

## A Novel Numerical Method for Nonlinear Time History Analysis of MDOF Structures: Newton-Cotes-Hermite-4Point

Mehdi Babaei<sup>1\*</sup>, Mohammad Reza Alidost<sup>2</sup>, Mohammad Reza Hanafi<sup>3</sup>

1- Assistant professor, Department of Civil Engineering, University of Bonab, Bonab, East Azerbaijan Iran

2- M.S. of Structural Engineering, Department of Civil Engineering, University of Bonab, Bonab, East Azerbaijan Iran

3- M.S. Student of Construction Management and Engineering, Department of Civil and Environmental Engineering, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran

### ABSTRACT

This paper presents an efficient numerical analysis method called the Newton-Cotes-Hermite-Four-Point (NCH-4P) method for the time history analysis of structural systems with one and multiple degrees of freedom under earthquake effect. The method combines the numerical integration formula of the Newton-Cotes four-point method with the Hermite interpolation formulas to form a new algorithm for solving the vibration equation. The method can handle both linear and nonlinear systems, as well as different types of loading, such as external forces and earthquake excitation. The method is developed for the first time for the analysis of linear and nonlinear damped and undamped structural systems with one and multiple degrees of freedom. The method shows remarkable performance superiority in terms of accuracy, speed, convergence and simplicity compared to the pseudo-analytical Newmark-beta method and the semi-analytical Duhamel integral method. The method modifies the differential equation of motion to have a suitable form for numerical integration. Unlike the nonlinear Newmark-beta method, the method does not require an independent process such as Newton's iteration to account for nonlinear effects; instead, a series of simple repeated calculations leads to the convergence of the response in nonlinear behavior. The numerical results demonstrate the efficiency of the method in estimating the response of systems under the famous EL-Centro record.

### ARTICLE INFO

**Receive Date:** 09 June 2023

**Revise Date:** 19 October 2023

**Accept Date:** 17 November 2023

### Keywords:

Time-History analysis

Seismic response

Non-Linear analysis

Multi-Degree-of-Freedom

Newton-Cotes quadrature

Hermite interpolation

Newton-Cotes-Hermite-4Point method

All rights reserved to Iranian Society of Structural Engineering.

doi: <https://doi.org/10.22065/jsce.2023.400538.3134>

\*Corresponding author: Mehdi Babaei.

Email address: [m.babaei@ubonab.ac.ir](mailto:m.babaei@ubonab.ac.ir)

## ارائه روش جدید برای تحلیل غیرخطی تاریخچه زمانی سازه‌های چند درجه آزادی:

### نیوتن-کاتس-هرمیت-چهار نقطه‌ای

مهدی بابائی قلعه جوق<sup>۱\*</sup>، محمدرضا علی دوست<sup>۲</sup>، محمدرضا حنفی<sup>۳</sup>

۱- استادیار، دانشگاه بناب، بناب، ایران

۲- کارشناسی ارشد مهندسی سازه، دانشگاه بناب، بناب، ایران

۳- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی و مدیریت ساخت، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران

#### چکیده

یک روش تحلیل عددی کارآمد تحت عنوان روش نیوتن-کاتس-هرمیت-چهار نقطه‌ای (NCH-4P<sup>1</sup>) برای تحلیل تاریخچه زمانی سیستم‌های سازه‌ای یک و چند درجه آزادی، تحت اثر زلزله ارائه شده است. در این روش، فرمول انتگرال‌گیری عددی نیوتن-کاتس چهار نقطه‌ای به طور مؤثری با فرمول‌های درون‌یابی هرمیت ترکیب شده‌اند تا الگوریتمی جدید برای حل معادله ارتعاش تشکیل دهند. در روش جدید هم سیستم‌های خطی و هم سیستم‌های غیرخطی پوشش داده می‌شوند؛ علاوه بر آن، تحلیل سیستم‌ها تحت انواع بارگذاری‌ها اعم از نیروهای خارجی و تحریک زلزله امکان‌پذیر است. روش جدید برای اولین بار جهت تحلیل سیستم‌های سازه‌ای میرا و نامیرای خطی و غیرخطی یک درجه آزادی و چند درجه آزادی توسعه داده شده است. فرمول‌بندی روش جدید ارائه شده در مقایسه با روش شبه‌تحلیلی نیومارک-بتا و روش نیمه‌تحلیلی انتگرال دوهمامل از دقت، سرعت و هم‌گرایی قابل‌توجهی برخوردار بوده و درعین حال از سادگی بالایی نیز برخوردار است. در این فرمول‌بندی، معادله دیفرانسیل حرکت به‌گونه‌ای اصلاح می‌شود که شکل مناسبی برای انتگرال‌گیری عددی داشته باشد. در این روش برخلاف روش نیومارک-بتا غیرخطی، نیاز به اجرای یک‌روند مستقل مانند تکرار نیوتن، برای لحاظ اثرات غیرخطی نبوده؛ بلکه یک سری محاسبات ساده تکراری منجر به هم‌گرایی پاسخ در رفتار غیرخطی خواهد شد. نتایج عددی کارایی روش جدید را در تخمین پاسخ سیستم‌های تحت رکورد معروف ال-سنتر و<sup>۲</sup> نشان می‌دهد.

کلمات کلیدی: تحلیل تاریخچه زمانی، پاسخ لرزه‌ای، تحلیل غیرخطی سازه‌ها، سیستم‌های چند درجه آزادی، انتگرال نیوتن-کاتس، فرمول درون‌یابی هرمیت، روش نیوتن-کاتس-هرمیت-چهار نقطه‌ای

شناسه دیجیتال:		سابقه مقاله:				
doi:	<a href="https://doi.org/10.22065/jsce.2023.400538.3134">https://doi.org/10.22065/jsce.2023.400538.3134</a>	چاپ	انتشار آنلاین	پذیرش	بازنگری	دریافت
	<a href="https://doi.org/10.22065/jsce.2023.400538.3134">10.22065/jsce.2023.400538.3134</a>	۱۴۰۲/۰۴/۳۱	۱۴۰۲/۰۸/۲۶	۱۴۰۲/۰۸/۲۶	۱۴۰۲/۰۷/۲۷	۱۴۰۲/۰۳/۱۹
مهدی بابائی قلعه جوق <a href="mailto:m.babaei@ubonab.ac.ir">m.babaei@ubonab.ac.ir</a>					*نویسنده مسئول: پست الکترونیکی:	

<sup>1</sup> Newton-Cotes-Hermite-4Point method

<sup>2</sup> El-Centro

## ۱- مقدمه

روش‌های عددی تحلیل دینامیکی تکنیک‌هایی برای حل معادله دیفرانسیل حرکت هستند که حرکت سازه‌ها را تحت نیروهای وارده و شرایط مختلف رفتاری مؤلفه‌های سیستمی توصیف می‌کنند. پیشینه روش‌های عددی تحلیل دینامیکی به دوران کهن باز می‌گردد، زمانی که ریاضی‌دانانی چون ادوکسوس و ارشمیدس از روش افنا یا اشباع برای محاسبه مساحت و حجم اشکال هندسی استفاده می‌کردند. با این حال، توسعه نوین روش‌های عددی تحلیل دینامیکی از قرن هفدهم آغاز شد، زمانی که نیوتن و لایبنیتس قضایای حساب دیفرانسیل و انتگرال را اختراع کردند و آن را برای مدل‌سازی پدیده‌های فیزیکی مانند گرانش و مکانیک به کار بردند. از آن زمان تاکنون، روش‌های عددی بسیاری توسط ریاضی‌دانان و دانشمندان مختلف مانند اویلر، لاگرانژ، گاوس، ناپیر، نیوتن، دوهمال، نیومارک، ویلسون، کرانک، نیکلسون، دانتسیگ، تورینگ، خانوار هولدر، رامبرگ، فرانسیس، کوبلانوفسکیا، کلاف، لکس، فردریش، وندروف، کولی، توکی، آبراموویتز، استگان، برودن، مک کورمک، ولت، دونگارا، داوبچیس، روخلین و گرینگارد پیشنهاد و بهبود یافته است. برخی از این روش‌ها به‌عنوان ده الگوریتم برتر قرن بیستم توسط مجله معروف (SIAM Computing in Science and Engineering) انتخاب شده‌اند [۱، ۲].

