۰۱۸ شادان و همکاران [۴] جهت بالابردن قدرت شناسایی در حالت اندازه‌گیری ناکامل، با استفاده از داده‌های کرنش با ابتکار در روند بروز رسانی مدل و انتخاب فرکانس‌های بار ورودی به روشی ابتکاری، نتایج تشخیص خرابی بر روی قاب یک طبقه بهبود بخشیدند. شادان و حسنی (۲۰۲۱) [۵] نتایج حاصل از روش [۴] را جهت بررسی قدرت تشخیص خرابی بر روی دو سازه با درجات آزادی زیاد و شرایط موده‌های نزدیک^۴ بررسی نمودند که نتایج مطلوبی حاصل گردید. شجاعی منصورآبادی و اسفندیاری ۲۰۱۸ [۶]، با استفاده از تبدیل موجک داده‌های حاصل از پاسخ سازه، به کمک تابع پاسخ فرکانسی در حالت اندازه‌گیری ناقص، تشخیص خرابی را در خرپای ۲۵ عضوی و یک قاب سه بعدی از نوع سازه دریایی^۵ با ۴۸ المان بررسی نمودند. اسفندیاری، نبیان و همکاران [۷]، با

¹ guyan

² SEREP

³ hybrid

⁴ Closely-Spaced

⁵ jacket structure

استفاده از تحلیل مولفه های اصلی^۶ به عنوان یک روش آماری مناسب برای شناسایی الگو در یک مجموعه از داده ها در حالت اندازه گیری ناقص به تشخیص خرابی پرداختند. این روش مولفه های اصلی مساله را شناسایی نموده موجب می شود تا به جای اینکه تمامی ویژگی ها را مورد بررسی قرار دهیم، یک سری اطلاعات با ارزش بیشتر مورد تحلیل قرار گیرد. در واقع یکی از کارکردهای مهم تحلیل مولفه های اصلی نقص در داده ها می باشد. رهایی و همکاران در سال ۲۰۲۰ [۸] برای شناسایی محل و شدت آسیب، از حل معادلات حساسیت مولفه های اصلی تابع پاسخ فرکانسی^۷ استفاده نمودند. آنها با استفاده از این معادلات حساسیت و کمینه سازی با روش حداقل مربعات، مدل اجزای محدود سازه مورد نظر را بهنگام نموده و بدین ترتیب محل و شدت خرابی را به صورت همزمان بدست آوردند. هم چنین میزان حساسیت روش مذکور به خطای اندازه گیری را محاسبه نمودند. آنها برای تایید عملکرد روش پیشنهادی خود، علاوه بر استفاده از مدل عددی یک خرپا و یک قاب، از داده های آزمایشگاهی یک تیر نیز استفاده کردند که نتایج آن حاکی از عملکرد خوب روش پیشنهادی بود.

امروزه از روش آماری بیزین در علوم مختلف مهندسی مانند قابلیت اطمینان و پایش سلامت سازه ها استفاده می گردد. هدف اصلی استفاده از روش بیزین در حوزه های ذکر شده کاهش و کمی سازی تأثیر عدم قطعیت های اندازه گیری و مدل سازی بر نتایج می باشد. سون و همکاران در سال ۱۹۹۷ اولین نفراتی بودند که یک چهارچوب بیزین برای عیب یابی یک قاب ساده پیشنهاد کردند که در آن خطای شبیه سازی و وجود خطاهای اندازه گیری را در نظر گرفتند. آنها از روش بیزین برای بروزسانی و تعیین آسیب قاب ساده چندطبقه استفاده کردند [۹]. یک در سال ۱۹۹۸ روش بیزین برای بروزسانی مدل استفاده کرد. او در این روش عدم قطعیت های ناشی از مدل سازی ریاضی و خطاهای اندازه گیری را در نظر گرفت و کاربرد روش ارائه شده را با یک مثال عددی از یک قاب ساده دوبعدی اعتبارسنجی کرد [۱۰]. سنگ و همکاران در سال ۲۰۱۹ یک مدل بیزین سلسله مراتبی برای تعیین پارامترهای مودال (شکل مود و فرکانس طبیعی) یک ساختمان ۱۰ طبقه ارائه نمودند [۱۱]. فتحی و همکاران در سال ۲۰۲۰ با استفاده از الگوی بیزین جدید نسبت به بروزسانی مدل یک سکوی ثابت دریایی با ۴۸ المان قابی شکل اقدام نمودند. بدین جهت آنها از داده های تابع پاسخ فرکانسی ناقص اندازه گیری شده استفاده نمودند. الگوی بیزین آنها به یک تابع هدف بر مبنای توابع پاسخ دینامیکی اندازه گیری شده و مدل اجزاء محدود می رسید که نهایتاً با کمینه سازی محل و شدت خرابی را مشخص می نمود [۱۲]. بنیان و همکاران در سال ۲۰۲۱ یک چارچوب استنباط بیزی بازگشتی تطبیقی برای تخمین مشترک پارامترهای مدل و ویژگی های آماری خطای پیش بینی که شامل اثرات خطای مدل سازی و نویز اندازه گیری بود، ارائه نمودند. خطای پیش بینی معمولاً به عنوان فرآیند نویز سفید گاوسی در چارچوب به روزرسانی مدل بیزی مدل سازی می شود. آنها، خطای پیش بینی را بصورت یک فرآیند گاوسی غیر ثابت با میانگین بردار ناشناخته و متغیر زمانی و ماتریس کوواریانس تعریف نمودند که باید تخمین زده می شد. با این کار اثرات عدم قطعیت های مدل متغیر زمانی در فرآیند بروزسانی مدل تشریح گردید. روش پیشنهادی با استفاده از یک قاب خمشی فولادی غیرخطی ۳ طبقه که تحت بارگذاری زلزله قرار گرفته بود، مورد آزمایش قرار گرفت. مقایسه با نتایج به دست آمده از روش به روزرسانی مدل بازگشتی بیزی کلاسیک، کارآمدی رویکرد پیشنهادی را در تخمین آمار خطای پیش بینی و پارامترهای مدل نشان می داد [۱۳].