رفتار مکانیکی سیستم‌های دینامیکی مختلف، تحت اثر نیروی تابع زمان، با یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم ( $ODE^3$ ) توصیف می‌شود [۳]. محاسبه پاسخ تحلیلی این معادله به‌ندرت امکان‌پذیر است مگر اینکه تابع نیرو بسیار ساده و مؤلفه‌های سیستم رفتار خطی داشته باشند. قابل ذکر است، علاوه بر مسئله ارتعاش، معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم کاربرد گسترده‌ای در رشته‌های مکانیک کاربردی، فیزیک، زیست‌شناسی و اقتصاد دارند که بسیاری از آن‌ها باید به‌صورت عددی حل شوند. در بین همه این مسائل، حل معادله ارتعاش تحت بارگذاری زلزله دارای پیچیدگی‌هایی از قبیل فرکانس بسیار بالای تابع تحریک می‌باشد که استفاده از یکی از روش‌های عددی را ضروری کرده و توسعه چنین روش‌هایی به‌عنوان یکی از جذاب‌ترین زمینه‌های تحقیقاتی برای مهندسیین مطرح می‌کند.

در نظریه دینامیک سازه‌ها، سیستم‌های چند درجه آزادی ( $MDOF^4$ )، اغلب به‌صورت سیستم‌های یک درجه آزادی ( $SDOF^5$ ) مدل‌سازی می‌شوند و سپس معادله دیفرانسیل حرکت ( $DEOM^6$ ) برای آن‌ها حل می‌گردد [۴، ۵]. بنابراین، در دینامیک سازه‌ها مدل‌سازی سیستم‌های یک درجه آزادی، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. معادله دیفرانسیل حرکت، مدل ریاضی یک سیستم مکانیکی یک درجه آزادی را ارائه می‌کند که حل این معادله دیفرانسیل پاسخ سیستم تحت بارگذاری‌های مختلف را به‌دست می‌دهد.

دستیابی به فرمول‌بندی‌های مؤثر جهت تخمین پاسخ سیستم‌های یک درجه آزادی تحت تحریک تکیه‌گاهی همواره مورد توجه بسیاری از محققان بوده است [۶-۹]. روش‌های شبه‌تحلیلی دامنه‌زمانی، مانند انتگرال دوهمال، غالباً پاسخ نهایی سیستم را با استفاده از اصل جمع آثار قوا روی مؤلفه‌های پاسخ محاسبه می‌کنند. به‌دلیل اینکه این روش‌ها از اصل جمع آثار قوا حاصل شده‌اند، قابلیت تحلیل سیستم‌های غیرخطی را نخواهند داشت؛ چرا که اصل جمع آثار قوا تنها برای سیستم‌های خطی کاربرد دارد. از طرفی، روش‌های دیگری تحت عنوان روش‌های گام‌به‌گام برای تحلیل سیستم‌های غیرخطی ارائه شده‌اند که روش درون‌یابی تابع تحریک، تفاضلات محدود مرکزی، رانگ-کوتا و نیومارک-بتا از آن جمله‌اند [۵، ۶].

مقالات زیادی در زمینه روش‌های عددی تحلیل لرزه‌ای منتشر شده است. ابلینگ و همکاران [۱۰] یکی از اولین محققانی بودند که در سال ۱۹۹۷ درباره دقت برخی از روش‌های عددی گام‌به‌گام جهت محاسبه پاسخ دینامیکی سیستم‌های سازه‌ای یک درجه آزادی تحت تحریک زمانی مطالعاتی را انجام داده و در گزارش فنی ارتش مهندسیین ایالات متحده آمریکا ارائه دادند. آن‌ها در مقاله خود به بررسی و مقایسه روش‌های روش ویلسون-تتا، روش شتاب خطی، الگوریتم نیومارک-بتا، روش تفاضلات مرکزی، روش رانگ‌کوتا مرتبه چهارم و انتگرال دوهمال پرداختند. در سال ۲۰۰۲، لی [۱۱] یک روش دقیق و جدید برای تحلیل خطی ارتعاش سیستم‌های یک درجه آزادی با پارامترهای نامتناوب متغیر با زمان (جرم و سختی) ارائه کرد. در این مطالعه متغیرهای جرم، سختی و زمان با استفاده از توابع توانی و نمایی بیان

<sup>3</sup> Ordinary differential equation

<sup>4</sup> Multi degree of freedom

<sup>5</sup> Single degree of freedom

<sup>6</sup> Differential equation of motion

می‌گردد. او از توابع تبدیل، برای کاهش معادلات دیفرانسیل مبتنی بر معادله بسل<sup>۷</sup> یا سایر معادلات قابل حل استفاده می‌کند و پاسخ‌های لرزه‌ای دقیقی برای معادله ارتعاش سیستم‌های یک درجه آزادی به دست می‌آورد. بعد از آن در سال ۲۰۰۴، چانگ و همکاران [۱۲] به امکان‌سنجی اعمال روش نیومارک به سیستم‌های غیرخطی یک درجه آزادی پرداختند و پایداری، دقت و سطح هم‌گرایی آن‌ها را مورد بررسی قرار دادند. در همان سال، لی و وو [۱۳] به بررسی ارتعاشات غیرخطی یک سیستم یک درجه آزادی تحت نیروهای فنریت غیرخطی پرداختند. در مقاله آن‌ها یک روش عددی تکرارشونده برای حل معادله ارتعاش غیرخطی ارائه شده است که دارای قابلیت تحلیل سیستم‌های متناوب و تخمین پاسخ در طول زمان‌های بزرگ و کوچک می‌باشد. متعاقباً در سال ۲۰۰۵، واموانسیکاس و همکاران [۱۴] روشی برای محاسبه پاسخ لرزه‌ای و ظرفیت سیستم‌های چند درجه آزادی با استفاده از تحلیل بارافزون<sup>۸</sup> (IDA) در یک سیستم یک درجه آزادی ارائه دادند. این روش مبتنی بر تحلیل مودال بوده و قابلیت انعکاس اثرات مدهای بالاتر، رفتار غیرخطی و مشخصه‌های رکوردها را دارا می‌باشد. پس از آن نیز، در سال ۲۰۰۸ کورت و سویک [۱۵] یک روش مبتنی بر چندجمله‌ای‌ها برای حل معادله ارتعاش سیستم‌های یک درجه آزادی ارائه دادند. این روش از بسط ماتریسی تیلور برای به دست آوردن تغییرمکان، سرعت و شتاب سیستم استفاده کرده و سیستم‌های خطی و غیرخطی با ضرایب ثابت و متغیر را نیز پوشش می‌دهد. پس از آن نیز چندین روش جدید برای تحلیل تاریخچه زمانی سیستم‌های سازه‌ای ارائه شده است [۱۶-۲۴]. در سال ۲۰۱۴ و اخیراً نیز چندین روش عددی جدید مبتنی بر اصل پایستگی انرژی و تکانه خطی برای تحلیل دینامیکی تاریخچه زمانی خطی و غیرخطی ارتعاشات سیستم‌های سازه‌ای یک درجه آزادی و چند درجه آزادی توسط مؤلفان پژوهش حاضر ارائه شده است [۲۵-۲۹]. بسیاری از روش‌های حل معادلات دیفرانسیل حرکت الگوریتم‌های پیچیده‌ای دارند و از ریاضیات پیشرفته در فرمول‌های خود استفاده می‌کنند که درک آن‌ها را بدون دانش فنی دشوار می‌کند.