۲- روش بروزسانی مدل

در این مقاله، روش به روزرسانی مدل مبتنی بر FRF ارائه شده در [۴] استفاده شده است که مختصراً به شرح زیر می باشد. تابع پاسخ فرکانسی (H) یک سازه N درجه آزادی با تغییرات ماتریس های سختی، جرم و میرایی (K، M و C، در فرکانس تحریک ω، به صورت زیر بیان می شود:

$$H_d(\omega) = (-\omega^2(M + \delta M) + j\omega(C + \delta C) + K + \delta K)^{-1} \quad (1)$$

⁶ permeated component analysis (PCA)

⁷ Frequency Response Function (FRF)

تغییرات در پاسخ دامنه فرکانس ساختار به صورت زیر حاصل می شود:

$$\delta X(\omega) = -H_d(\omega)(-\omega^2 \delta M + j\omega \delta C + \delta K)X(\omega) \quad (2)$$

با توجه به ایده شرح داده شده در [۴] تابع پاسخ فرکانسی سازه واقعی با استفاده از تابع پاسخ فرکانسی مدل تحلیلی و مقدار جابجایی در اطراف هر رزونانس تقریب زده می شود. بدین منظور ضروری است فرکانسهای طبیعی سازه با دقت بالا محاسبه گردد که به جهت می توان از [۱۵] استفاده نمود. فرکانسهای طبیعی سازه اطراف هر رزونانس، جهت تعیین اختلاف پارامترهای سازه و مدل در روند بروزرسانی استفاده می شود. لذا در اطراف هر رزونانس، تقریب شرح داده شده به فرم زیر فرمول بندی می گردد:

$$H_d(\omega) \cong H(\omega + \delta \bar{\omega}_n), \quad n=1, \dots, i \quad (3)$$

در رابطه فوق:

$$\delta \bar{\omega}_n \cong \delta \Omega_{id} - \delta \Omega_{ii}, \quad n=1, \dots, i \quad (4)$$

در روابط بالا Ω_{id} و Ω_{ii} به ترتیب فرکانس طبیعی بدست آمده از مدل تحلیلی و اندازه گیری شده و $\delta \bar{\omega}_n$ اختلاف آن ها هستند. n تعداد فرکانس های طبیعی اندازه گیری شده از سازه را نشان می دهد.

رابطه (۳) برای محدوده فرکانس تحریک مورد نظر در بروزرسانی $\bar{\omega}$ ، به فرم زیر بسط داده می شود:

$$H_d(\bar{\omega}) \cong \bigcup_{n=1}^i H(\bar{\omega} + \delta \bar{\omega}_n) = \bigcup_{n=1}^i -(\bar{\omega} + \delta \bar{\omega}_n)^2 (M + \delta M) + j(\bar{\omega} + \delta \bar{\omega}_n)(C + \delta C) + K + \delta K)^{-1} \quad (5)$$

با نشان دادن ماتریس های سختی و جرم به عنوان پارامتر سازه، معادله (۲) به صورت زیر خواهد بود:

$$\delta X(\omega) = \sum_{i=1}^{ns} \left\{ -H_d(\omega) \left(\frac{\partial K}{\partial P_i^S} \right) X(\omega) \right\} \partial P_i^S + \sum_{i=1}^{nm} \left\{ -H_d(\omega) \left(-\omega^2 \frac{\partial M}{\partial P_i^M} \right) X(\omega) \right\} \partial P_i^M \quad (6)$$

در رابطه فوق ns و nm به ترتیب تعداد پارامترهای بروزرسانی شده سختی و جرم می باشد؛ ∂P_i^S و ∂P_i^M به ترتیب نماینده تغییرات پارامتر i ام سختی و جرم می باشد، که مطابق با [۱] (به جهت سهولت در محاسبه نتایج) از ماتریس سختی و جرم به فرم تجزیه زیر حاصل می شوند.

$$K = A^T P^S A \quad (7)$$

$$M = A^T P^M A$$

فرم ماتریسی معادله فوق به صورت زیر خواهد بود:

$$\delta X(\omega) = \begin{bmatrix} S^S & S^M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta P^S \\ \delta P^M \end{bmatrix} = S(\omega) \delta P \quad (8)$$

۳- حل مساله با استفاده از روش بیزین

مساله حاضر با روش عنوان شده فوق مستخرج از ادبیات فنی مطرح شده در [۳]، [۴] و [۵] بدون رویکرد بیزین و بصورت آماری کلاسیک در [۱۴] تحلیل گردیده است. ایده اصلی این مقاله مواجهه با عدم قطعیت های موجود ناشی از، میرایی پنهان، شرایط تکیه گاهی، مدل اجزاء محدود ساخته شده، عدم یکنواختی خواص سازه در مدل آزمایشگاهی، خطاهای اندازه گیری و وجود نویز با استفاده از رویکرد بیزین به نتایج آزمایش می باشد. لازم به ذکر است در بسیاری از مواقع خصوصا در حل مسائل غیر آزمایشگاهی و صرفا با عدم قطعیت های ناشی از اعمال نویز سفید فرضی روش حل قطعی^۸ نتایج خوبی دارد ولی خصوصا در شرایط آزمایشگاهی تعیین مناسب انواع توزیع و ویژگی های آماری متغیرهای تصادفی قابلیت اطمینان، در بهبود نتایج روش شناسایی آسیب تاثیر بالایی دارد. در واقع با یک نگاه آماری کلاسیک، عدم قطعیت های موجود در پایش سلامت سازه به عنوان متغیرهای غیرتصادفی در نظر گرفته می شوند در حالی که در روش بیزین بصورت متغیرهای تصادفی با توزیع خاص در نظر گرفته می شوند.

قضیه [۱۶]: اگر بردارهای \underline{X} (دارای ابعاد $k*1$) و \underline{y} (دارای ابعاد $l*1$) دارای توزیع مشترکا گوسی باشند، با بردار میانگین $[E(x)^T \quad E(y)^T]$ و ماتریس کوواریانس به شرح زیر:

$$C = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} \\ C_{yx} & C_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k*k & k*l \\ l*k & l*l \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$p(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k+l}{2}} \det(C)} \exp \left[-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} x - E(x) \\ y - E(y) \end{bmatrix}^T C^{-1} \begin{bmatrix} x - E(x) \\ y - E(y) \end{bmatrix} \right]$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$E(y|x) = E(y) + C_{yx} C_{xx}^{-1} (x - E(x)) \quad (10)$$

$$C_{y|x} = C_{yy} - C_{yx} C_{xx}^{-1} C_{xy}$$

حال مساله تشخیص خرابی را به فرم خطی $\underline{x} = H\underline{\theta} + \underline{\omega}$ را در نظر می گیریم، در این صورت با استفاده از قضیه فوق و با شرط مستقل و مشترکا گوسی بودن $\underline{\theta}$ و $\underline{\omega}$ ، پارامتر تخمین به فرم زیر قابل محاسبه می باشد:

$$\hat{\underline{\theta}} = E \{ \underline{\theta} | \underline{x} \} = \underline{\mu}_\theta + C_\theta H^T (H C_\theta H^T + C_\omega)^{-1} (x - H \underline{\mu}_\theta) \quad (11)$$

$$C_{\theta|x} = C_\theta - C_\theta H^T (H C_\theta H^T + C_\omega)^{-1} H C_\theta$$

در روابط فوق:

⁸ deterministic

\underline{x} بردار مشاهدات (نیرو و شتاب ثبت شده)، با ابعاد $N \times 1$ (تعداد مشاهدات)

$\underline{\theta}$ بردار پارامترهای مجهول با توزیع گوسی $N \sim (\mu_{\theta}, C_{\theta})$ و دارای ابعاد $P \times 1$

ω ناشی از عدم قطعیت های ذکر شده با توزیع گوسی $N \sim (0, C_{\omega})$ و مستقل از θ دارای ابعاد $N \times 1$

H ماتریس معلوم انتقال (ناشی از روابط ذکر شده در بخش برورسانی مدل) با ابعاد $N \times P$

$\hat{\underline{\theta}}$ بردار تخمین پارامترها با ابعاد $P \times 1$

جهت بیان واضح تر مساله به منظور تخمین پارامترهای مساله، با استفاده از لم معکوس ماتریس

$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}$ بردار پارامتر تخمین به شکل زیر قابل بازنویسی است:

$$\hat{\underline{\theta}} = \mu_{\theta} + \frac{\sigma_{\theta}^2}{\sigma_{\theta}^2 + \frac{\sigma_x^2}{N}} (\bar{x} - \mu_{\theta}) \quad (12)$$

در رابطه فوق:

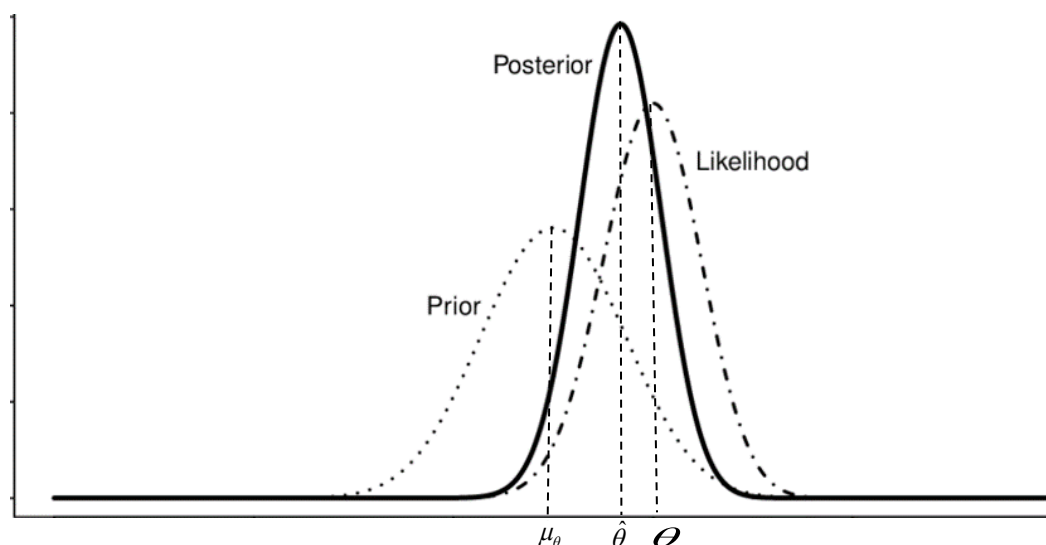
σ_{θ}^2 مقدار واریانس تخمین (تابع پیشین فرضی)

σ_x^2 مقدار واریانس مشاهدات

N تعداد مشاهدات

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (\text{متوسط مشاهدات})$$

در شکل (۱) کارکرد روش فوق تشریح گردیده است. در شکل زیر Likelihood روش (MLE) استفاده شده در [۱۴] با توجه به فراوانی مشاهدات، Posterior تابع پسین حاصل از تئوری بیز و Prior تابع پیشین می باشد.



شکل ۱: شماتیکی از نحوه عملکرد روش بی‌زین

به بیان ساده بر اساس روابطی که در این بخش ارائه گردید، همانطور که مشاهده می‌گردد نتایج حاصل از تکرار داده‌های آزمایشگاهی بصورت یک تابع پیشین در پاسخ تاثیر گذاشته و آن را بصورت تابع پسین بهبود می‌بخشد. در ادامه با این رویکرد نتایج حاصل از شناسایی خرابی در دو حالت کاهش سختی بررسی گردید که در بخش ۷ ارائه می‌گردد.