مقاله حاضر، یک روش عددی جدید و ساده برای حل معادله ارتعاش سیستم‌های یک درجه آزادی و چند درجه آزادی ارائه می‌دهد. ایده فرمول‌بندی به سبک حاضر اخیراً در مقاله‌ای ریاضی توسط مؤلف اول این مقاله معرفی و به ثبت رسیده است [۳۰]. روش ارائه شده از دقت قابل قبولی برخوردار بوده و ارزیابی پاسخ دینامیکی سیستم‌های یک درجه آزادی تحت اثر هرگونه تحریک لرزه‌ای دل‌خواه را تسهیل می‌سازد. نام‌گذاری این روش تحت عنوان روش نیوتن-کاتس-هرمیت-چهار نقطه‌ای براین اساس صورت پذیرفته است که در آن برای انتگرال‌گیری در طول گام از قاعده نیوتن-کاتس و برای ارزیابی میان‌گام‌ها<sup>۹</sup> از فرمول‌های درون‌یابی هرمیت مورد استفاده قرار گرفته است. با ترکیب این دو ابزار ریاضی می‌توان به یک الگوریتم ساده و دقیق جهت تحلیل سیستم‌های بسامد-بالا دست یافت. روش ارائه شده هم سیستم‌های یک درجه آزادی را پوشش می‌دهد و هم قابلیت اعمال به سیستم‌های چند درجه آزادی را دارا می‌باشد.

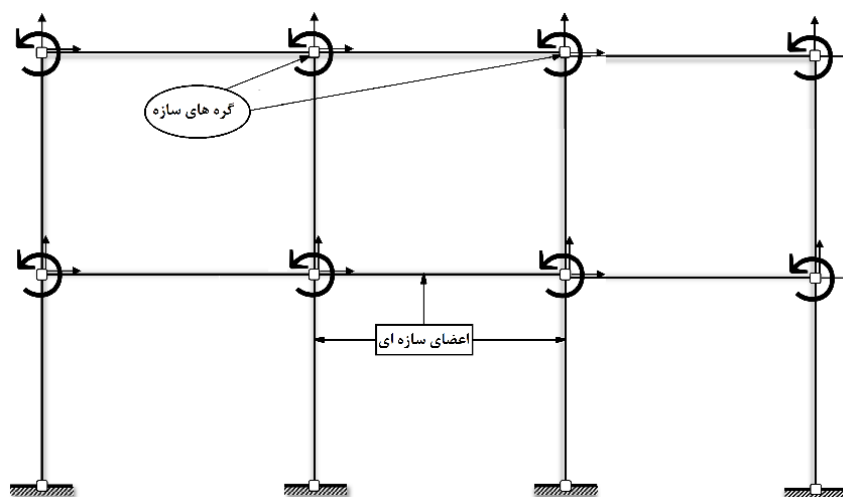
## ۲- بیان مسئله

شکل ۱، یک قاب دو بعدی از یک سیستم سازه‌ای چند درجه آزادی را نشان می‌دهد. درجات آزادی این قاب در محل گره‌های سازه‌ای نشان داده شده است. این درجات آزادی می‌توانند مقید یا غیر مقید باشند. تقید بین درجات آزادی که به واسطه دیافراگم بتنی ایجاد می‌گردد، باعث کاهش درجات آزادی سازه‌ای در مدل‌سازی ریاضی آن می‌گردد. ساده‌ترین سیستم سازه‌ای چند درجه آزادی که می‌توان برای تشریح مفاهیم استفاده کرد، در شکل ۲ نشان داده شده است. در این شکل مدل یک ساختمان دو طبقه را داریم که به واسطه دیافراگم صلب کف تنها دو درجه آزادی از نوع انتقالی دارد و سیستم آن خطی می‌باشد.

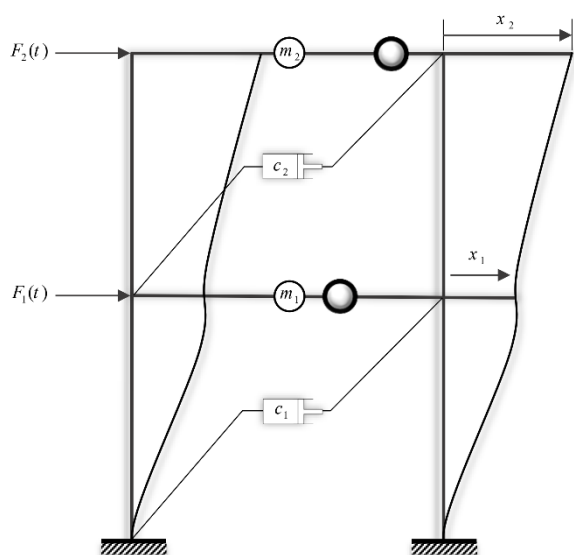
<sup>7</sup> Bessel differential equation

<sup>8</sup> Incremental Dynamic Analysis (IDA)

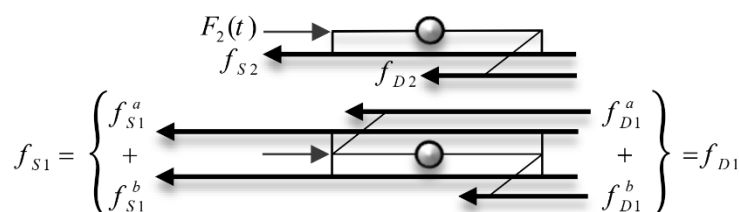
<sup>9</sup> Stages



شکل ۱: یک مدل نمونه از سیستم‌های سازه‌ای چند درجه آزادی و درجات آزادی گره‌ی آن.



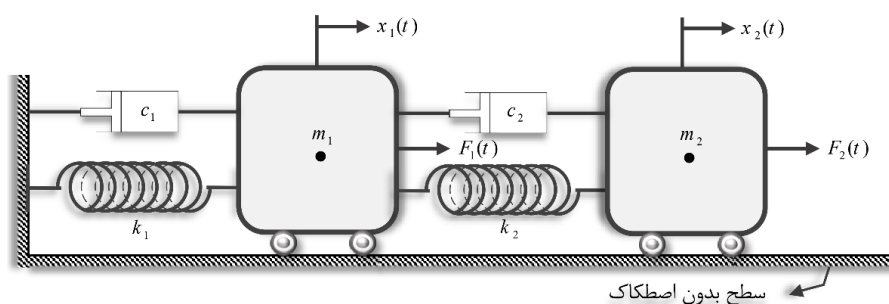
(ب)



(الف)

شکل ۲: الف) نیروهای وارد بر جرم‌های هر طبقه، ب) مدل یک قاب برشی دو طبقه با رفتار خطی.

چنانچه رایج است سیستم‌های سازه‌ای را با اجزاء جرم، فنر و میراگر نیز مدل می‌کنند. مدل جرم و فنر ساختمان مذکور در شکل ۳ ارائه شده است. رفتار هر یک از اجزاء جرم، فنر و میراگر در این سیستم می‌تواند خطی یا غیرخطی باشد. اکثر سیستم‌های سازه‌ای واقعی هنگام ارتعاش رفتار غیرخطی را تجربه می‌کنند که این رفتار منشاء از پاسخ فنر در تغییر مکان‌های بزرگ یا مدل‌های میرایی غیرویسکوز باشد. بنابراین، می‌توان نیروی متناظر با هر مؤلفه از سیستم را به‌عنوان تابعی از تغییر مکان و سرعت بیان کرد.