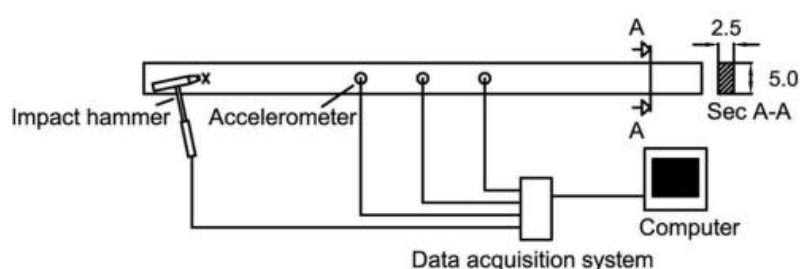
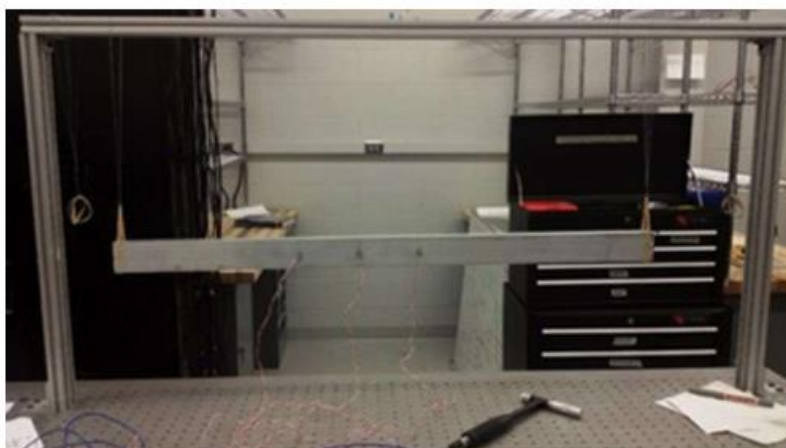
۴- مدل آزمایشگاهی

به منظور بررسی نتایج روش از یک مدل آزمایشگاهی که قبلاً در [۱۴] مورد آزمایش قرار گرفته است استفاده شده است. سازه مورد مطالعه یک تیر آلومینیوم دو سر آزاد با مقطع مستطیلی می‌باشد. مشخصات تیر به دست آمده از سازنده در جدول ۱ آورده شده است. رفتار تیر به صورت دو بعدی در صفحه اعمال نیرو فرض شده است. برای دستیابی به شرایط مرزی آزاد، تیر به صورت افقی در انتهای آن توسط دو نوار لاستیکی نرم که به نخ‌هایی آویزان از یک قاب متصل شده‌اند و بصورت افقی معلق مانده است. مشخصات مدل در جدول زیر ارائه شده است.

جدول ۱: مشخصات مصالح تیر مورد آزمایش

| ماده | چگالی (kg/m^3) | مدول یانگ (GPa) | طول (cm) | عرض (cm) | ضخامت (cm) |
|----------------|---------------------------|-----------------|----------|----------|------------|
| آلومینیوم ۶۰۶۱ | ۲۷۰۰ | ۶۹ | ۹۰ | ۵ | ۲/۵ |

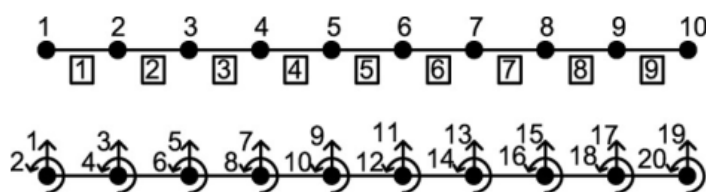
تیر با استفاده از چکش ضربه ای PCB Piezotronics مدل 086C01 تحریک می‌شود و شتاب‌ها با استفاده از شتاب‌سنج PCB Piezotronics مدل 352C67 در ۳ نقطه اندازه‌گیری می‌شود. به منظور تحریک محدوده فرکانس وسیع‌تر، از نوک سخت چکش ضربه ای استفاده شد. اندازه‌گیری‌ها در محدوده فرکانس [۰ تا ۲۵۰۰ هرتز] با نرخ نمونه‌برداری ۹۶۰۰ هرتز انجام می‌شود. ضربه در هر نقطه تحریک ۲۰ بار تکرار می‌شود.



شکل ۲: روش آزمایش

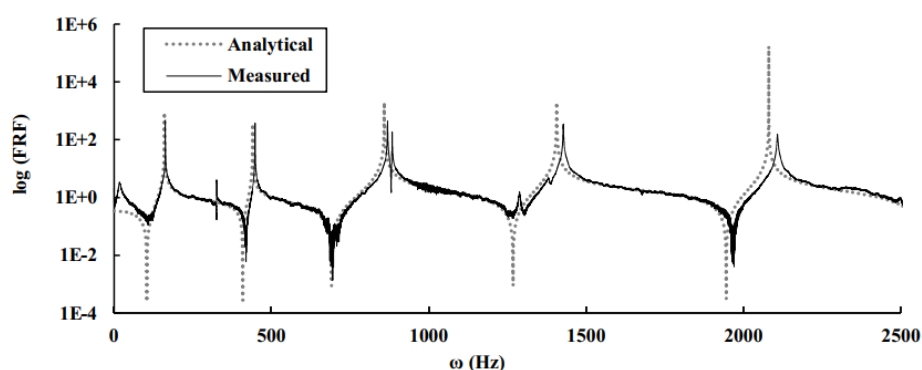
۵- مدل اجزاء محدود

مدل اجزاء محدود تیر دو بعدی، شامل ۱۰ گره و ۹ المان با طول های برابر ۰.۱ متر می باشد. خواص مواد و هندسه تیر با مدل آزمایشگاهی یکسان در نظر گرفته می شود. از آنجایی که آلومینیوم میرایی کمی دارد و سایر اطلاعات میرایی نیز ناکافی می باشد، میرایی مدل سازی نمی شود. شکل (۲) مدل المان محدود و درجات آزادی را نشان می دهد. لازم به ذکر است آزمایش ها در شرایط دو سر آزاد انجام می شوند.



شکل ۳: مدل اجزاء محدود تیر شامل المان ها، گره ها و درجات آزادی

همانطور که در شکل ۴ مشاهده می گردد، مدل اجزاء محدود تیر دارای دقت مناسبی در مشخصات دینامیکی مدل آزمایشگاهی می باشد. با توجه به اینکه مدل اجزاء محدود تیر دو بعدی در نظر گرفته شده است، می توان رزونانس های موجود در فرکانس های ۳۲۶، ۸۸۴ و ۱۲۸۷ هرتز را نیز نادیده گرفت. علت این است که این رزونانس ها مربوط به مودهای خمشی حول محور قوی و پیچشی تیر می باشند که در مدل دو بعدی دیده نمی شوند.



شکل ۴: تابع پاسخ فرکانسی اندازه گیری شده و به دست آمده از مدل تحلیلی تیر (تحریک و اندازه گیری در درجه آزادی ۹)

جهت اطمینان از مدل اجزاء محدود ساخته شده، در جدول ۲ فرکانس های طبیعی اندازه گیری شده مدل اجزاء محدود با فرکانس های طبیعی به دست آمده از آزمایش (مدل تحلیلی) مقایسه گردیده است. همانطور که مشاهده می گردد خطای ناچیزی بین فرکانس های طبیعی اندازه گیری شده و تحلیلی وجود دارد که قابل چشم پوشی می باشد.

جدول ۲: فرکانس های طبیعی اندازه گیری شده و به دست آمده از مدل تحلیلی

| شماره مود | تحلیلی (Hz) | اندازه گیری شده (Hz) | خطا (%) |
|-----------|-------------|----------------------|---------|
| ۱ | ۱۶۰/۳ | ۱۶۳/۱ | -۱/۷ |
| ۲ | ۴۴۰/۷ | ۴۴۷/۹ | -۱/۶ |
| ۳ | ۸۵۸/۷ | ۸۶۹/۱ | -۱/۲ |
| ۴ | ۱۴۰۶/۴ | ۱۴۲۷/۳ | -۱/۵ |
| ۵ | ۲۰۸۰/۳ | ۲۱۰۷/۳ | -۱/۳ |

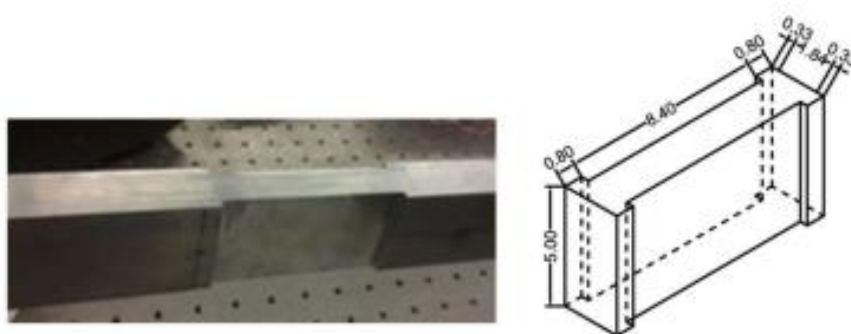
پس از اطمینان از مدل اجزاء محدود، نقاط با بیشترین حساسیت، به عنوان مکان های تحریک انتخاب می شوند. مکان های حسگر با استفاده از روش استقلال موثر^۹ [۱۷]، به دست می آیند. بر این اساس نقاط ۲، ۵، ۶ و ۹ برای ضربه چکش و نقاط ۵، ۶ و ۷ به عنوان محل استقرار شتاب سنج ها در نظر گرفته شده اند.

۶- سناریوهای خرابی

به منظور صحت سنجی روش مورد نظر، چهار تست بصورت کاهش موضعی سختی تیر و اضافه کردن جرم به تیر مورد آزمایش قرار گرفته است.

کاهش سختی مقطع: با استفاده از برش در مقطع تیر کاهش سختی تعریف شده است. جهت بررسی سناریوی خرابی از طریق کاهش موضعی سختی دو تست ۱ و ۲ انجام شده است که مطابق شکل ۴ برش ها در بخشی از طول و به طور متقارن در عمق هر دو سمت المان ایجاد شده است. تست طراحی شده شماره ۲ با استفاده از ایجاد دو برش در طول تیر تعریف شده است. جزییات برش ایجاد شده و میزان سختی کاهش یافته در شکل زیر و جدول ۲ آمده است.

^۹ Effective Independence (EI)



شکل ۴: ایجاد برش در مقطع تیر به منظور کاهش سختی

جدول ۲: شماره آزمایش، مکان و میزان کاهش سختی در المان

| شماره المان در مدل اجزاء محدود | مقدار کاهش سختی (%) | تست |
|--------------------------------|---------------------|-----|
| ۲ | ۵۰% | ۱ |
| ۲ | ۵۰% | ۲ |
| ۵ | ۴۰% | |

اضافه کردن جرم: در طراحی تست مطابق شکل ۵ جرم با وزن معلوم به وسط المان متصل می شود. در طراحی تست فرض شده است که جرم اضافه شده سختی تیر را به طور قابل توجهی تغییر نمی دهد. بنابراین، تنها پارامتر تغییر داده شده در المان تیر، جرم اضافه شده می باشد که با استفاده از روش بروزرسانی مدل باید مکان و مقدار آن شناسایی شود. در مورد تست با استفاده از اتصال دو جرم بر دو مکان مختلف طراحی شده اند. جدول ۳ مقدار جرم اضافه شده و شماره المانی که جرم به آن اضافه شده را در هر مورد تست نشان می دهد. مقدار جرم اضافه شده به صورت درصدی از جرم المان ارائه شده است.