شکل ۳: مدل جرم و فنر قاب برشی دو طبقه

اگر بردار تغییر مکان‌های متناظر با درجات آزادی سیستم را با  $\{x\}$ ، بردار سرعت‌ها را با  $\{v\}$  و شتاب جرم‌های متمرکز سیستم را با  $\{a\}$  نشان دهیم؛ باتوجه به تئوری‌های دینامیک سازه‌ها [۵، ۳۱]، معادله دیفرانسیلی حاکم بر حرکت سیستم نوسانی (GDOM<sup>۱۰</sup>) غیرخطی چند درجه آزادی تحت تحریک زلزله به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\{F_S(x, v)\} + \{F_D(x, v)\} + [m(t)]\{a\} = -[m(t)]\{a_g\} \quad (۱)$$

معادله ۱، عمومی‌ترین شکل معادله ارتعاش می‌باشد که شامل تغییرات جرمی نیز می‌شود. در این معادله  $\{F_S(x, v)\}$  بردار نیروی کشسانی (رفتار فنر) سیستم،  $\{F_D(x, v)\}$  بردار نیروهای میرایی سیستم، و  $[m(t)]$  ماتریس جرم سیستم در زمان  $t$  می‌باشد. بردار شتاب سیستم نیز با  $\{a\}$  ارائه شده است. با اینکه تغییرات جرمی می‌تواند عامل رفتار غیرخطی سیستم باشد، اما در مسئله ارتعاشات سازه‌ها مقادیر جرمی ثابت هستند؛ به عبارت دیگر  $[m(t)] = [m]$  می‌باشد. لازم به ذکر است، پارامترهای سینماتیکی داخل پرانتزها غیرخطی بودن مؤلفه‌های نیرویی را نشان می‌دهند. با فرض خطی بودن رفتار فنر،  $\{F_S\} = [k]\{x\}$ ، و میرایی ویسکوز،  $\{F_D\} = [c]\{v\}$ ، معادله ارتعاش به صورت زیر خواهد بود:

$$[k]\{x\} + [c]\{v\} + [m]\{a\} = -[m]\{a_g\} \quad (۲)$$

که در آن، ضریب  $[k]$  ماتریس سختی سازه،  $[c]$  ماتریس میرایی سازه که رفتاری ویسکوز دارد و  $[m]$  جرم سیستم می‌باشند. سیستم تحت بررسی در معادلات ۲ و ۳ تحت تحریک شتاب تکیه‌گاهی  $\{a_g(t)\} = \{a_g\}$  قرار دارد. برای سیستم‌هایی که تحت نیروی خارجی  $\{F(t)\}$  به جای شتاب تکیه‌گاهی باشد، در معادلات ۲ و ۳، به جای عبارت  $-[m]\{a_g\}$  در سمت راست این معادلات  $\{F(t)\}$  را جایگزین می‌نماییم. در مسائل تحلیل دینامیکی سازه‌ها، تحریک زلزله به صورت تابعی گسسته از زمان می‌شود. اگر بازه‌ی زمانی تحلیل با  $N$  نقطه افزایش گردد که  $N-1$  گام‌زمانی هم‌اندازه را معرفی کند، طول هر گام‌زمانی  $h = t_{i+1} - t_i$  خواهد بود. در الگوریتم‌های انتگرال‌گیری گام‌به‌گام، باید معادله دیفرانسیلی حاکم بر حرکت در لحظه  $t_i$  برقرار باشد، به عبارتی:

$$\{F_{S,i}\} + \{F_{D,i}\} + [m_i]\{a_i\} = [m_i]\{a_{g,i}\} \quad (۳)$$

که در آن،  $\{F_{S,i}\} = \{F_S(x_i, v_i)\}$ ،  $\{F_{D,i}\} = \{F_D(x_i, v_i)\}$ ،  $[m_i] = [m(t_i)]$  و  $\{a_{g,i}\} = \{a_g(t_i)\}$  می‌باشد. هدف این الگوریتم‌های عددی، یافتن پاسخ در لحظه  $t_{i+1}$  براساس پاسخ‌های موجود در لحظه  $t_i$  می‌باشد. این پاسخ باید در معادله دیفرانسیلی حرکت را در لحظه  $t_{i+1}$  صدق کند:

<sup>10</sup> Governing differential equation of motion

$$\{F_{S,i+1}\} + \{F_{D,i+1}\} + [m_{i+1}]\{a_{i+1}\} = [m_{i+1}]\{a_{g,i+1}\} \quad (4)$$

که در آن،  $\{F_{S,i+1}\} = \{F_S(x_{i+1}, v_{i+1})\}$ ،  $\{F_{D,i+1}\} = \{F_D(x_{i+1}, v_{i+1})\}$ ،  $[m_{i+1}] = [m(t_{i+1})]$  و  $\{a_{g,i+1}\} = \{a_g(t_{i+1})\}$  می‌باشند. در بخش‌های آتی، مبانی روش ارائه شده برای محاسبه پاسخ لرزه‌ای سیستم در لحظه  $t_{i+1}$  با استفاده از معادلات فوق و روابط بازگشتی آن‌ها ارائه می‌گردد.

### ۳- مبانی روش جدید تحلیل تاریخچه زمانی نیوتن-کاتس-هرمیت-چهار نقطه‌ای (NCH-4P)

برای درک بهتر فرمول‌بندی روش نیوتن-کاتس-هرمیت-چهار نقطه‌ای، ابتدا باید روابط حاکم بین مؤلفه‌های تغییر مکان نسبی، سرعت نسبی و شتاب نسبی را یادآوری کنیم. اگر مؤلفه تغییر مکان جانبی برابر با  $\{x\} = \{x(t)\}$ ، مؤلفه سرعت  $\{v\} = \{v(t)\}$  و مؤلفه شتاب  $\{a\} = \{a(t)\}$  باشد؛ در این حالت با استفاده از قضیه دوم حساب دیفرانسیل و انتگرال<sup>۱۱</sup>، برای سرعت سیستم می‌توان نوشت:

$$\{v_{i+1}\} = \{v_i\} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \{a(t)\} dt \quad (5)$$

که در آن  $t_i, t_{i+1} = t_i + h$  نقاط ابتدایی و انتهایی گام  $i$ -th و نیز،  $\{v_i\} = \{v(t_i)\}$  و  $\{v_{i+1}\} = \{v(t_{i+1})\}$  می‌باشند. اگر انتگرال سمت راست معادله ۵ را با استفاده از روابط نیوتن-کاتس-چهار نقطه‌ای تخمین بزنیم، خواهیم داشت:

$$\{v_{i+1}\} = \{v_i\} + h \left[ \frac{1}{8}\{a_i\} + \frac{3}{8}\{a_{i+\frac{1}{3}}\} + \frac{3}{8}\{a_{i+\frac{2}{3}}\} + \frac{1}{8}\{a_{i+1}\} \right] \quad (6)$$

که در معادله ۶،  $\{a_i\} = \{a(t_i)\}$ ،  $\{a_{i+\frac{1}{3}}\} = \{a(t_{i+\frac{1}{3}})\}$ ،  $\{a_{i+\frac{2}{3}}\} = \{a(t_{i+\frac{2}{3}})\}$  و  $\{a_{i+1}\} = \{a(t_{i+1})\}$  می‌باشد. میان گام‌های زمانی در انتگرال‌گیری نیوتن-کاتس-چهار نقطه‌ای با روابط  $t_{i+\frac{1}{3}} = t_i + \frac{1}{3}h$ ،  $t_{i+\frac{2}{3}} = t_i + \frac{2}{3}h$  و  $t_{i+1} = t_i + h$  معرفی می‌شود. به‌طور مشابه، می‌توانیم معادله زیر را برای مؤلفه تغییر مکان یا تغییر شکل سیستم با استفاده از معادله ۱۲ بنویسیم:

$$\{x_{i+1}\} = \{x_i\} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \{v(t)\} dt \quad (7)$$

که در آن  $\{x_i\} = \{x(t_i)\}$  و  $\{x_{i+1}\} = \{x(t_{i+1})\}$  بوده و  $\{v(t)\}$  بردار سرعت سیستم می‌باشد. با ساخت فرمول انتگرال‌گیری دو مشتقه زیر با نقاط نیوتن-کاتس برای ارزیابی انتگرال سمت راست معادله (۱۳)، رابطه زیر برای محاسبه بردار تغییر شکل سیستم  $\{x_{i+1}\}$  بدست می‌آید:

$$\{x_{i+1}\} = \{x_i\} + h \left[ \frac{13}{80}\{v_i\} + \frac{27}{80}\{v_{i+\frac{1}{3}}\} + \frac{27}{80}\{v_{i+\frac{2}{3}}\} + \frac{13}{80}\{v_{i+1}\} \right] + h^2 \left[ \frac{1}{120}\{a_i\} - \frac{1}{120}\{a_{i+1}\} \right] \quad (8)$$