شکل ۵: جرم اضافه شده به تیر

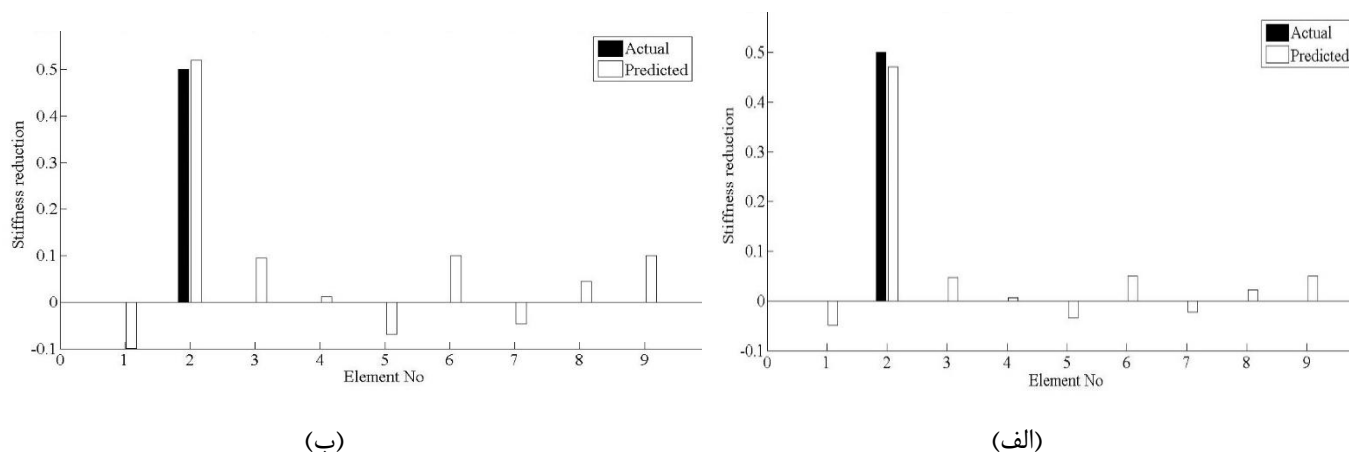
جدول ۳: شماره آزمایش، مکان و میزان کاهش سختی در المان

| شماره المان در مدل اجزاء محدود | مقدار جرم اضافه شده (%) | تست |
|--------------------------------|-------------------------|-----|
| ۴ | ۵۰% | ۳ |
| ۴ | ۵۰% | ۴ |
| ۷ | ۶۰% | |

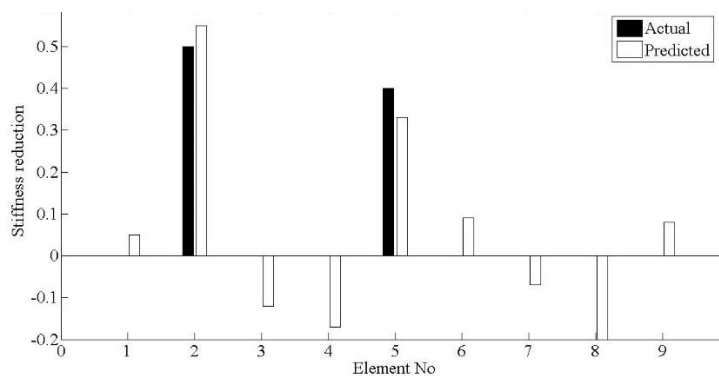
۷- بررسی نتایج آزمایش

در این بخش، نتایج مدل تجربی و بروزرسانی شده آزمایشهای بخش قبل با استفاده از روش عنوان شده ارائه گردیده است. برای بررسی کارایی تخمین بیزین، نتایج پارامترهای بروزرسانی شده با استفاده از روش آماری فراوانی نیز برای مقایسه ارائه شده است. پارامتر بروزرسانی برای سناریوهای کاهش سختی محلی، صلبیت خمشی، EI است. E و I به ترتیب مدول یانگ و ممان اینرسی المانها هستند.

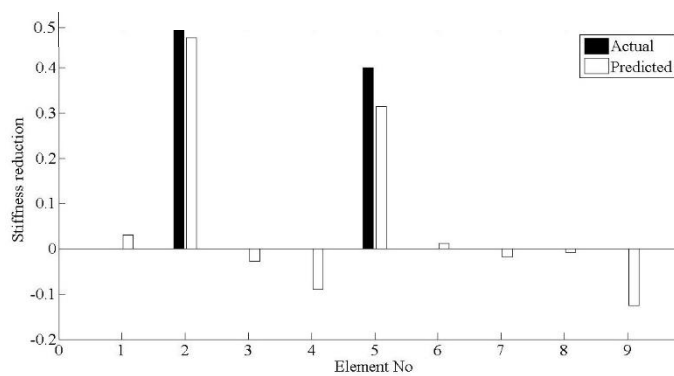
برای کاهش اثرات میرایی بر روی FRF های اندازه گیری شده، در فرآیند بروزرسانی مدل، ناحیه ای در حدود ۱۵ هرتز در اطراف رزونانس ها در نظر گرفته نمی شود. نمودارهای FRF با تحریک تیر در درجه آزادی ۹ و اندازه گیری پاسخ در درجه آزادی ۹ به دست می آیند. برای نشان دادن کارایی روش، برای هر مورد، نتایج پارامتر شناسایی شده با استفاده از روش میانگین گیری نیز برای مقایسه با پارامترهای شناسایی شده ارائه می شود. لازم به ذکر است در هر بخش تابع پیشین بصورت گوسی با میانگین برابر با نتایج آزمایشهای گوناگون و حذف آزمایشهای ناصحیح و واریانس متناسب به واریانس مشاهدات نتایج آزمایش به نحوی انتخاب می گردد که مقصود روش بیزین مطابق شکل (۱) حاصل شود. بدین منظور واریانس بردار تخمین به گونه ای در نظر گرفته می شود که متناسب با واریانس مشاهدات بوده و میانگین تابع گوسی مربوط به نویز، صفر در نظر گرفته می شود. بدین ترتیب برای سناریوهای مختلف نتایج زیر حاصل گردیده است.