در معادله ۸، پارامترهای  $\{v_{i+\frac{1}{3}}\} = \{v(t_{i+\frac{1}{3}})\}$ ،  $\{v_{i+\frac{2}{3}}\} = \{v(t_{i+\frac{2}{3}})\}$  و  $\{v_{i+1}\} = \{v(t_{i+1})\}$  به ترتیب بردارهای سرعت سیستم در لحظات  $t_{i+\frac{1}{3}}$ ،  $t_{i+\frac{2}{3}}$  و  $t_{i+1}$  می‌باشند. حال آنکه، به دلیل عدم دسترسی به مقادیر پاسخ و مشتقات نقاط داخلی، برای اولین بار استفاده از

<sup>11</sup> Fundamental theorem of calculus-part II

فرمول درون‌یابی هرمیت جهت تخمین مقادیر پاسخ در لحظات  $t_{i+\frac{1}{3}}$  و  $t_{i+\frac{2}{3}}$  پیشنهاد شده است. لازم به ذکر است، یکی از مهم‌ترین دستاورد این پژوهش، ارائه درون‌یاب‌های قدرتمند هرمیتی برای محاسبه این مؤلفه‌ها در نقاط میانی بازه می‌باشد. اولین جفت از مجموعه درون‌یاب‌های به دست آمده از نظریه تقریب در تحلیل عددی برای محاسبه سرعت‌ها به صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$\left\{ v_{i+\frac{1}{3}} \right\} = \left( \frac{20}{27} \{v_i\} + \frac{7}{27} \{v_{i+1}\} \right) + h \left( \frac{4}{27} \{a_i\} - \frac{2}{27} \{a_{i+1}\} \right) \quad (9)$$

$$\left\{ v_{i+\frac{2}{3}} \right\} = \left( \frac{7}{27} \{v_i\} + \frac{20}{27} \{v_{i+1}\} \right) + h \left( \frac{2}{27} \{a_i\} - \frac{4}{27} \{a_{i+1}\} \right)$$

باتوجه به اینکه درون‌یاب‌ها شکل ساده‌ای داشته و به حجم محاسباتی کمی نیاز دارند، می‌توانند سرعت الگوریتم‌ها را تا حد زیادی بیافزایند. با این حال، دقت تقریب آن‌ها نسبت به درون‌یاب‌های پیچیده‌تر کم‌تر می‌باشد. در صورت استفاده از مقادیر شتاب در محل نقاط میانی می‌توان به درون‌یاب‌های دقیق‌تر زیر دست یافت:

$$\left\{ v_{i+\frac{1}{3}} \right\} = \left( \frac{8}{27} \{v_i\} + \frac{19}{27} \{v_{i+1}\} \right) + h \left( \frac{1}{27} \{a_i\} - \frac{1}{3} \left\{ a_{i+\frac{2}{3}} \right\} - \frac{2}{27} \{a_{i+1}\} \right) \quad (10)$$

$$\left\{ v_{i+\frac{2}{3}} \right\} = \left( \frac{19}{27} \{v_i\} + \frac{8}{27} \{v_{i+1}\} \right) + h \left( \frac{2}{27} \{a_i\} + \frac{1}{3} \left\{ a_{i+\frac{1}{3}} \right\} - \frac{1}{27} \{a_{i+1}\} \right)$$

برای تخمین بردار تغییر شکل‌ها نیز فرمول‌های مشابهی قابل بیان است ولی در این مورد امکان استفاده از اطلاعات دو مرتبه مشتق بالاتر نیز وجود دارد که در ارتقاء دقت فرمول‌ها بسیار مؤثرند. برای مثال، با انجام محاسبات جبری تفصیلی توسط مؤلفین، جفت درون‌یاب‌های زیر برای محاسبه تغییر شکل‌ها ارائه می‌شود:

$$\left\{ x_{i+\frac{1}{3}} \right\} = \left( \frac{64}{81} \{x_i\} + \frac{17}{81} \{x_{i+1}\} \right) + h \left( \frac{18}{81} \{v_i\} - \frac{2}{27} \{v_{i+1}\} \right) + h^2 \left( \frac{4}{243} \{a_i\} - \frac{2}{243} \{a_{i+1}\} \right) \quad (11)$$

$$\left\{ x_{i+\frac{2}{3}} \right\} = \left( \frac{17}{81} \{x_i\} + \frac{64}{81} \{x_{i+1}\} \right) + h \left( \frac{2}{27} \{v_i\} - \frac{16}{81} \{v_{i+1}\} \right) + h^2 \left( \frac{2}{243} \{a_i\} - \frac{4}{243} \{a_{i+1}\} \right)$$

جفت درون‌یاب‌های اخیر از دقت بسیار بالایی برای استفاده در فرمول‌بندی جدید برخوردارند با این حال درون‌یاب‌های دو مشتقه دیگری نیز قابل ارائه‌اند که دقت بالاتری دارند. برای مثال داریم:

$$\left\{ x_{i+\frac{1}{3}} \right\} = \{x_i\} + h \left( \frac{3463}{19440} \{v_i\} + \frac{131}{720} \left\{ v_{i+\frac{1}{3}} \right\} - \frac{29}{720} \left\{ v_{i+\frac{2}{3}} \right\} + \frac{263}{19440} \{v_{i+1}\} \right) + h^2 \left( \frac{97}{9720} \{a_i\} - \frac{17}{9720} \{a_{i+1}\} \right) \quad (12)$$

$$\left\{ x_{i+\frac{2}{3}} \right\} = \{x_i\} + h \left( \frac{181}{1215} \{v_i\} + \frac{17}{45} \left\{ v_{i+\frac{1}{3}} \right\} + \frac{7}{45} \left\{ v_{i+\frac{2}{3}} \right\} - \frac{19}{1215} \{v_{i+1}\} \right) + h^2 \left( \frac{8}{1215} \{a_i\} + \frac{2}{1215} \{a_{i+1}\} \right)$$

نهایتاً، برای محاسبه و به‌روزرسانی بردار شتاب سیستم در نقاط میانی و انتهایی بازه  $\left\{ a_{i+\frac{1}{3}} \right\}$ ،  $\left\{ a_{i+\frac{2}{3}} \right\}$  و  $\{a_{i+1}\}$  را با جای‌گذاری مقادیر بردار تغییر مکان و سرعت سیستم در این نقاط زمانی محاسبه می‌کنیم. شتاب سیستم‌های غیرخطی چند درجه آزادی دارای اطلاعات بسیار مهمی از حالت سیستم می‌باشد که تاثیر بسیار زیادی در دقت محاسبات پاسخ سیستم دارد. براین اساس، مؤلفه‌های سیستم بایستی مستقیماً از معادله دیفرانسیلی حرکت به صورت زیر محاسبه شوند:

$$\begin{aligned} \left\{ a_{i+\frac{1}{3}} \right\} &= -[m]^{-1} \left( [m] \left\{ a_{g,i+\frac{1}{3}} \right\} + \left\{ F_{S,i+\frac{1}{3}} \right\} + \left\{ F_{D,i+\frac{1}{3}} \right\} \right) \\ \left\{ a_{i+\frac{2}{3}} \right\} &= -[m]^{-1} \left( [m] \left\{ a_{g,i+\frac{2}{3}} \right\} + \left\{ F_{S,i+\frac{2}{3}} \right\} + \left\{ F_{D,i+\frac{2}{3}} \right\} \right) \\ \left\{ a_{i+1} \right\} &= -[m]^{-1} \left( [m] \left\{ a_{g,i+1} \right\} + \left\{ F_{S,i+1} \right\} + \left\{ F_{D,i+1} \right\} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

به طور مشابه، در سیستم‌های خطی، می‌توان مقادیر شتاب را با استفاده از معادلات ۱۲ به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} \left\{ a_{i+\frac{1}{3}} \right\} &= -[m]^{-1} \left( [m] \left\{ a_{g,i+\frac{1}{3}} \right\} + [c] \left\{ v_{i+\frac{1}{3}} \right\} + [k] \left\{ x_{i+\frac{1}{3}} \right\} \right) \\ \left\{ a_{i+\frac{2}{3}} \right\} &= -[m]^{-1} \left( [m] \left\{ a_{g,i+\frac{2}{3}} \right\} + [c] \left\{ v_{i+\frac{2}{3}} \right\} + [k] \left\{ x_{i+\frac{2}{3}} \right\} \right) \\ \left\{ a_{i+1} \right\} &= -[m]^{-1} \left( [m] \left\{ a_{g,i+1} \right\} + [c] \left\{ v_{i+1} \right\} + [k] \left\{ x_{i+1} \right\} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

که در آن، مقادیر بردار شتاب زمین  $\left\{ a_{g,i+\frac{1}{3}} \right\}$  و  $\left\{ a_{g,i+\frac{2}{3}} \right\}$  با استفاده از فرمول‌های درون‌یابی خطی زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} \left\{ a_{g,i+\frac{1}{3}} \right\} &= \frac{2}{3} \left\{ a_{g,i} \right\} + \frac{1}{3} \left\{ a_{g,i+1} \right\} \\ \left\{ a_{g,i+\frac{2}{3}} \right\} &= \frac{1}{3} \left\{ a_{g,i} \right\} + \frac{2}{3} \left\{ a_{g,i+1} \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

جهت تسریع روند محاسبات و تخمین اولیه پاسخ در هر مرحله، تقریب چندجمله‌ای‌های سری تیلور زیر ارائه می‌شوند:

$$\begin{aligned} \left\{ x_{i+\frac{1}{3}} \right\} &= \left\{ x_i \right\} + \frac{h}{3} \left\{ v_i \right\} + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{3} \right)^2 \left\{ a_i \right\}, \left\{ v_{i+\frac{1}{3}} \right\} = \left\{ v_i \right\} + \left( \frac{h}{3} \right) \left\{ a_i \right\} \\ \left\{ x_{i+\frac{2}{3}} \right\} &= \left\{ x_i \right\} + \frac{2h}{3} \left\{ v_i \right\} + \frac{1}{2} \left( \frac{2h}{3} \right)^2 \left\{ a_i \right\}, \left\{ v_{i+\frac{2}{3}} \right\} = \left\{ v_i \right\} + \left( \frac{2h}{3} \right) \left\{ a_i \right\} \\ \left\{ x_{i+1} \right\} &= \left\{ x_i \right\} + h \left\{ v_i \right\} + \frac{1}{2} h^2 \left\{ a_i \right\}, \left\{ v_{i+1} \right\} = \left\{ v_i \right\} + h \left\{ a_i \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

معادلات و روابط و فرمول‌های ارائه‌شده مبانی اولیه روش جدید نیوتن-کاتس-هرمیت-چهار نقطه‌ای را تشکیل می‌دهند. روش ارائه‌شده قابلیت تحلیل سیستم‌های چند درجه آزادی خطی و غیرخطی را دارا می‌باشد. الگوریتم نظام‌مند پیاده‌سازی تحلیل خطی این روش در جداول ۱ ارائه‌شده است. با اینکه در الگوریتم تحلیل خطی از فرمول‌های درون‌یاب با دقت بالا استفاده شده است ولی می‌توان سایر جفت‌های درون‌یاب‌ها را نیز در آن قرار داد.

جدول ۲، مراحل گام‌به‌گام روش پیشنهادی نیوتن-کاتس-هرمیت-چهار نقطه‌ای غیر خطی را بیان می‌کند. فرمول‌های درون‌یاب این الگوریتم متفاوت با درون‌یاب‌های الگوریتم خطی انتخاب شده‌اند هرچند درون‌یاب‌های مورد استفاده در الگوریتم خطی را نیز می‌توانستیم در آن کار بگذاریم.

جدول ۱: الگوریتم روش جدید نیوتن-کاتس-هرمیت-چهار نقطه‌ای برای تحلیل تاریخچه زمانی سیستم‌های سازه‌ای خطی چند درجه آزادی

۱ اعمال شرایط اولیه برای شروع محاسبات با:

$$i = 1, t_1 = 0, \{x_1\} = \{x(0)\}, \{v_1\} = \{v(0)\}, \{a_1\} = -[m]^{-1} \left( [m] \{a_{g,1}\} + [c] \{v_1\} + [k] \{x_1\} \right)$$

۲ تخمین پاسخ سیستم در نقاط داخلی و انتهایی را تخمین بزنید (و یا همه آنها را صفر در نظر بگیرید):

$$\begin{aligned} \left\{ x_{i+\frac{1}{3}} \right\} &= \{x_i\} + \left( \frac{h}{3} \right) \{v_i\} + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{3} \right)^2 \{a_i\}, \left\{ v_{i+\frac{1}{3}} \right\} = \{v_i\} + \left( \frac{h}{3} \right) \{a_i\} \\ \left\{ x_{i+\frac{2}{3}} \right\} &= \{x_i\} + \left( \frac{2h}{3} \right) \{v_i\} + \frac{1}{2} \left( \frac{2h}{3} \right)^2 \{a_i\}, \left\{ v_{i+\frac{2}{3}} \right\} = \{v_i\} + \left( \frac{2h}{3} \right) \{a_i\} \\ \left\{ x_{i+1} \right\} &= \{x_i\} + h \{v_i\} + \frac{1}{2} h^2 \{a_i\}, \left\{ v_{i+1} \right\} = \{v_i\} + h \{a_i\} \end{aligned}$$

۳ روابط زیر را تا زمانی که  $x_{i+1}$  تا تعداد ارقام مورد نظر تثبیت شوند، تکرار کنید:

- به‌روزرسانی مقادیر بردار شتاب سیستم:

$$\left\{ a_{g,i+\frac{1}{3}} \right\} = \frac{2}{3} \{a_{g,i}\} + \frac{1}{3} \{a_{g,i+1}\}$$

$$\left\{ a_{g,i+\frac{2}{3}} \right\} = \frac{1}{3} \{a_{g,i}\} + \frac{2}{3} \{a_{g,i+1}\}$$

$$\left\{ a_{i+\frac{1}{3}} \right\} = -[m]^{-1} \left( [m] \left\{ a_{g,i+\frac{1}{3}} \right\} + [c] \left\{ v_{i+\frac{1}{3}} \right\} + [k] \left\{ x_{i+\frac{1}{3}} \right\} \right)$$

$$\left\{ a_{i+\frac{2}{3}} \right\} = -[m]^{-1} \left( [m] \left\{ a_{g,i+\frac{2}{3}} \right\} + [c] \left\{ v_{i+\frac{2}{3}} \right\} + [k] \left\{ x_{i+\frac{2}{3}} \right\} \right)$$

$$\left\{ a_{i+1} \right\} = -[m]^{-1} \left( [m] \left\{ a_{g,i+1} \right\} + [c] \left\{ v_{i+1} \right\} + [k] \left\{ x_{i+1} \right\} \right)$$

درون‌یابی مقادیر بردار تغییر مکان و بردار سرعت در نقاط داخلی بازه و انتهایی زمانی با استفاده از فرمول‌های درون‌یابی هرمیت:

$$\left\{ v_{i+\frac{1}{3}} \right\} = \left( \frac{8}{27} \{v_i\} + \frac{19}{27} \{v_{i+1}\} \right) + h \left( \frac{1}{27} \{a_i\} - \frac{1}{3} \left\{ a_{i+\frac{2}{3}} \right\} - \frac{2}{27} \{a_{i+1}\} \right)$$

$$\left\{ v_{i+\frac{2}{3}} \right\} = \left( \frac{19}{27} \{v_i\} + \frac{8}{27} \{v_{i+1}\} \right) + h \left( \frac{2}{27} \{a_i\} + \frac{1}{3} \left\{ a_{i+\frac{1}{3}} \right\} - \frac{1}{27} \{a_{i+1}\} \right)$$

$$\left\{ x_{i+\frac{1}{3}} \right\} = \left( \frac{64}{81} \{x_i\} + \frac{17}{81} \{x_{i+1}\} \right) + h \left( \frac{18}{81} \{v_i\} - \frac{2}{27} \{v_{i+1}\} \right) + h^2 \left( \frac{4}{243} \{a_i\} - \frac{2}{243} \{a_{i+1}\} \right)$$

$$\left\{ x_{i+\frac{2}{3}} \right\} = \left( \frac{17}{81} \{x_i\} + \frac{64}{81} \{x_{i+1}\} \right) + h \left( \frac{2}{27} \{v_i\} - \frac{16}{81} \{v_{i+1}\} \right) + h^2 \left( \frac{2}{243} \{a_i\} - \frac{4}{243} \{a_{i+1}\} \right)$$