شکل ۶: نتایج تشخیص خرابی کاهش سختی در المان ۲ (تست شماره ۱) الف: با استفاده از روش بیزین ب: بدون استفاده از روش بیزین

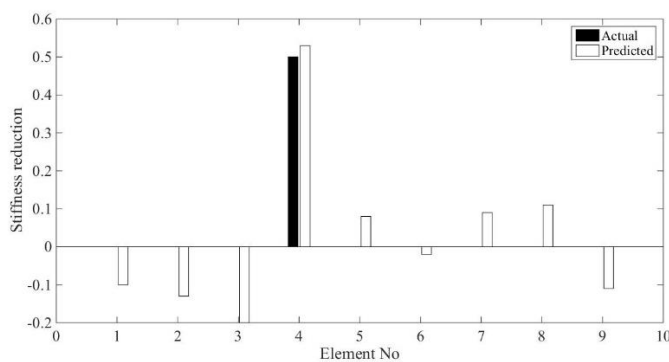


(ب)

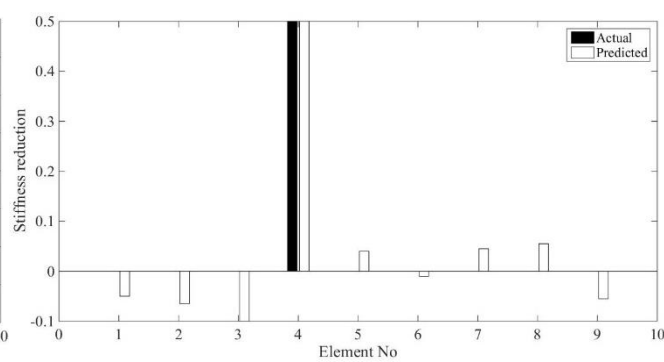


(الف)

شکل ۷: نتایج تشخیص خرابی کاهش سختی در المانهای ۲ و ۵ (تست شماره ۲) الف: با استفاده از روش بیزین ب: بدون استفاده از روش بیزین

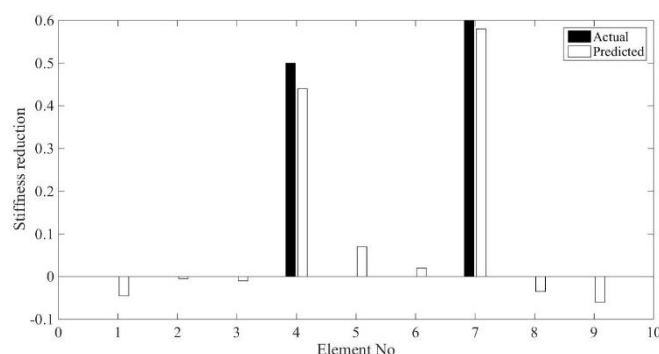
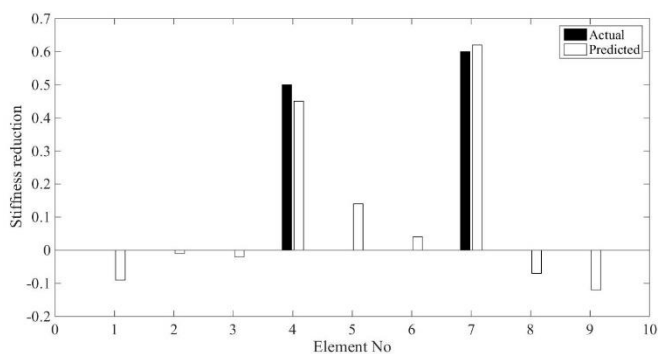


(ب)



(الف)

شکل ۸: نتایج تشخیص خرابی افزایش جرم در المان ۴ (تست شماره ۳) الف: با استفاده از روش بیزین ب: بدون استفاده از روش بیزین



شکل ۹: نتایج تشخیص خرابی افزایش جرم در المانهای ۴ و ۷ (تست شماره ۴) الف: با استفاده از روش بیزین ب: بدون استفاده از روش بیزین

برای بررسی عددی میزان خطای موجود در پارامترهای تخمین زده شده، از شاخص میانگین خطای برآورد^{۱۰} استفاده می‌گردد. در واقع MSE، میانگین قدرمطلق اختلافات بین آسیب در پارامترهای سازه واقعی δP_e^a و آسیب تخمین زده شده در پارامتر مدل تحلیلی δP_e^p می‌باشد. مقادیر کوچکتر این شاخص نشان دهنده نتایج دقیقتر می‌باشد.

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{e=1}^N |\delta P_e^a - \delta P_e^p| \quad (0 \leq MSE \leq \infty) \quad (13)$$

جدول ۴: مقایسه قدرت شناسایی خرابی در حالت استفاده از تخمین بیزین با حالت غیر استفاده از تخمین بیزین

| شماره تست | شاخص MSE بدون استفاده از تخمین بیزین (%) | شاخص MSE با استفاده از تخمین بیزین (%) |
|-----------|--|--|
| ۱ | ۶/۳۳ | ۳/۲۲ |
| ۲ | ۹/۸۸ | ۴/۲۲ |
| ۳ | ۹/۶۷ | ۴/۶۷ |
| ۴ | ۵/۱۱ | ۱/۸۳ |

همانطور که مشاهده می‌گردد، با استفاده از تخمین بیزین می‌توان به نتایج بهتری دست یافت اگرچه قدرت تشخیص خرابی روش در مجموع بالا بوده و با استفاده از میانگین نتایج نیز می‌توان خرابی‌ها را در سازه تعیین نمود. به طور کلی باید در نظر داشت هرچه سازه پیچیده تر گردد تشخیص خرابی‌ها (خصوصاً خرابی‌های جزئی) سخت تر خواهد شد و در چنین شرایطی استفاده از روشهای دقیقتری مانند بیزین جهت دستیابی به نتایج بهتر کاراتر خواهد بود.