- به‌روزرسانی مقادیر بردار تغییر مکان و سرعت در لحظه  $t_{i+1}$  با استفاده از فرمول‌های نیوتن-کاتس-چهار نقطه‌ای:

$$\left\{ v_{i+1} \right\} = \{v_i\} + h \left[ \frac{1}{8} \{a_i\} + \frac{3}{8} \left\{ a_{i+\frac{1}{3}} \right\} + \frac{3}{8} \left\{ a_{i+\frac{2}{3}} \right\} + \frac{1}{8} \{a_{i+1}\} \right]$$

$$\left\{ x_{i+1} \right\} = \{x_i\} + h \left[ \frac{13}{80} \{v_i\} + \frac{27}{80} \left\{ v_{i+\frac{1}{3}} \right\} + \frac{27}{80} \left\{ v_{i+\frac{2}{3}} \right\} + \frac{13}{80} \{v_{i+1}\} \right] + h^2 \left[ \frac{1}{120} \{a_i\} - \frac{1}{120} \{a_{i+1}\} \right]$$

۴ مقدار  $i = i+1$  قرار داده و مرحله ۳ را برای گام‌های بعدی تکرار کنید تا همه گام‌ها تحلیل شوند.

جدول ۲: الگوریتم روش جدید نیوتن-کاتس-هرمیت-چهار نقطه‌ای برای تحلیل تاریخچه زمانی سیستم‌های سازه‌ای غیرخطی چند درجه آزادی

۱ اعمال شرایط اولیه برای شروع محاسبات با:

$$i = 1, t_1 = 0, \{x_1\} = \{x(0)\}, \{v_1\} = \{v(0)\}, \{a_1\} = -[m]^{-1} \left( [m] \{a_{g,1}\} + [c] \{v_1\} + [k] \{x_1\} \right)$$

$$\{F_{S,1}\} = \{F_S(x_1)\}, \{F_{D,1}\} = \{F_D(v_1)\}$$

۲ تخمین پاسخ سیستم در نقاط داخلی و انتهایی را تخمین بزنید (و یا همه آنها را صفر در نظر بگیرید):

$$\left\{ x_{i+\frac{1}{3}} \right\} = \{x_i\} + \left( \frac{h}{3} \right) \{v_i\} + \frac{1}{2} \left( \frac{h}{3} \right)^2 \{a_i\}, \left\{ v_{i+\frac{1}{3}} \right\} = \{v_i\} + \left( \frac{h}{3} \right) \{a_i\}$$

$$\left\{ x_{i+\frac{2}{3}} \right\} = \{x_i\} + \left( \frac{2h}{3} \right) \{v_i\} + \frac{1}{2} \left( \frac{2h}{3} \right)^2 \{a_i\}, \left\{ v_{i+\frac{2}{3}} \right\} = \{v_i\} + \left( \frac{2h}{3} \right) \{a_i\}$$

$$\{x_{i+1}\} = \{x_i\} + h \{v_i\} + \frac{1}{2} h^2 \{a_i\}, \{v_{i+1}\} = \{v_i\} + h \{a_i\}$$

۳ روابط زیر را تا زمانی که  $x_{i+1}$  تا تعداد ارقام مورد نظر تثبیت شوند، تکرار کنید:

- محاسبه مقادیر بردار نیرو در اجزای سیستم:

$$\left\{ F_{S,i+\frac{1}{3}} \right\} = \left\{ F_S \left( x_{i+\frac{1}{3}} \right) \right\}, \left\{ F_{S,i+\frac{2}{3}} \right\} = \left\{ F_S \left( x_{i+\frac{2}{3}} \right) \right\}, \left\{ F_{S,i+1} \right\} = \left\{ F_S \left( x_{i+1} \right) \right\}$$

$$\left\{ F_{D,i+\frac{1}{3}} \right\} = \left\{ F_D \left( x_{i+\frac{1}{3}} \right) \right\}, \left\{ F_{D,i+\frac{2}{3}} \right\} = \left\{ F_D \left( x_{i+\frac{2}{3}} \right) \right\}, \left\{ F_{D,i+1} \right\} = \left\{ F_D \left( x_{i+1} \right) \right\}$$

- به روزرسانی مقادیر بردار شتاب سیستم:

$$\left\{ a_{g,i+\frac{1}{3}} \right\} = \frac{2}{3} \{a_{g,i}\} + \frac{1}{3} \{a_{g,i+1}\}, \left\{ a_{g,i+\frac{2}{3}} \right\} = \frac{1}{3} \{a_{g,i}\} + \frac{2}{3} \{a_{g,i+1}\}$$

$$\left\{ a_{i+\frac{1}{3}} \right\} = -[m]^{-1} \left( [m] \left\{ a_{g,i+\frac{1}{3}} \right\} + \left\{ F_{S,i+\frac{1}{3}} \right\} + \left\{ F_{D,i+\frac{1}{3}} \right\} \right)$$

$$\left\{ a_{i+\frac{2}{3}} \right\} = -[m]^{-1} \left( [m] \left\{ a_{g,i+\frac{2}{3}} \right\} + \left\{ F_{S,i+\frac{2}{3}} \right\} + \left\{ F_{D,i+\frac{2}{3}} \right\} \right)$$

$$\{a_{i+1}\} = -[m]^{-1} \left( [m] \{a_{g,i+1}\} + \{F_{S,i+1}\} + \{F_{D,i+1}\} \right)$$

- درونیابی مقادیر بردار تغییر مکان و بردار سرعت در نقاط داخلی بازه و انتهایی زمانی با استفاده از فرمول‌های درونیابی هرمیت:

$$\left\{ v_{i+\frac{1}{3}} \right\} = \left( \frac{20}{27} \{v_i\} + \frac{7}{27} \{v_{i+1}\} \right) + h \left( \frac{4}{27} \{a_i\} - \frac{2}{27} \{a_{i+1}\} \right)$$

$$\left\{ v_{i+\frac{2}{3}} \right\} = \left( \frac{7}{27} \{v_i\} + \frac{20}{27} \{v_{i+1}\} \right) + h \left( \frac{2}{27} \{a_i\} - \frac{4}{27} \{a_{i+1}\} \right)$$

$$\left\{ x_{i+\frac{1}{3}} \right\} = \{x_i\} + h \left( \frac{3463}{19440} \{v_i\} + \frac{131}{720} \left\{ v_{i+\frac{1}{3}} \right\} - \frac{29}{720} \left\{ v_{i+\frac{2}{3}} \right\} + \frac{263}{19440} \{v_{i+1}\} \right) + h^2 \left( \frac{97}{9720} \{a_i\} - \frac{17}{9720} \{a_{i+1}\} \right)$$

$$\left\{ x_{i+\frac{2}{3}} \right\} = \{x_i\} + h \left( \frac{181}{1215} \{v_i\} + \frac{17}{45} \left\{ v_{i+\frac{1}{3}} \right\} + \frac{7}{45} \left\{ v_{i+\frac{2}{3}} \right\} - \frac{19}{1215} \{v_{i+1}\} \right) + h^2 \left( \frac{8}{1215} \{a_i\} + \frac{2}{1215} \{a_{i+1}\} \right)$$

- به روزرسانی مقادیر بردار تغییر مکان و سرعت در لحظه  $t_{i+1}$  با استفاده از فرمول‌های نیوتن-کاتس-چهار نقطه‌ای:

$$\{v_{i+1}\} = \{v_i\} + h \left[ \frac{1}{8} \{a_i\} + \frac{3}{8} \left\{ a_{i+\frac{1}{3}} \right\} + \frac{3}{8} \left\{ a_{i+\frac{2}{3}} \right\} + \frac{1}{8} \{a_{i+1}\} \right]$$

$$\{x_{i+1}\} = \{x_i\} + h \left[ \frac{13}{80} \{v_i\} + \frac{27}{80} \left\{ v_{i+\frac{1}{3}} \right\} + \frac{27}{80} \left\{ v_{i+\frac{2}{3}} \right\} + \frac{13}{80} \{v_{i+1}\} \right] + h^2 \left[ \frac{1}{120} \{a_i\} - \frac{1}{120} \{a_{i+1}\} \right]$$

۴ مقدار  $i=i+1$  قرار داده و مرحله ۳ را برای گام‌های بعدی تکرار کنید تا همه گام‌ها تحلیل شوند.