۸- نتیجه گیری

در این مقاله روش بروزرسانی مدل بر مبنای تابع پاسخ فرکانسی که قبلاً توسعه داده شده بود با رویکرد آماری بیزین مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. مبنای روش اشاره شده ارائه یک رابطه شبه خطی برای تابع پاسخ فرکانسی اندازه گیری با هدف مقابله با نقص در اندازه گیری‌ها می‌باشد. در عمل عدم قطعیت‌هایی چون تفاوت مدل اجزاء محدود با مدل اجرایی و وجود نویز نیز در مساله وجود دارد که جهت مقابله با آن می‌توان روش‌های آماری قوی تری چون بیزین را به مساله اضافه نمود. در واقع رویکرد آماری فراوانی اگرچه می‌تواند در بسیاری از مسائل یک نتیجه مطلوب به همراه داشته باشد، ولی در مسائل مهندسی می‌توان با توجه به وضعیت مساله و پاسخ آزمایشهای تکرار شده (و یا در مسائل غیر آزمایشگاهی با توجه به تکرارهای مونت کارلو) شرایطی را به مساله اضافه نمود که در این صورت می‌توان از روش آماری بیزین استفاده نمود. جهت صحت سنجی کارآمدی روش نتایج آزمایش بر روی یک تیر دو سر آزاد مورد بررسی قرار گرفت که نتایج زیر حاصل گردید.

۱- نتایج نشان می‌دهد استفاده از روش آماری بیزین در شناسایی خرابی پارامترهای سازه کارایی مناسبی داشته بطوری که طبق جدول شماره (۳) اضافه نمودن تخمین بیزین به روش تشریح شده در [۱۴] دقت شناسایی خرابی را بهبود می‌بخشد.

۲- به طور کلی باید در نظر داشت هرچه سازه پیچیده تر گردد تشخیص خرابی‌ها (خصوصاً خرابی‌های جزئی) سخت تر خواهد شد و در چنین شرایطی استفاده از روشهای دقیقتری مانند بیزین جهت دستیابی به نتایج بهتر کاراتر خواهد بود.

۳- به عنوان یک پیشنهاد استفاده از روشهایی چون هوش مصنوعی و یادگیری ماشین جهت بالاتر بردن قدرت تجزیه و تحلیل داده‌ها عنوان می‌گردد، البته لازم به ذکر است در صورت استفاده از روشهایی چون یادگیری ماشین باز هم جهت انتخاب داده‌ها (داده کاوی)

¹⁰ Mean sizing error (MSE)

یکی از معتبرترین روش ها داده کاوی روش بیز می باشد که این مقاله (مطابق روابط ارائه شده در بخش سوم) بر همین اساس ارائه گردیده است.

مراجع

- [1] Esfandiari, A. Bakhtiari-Nejad, F. Rahai, A. and Sanayei, M. (2009). Structural model updating using frequency response function and quasi-linear sensitivity equation. *Journal of sound and vibration*, volume (326), page (557-573).
- [2] Esfandiari, A. Bakhtiari-Nejad, F. Rahai, A. and Sanayei, M. . (2010). Structural finite element model updating using transfer function data. *Computer and Structures*, volume (88), page (54-64).
- [3] Shadan, F. Khoshnoudian, F and Esfandiari, A. (2015). A frequency response-based structural damage identification using model updating method. *Structural Control and Health Monitoring*. Volume (23), page (286-302).
- [4] Shadan, F. Khoshnoudian, F . Esfandiari, A. (2018). Structural damage identification based on strain frequency response functions. *International Journal of Structural Stability and Dynamics (IJSSD)*, Volume (18), page (1-26).
- [5] Hassani, S and Shadan, F. (2022). Using incomplete FRF measurement for damage detection of structures with closely-spaced eigenvalues. *Measurement*, volume (188), page (110388).
- [6] Shojaei-Mansourabadi, A and Esfandiari, A. (2019). Structural model updating using sensitivity of wavelet transform coefficients of incomplete structural response. *Journal of civil structural health monitoring*, volume(9), page(37-51).
- [7] Esfandiari, A., Nabiyan, M-S. Rofooei, F-R. (2020). Structural damage detection using principal component analysis of frequency response function data. *Struct Control Health Monit*. Volume(27), page(1-21).
- [8] Rahai, M. Esfandiari, A. Bakhshi, A. (2020). Detection of structural damages by model updating based on singular value decomposition of transfer function subsets. *Structural Control Health Monitoring*. Volume(27), page(1-23).
- [9] Sohn, H. and Law, K.H. (1997). A Bayesian probabilistic approach for structure damage detection. *Earthquake engineering & structural dynamics*. Volume(26), page(1259-1281).
- [10] Beck, J-L. and Katafygiotis, L-S. (1998). Updating models and their uncertainties. I: Bayesian statistical framework. *Journal of Engineering Mechanics*. Volume (124), page(455-461).
- [11] Song, M. Behmanesh, I. Moaveni, B. and Papadimitriou, C. (2019). Modeling error estimation and response prediction of a 10-story building model through a hierarchical Bayesian model updating framework. *Frontiers in Built Environment*. Volume (5), page(7).
- [12] Fathi, A. Esfandiari, A. Fadavie, M. Mojtahedi, A. (2020). Damage detection in an offshore platform using incomplete noisy FRF data by a novel Bayesian model updating method. *Ocean Engineering*. Volume(217). Page(1-15).
- [13] Nabiyan, M-S. Ebrahimian, H. Moaveni, B. Papadimitriou, C. (2022). Adaptive Bayesian inference framework for joint model and noise identification. *Journal of engineering mechanics*. Volume(148). Page(1-34).
- [14] Shadan, F. Khoshnoudian, F. Daniel Inman and Esfandiari, A. (2018). Experimental validation of FRF-based model updating method. *Journal of vibration and control*. Volume(24). Page(1-14).
- [15] Mahmoodabadi, M. Hasani, M. and Taghavi, B. (2021). Calculation of Natural Frequencies of Two-Dimensional Prismatic Bending Beams with Distributed Mass and Elasticity Using an Innovative Method. *Bulletin of Earthquake Science and Engineering(bese)*, Volume(8), page (95-109).
- [16] Kay, S M. (1993). *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory*. New Jersey:Prentice-Hal, Page (324-325).
- [17] D. C, Kammer. (1991). Sensor placement for on-orbit modal identification and correlation of large space structures, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, volume 14(2), page(251-259).