#### ۴- مثال‌ها

چهار مثال عددی برای مقایسه روش جدید با روش‌های رایج ارائه می‌شود. مدل‌سازی مثال‌ها در نرم‌افزار متلب<sup>۱۲</sup> انجام شده است. بارگذاری‌ها نیز با رکورد معروف زلزله ال-سنتر که منحنی آن در شکل ۴ نشان داده شده است، انجام می‌شود. در مثال اول یک سیستم

<sup>12</sup> MATLAB Software

خطی پایستار، در مثال دوم یک سیستم غیرخطی میرا و در مثال سوم یک سیستم خطی میرا، و نهایتاً در مثال چهارم یک سیستم چند درجه آزادی مورد بررسی قرار گرفته است. مشخصات سیستم‌های خطی، غیرخطی و میرای خطی مثال‌ها در جدول ۳ آورده شده است. لازم به ذکر است، در مثال دوم رفتار فنر غیرخطی بوده و عامل غیرخطی بودن سیستم، رفتار فنر می‌باشد. با توجه به اینکه گام تحلیل در مثال‌های اول تا سوم ۰/۰۱ و گام تحلیلی زلزله ال-سنترو ۰/۰۲ می‌باشد؛ بدین جهت، با درون‌یابی خطی مقادیر شتاب‌نگاشت را به گام کوچک‌تر می‌بریم.

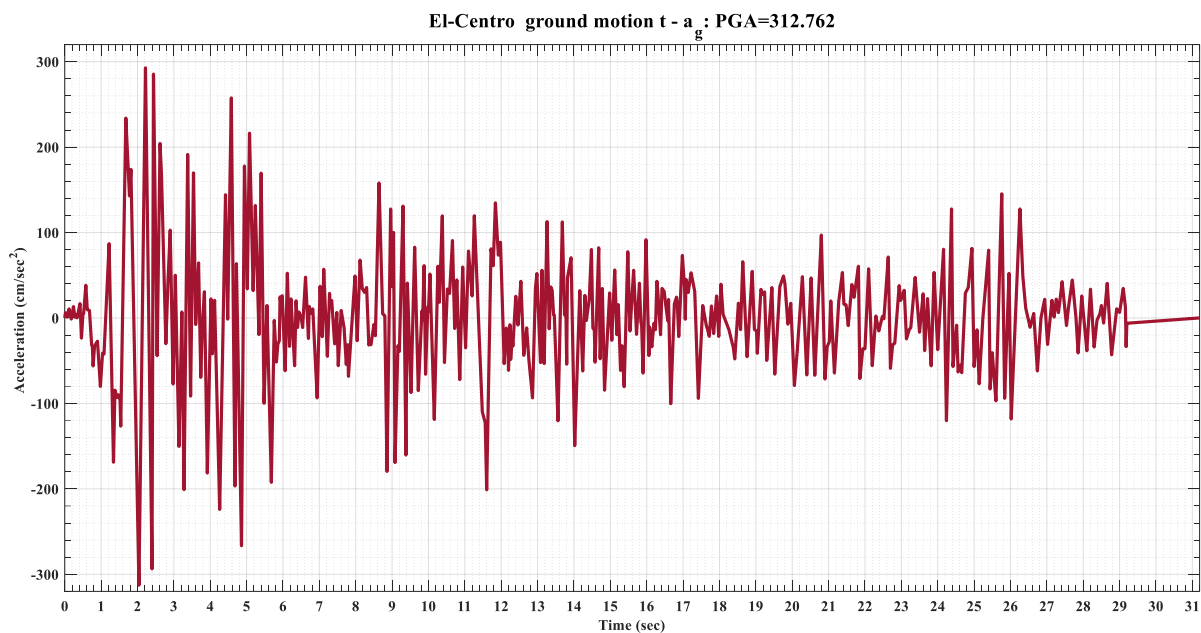
جدول ۳: مشخصات سیستم‌های خطی، غیرخطی و میرای خطی برای مثال‌ها

مشخصات سیستم		مشخصات پیکربندی سیستم		مشخصات سیستم	
مثال‌ها	مثال اول	مثال دوم	مثال سوم	مثال چهارم	
جرم (کیلوگرم)	۴۵/۵۹۴	۴۵/۵۹۴	۴۵/۵۹۴	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ kip.sec <sup>2</sup> /in	
نوع سیستم	یک درجه آزادی	یک درجه آزادی	یک درجه آزادی	چند درجه آزادی	
دوره تناوب طبیعی (ثانیه)	۰/۱	۰/۱	۰/۱	۰/۱	
نسبت میرایی	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۵	۰/۰۵	
ثابت فنر (کیلو نیوتن بر سانتی‌متر)	۱۸۰۰	۱۸۰۰	۱۸۰۰	$\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ kip/in	
گام تحریک (ثانیه)	۰/۰۲	۰/۰۲	۰/۰۲	۰/۱	
گام تحلیل (ثانیه)	۰/۰۲	۰/۰۲	۰/۰۲	۰/۱	

#### ۱-۴- مثال اول: سیستم یک درجه آزادی خطی تحت اثر زلزله ال-سنترو

در این مثال یک سیستم یک درجه آزادی خطی تحت تحریک زلزله ال-سنترو مورد تحلیل و ارزیابی قرار گرفته است. این سیستم در لحظه آغازین، از مبدأ مختصات و از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند. پاسخ سیستم خطی با روش‌های نیمه‌تحلیلی انتگرال دوهمامل، روش نیوتن-کاتس-هرمیت-چهار نقطه‌ای و نیومارک-بتا محاسبه شده و در شکل ۵ نشان داده شده است. بدیهی است که روش جدید قادر به محاسبه دقیق‌تر منحنی پاسخ با گام زمانی تحلیل  $h = 0.01$  sec می‌باشد. همچنین، انتظار می‌رود روش انتگرال دوهمامل بسیار دقیق عمل می‌کند؛ اما محاسبات این روش از مرتبه دوم بوده و در مقایسه با روش جدید بسیار زمان‌بر می‌باشد. لازم به ذکر است، روش ارائه شده و روش انتگرال دوهمامل همگی پاسخ‌های تقریباً یکسان با اختلاف ناچیز ارائه می‌دهند، درحالی‌که روش نیومارک-بتا در این زمان تناوب دارای خطا قابل ملاحظه‌ای می‌باشد. این خطای زیاد در روش‌های رایج به دلیل انحراف مقدار زمان تناوب سیستم از زمان تناوب واقعی آن در حین اجرای الگوریتم روش‌های مذکور بوده و غالباً در تحلیل زمان تناوب‌های کمتر از ۰/۱ ثانیه عارض می‌شود. خطای حاضر در مراجع [۳۲] به خطای شیفت فاز<sup>۱۳</sup> معروف است. از آنجایی‌که سیستم‌های سازه‌ای اغلب دارای زمان تناوب‌های بزرگ‌تر از ۰/۱ ثانیه هستند، این خطا در سازه‌های واقعی کمتر مورد توجه و بحث قرار می‌گیرد؛ اما برای محک‌زدن فرمول‌بندی‌های جدید بسیار حائز اهمیت می‌باشد.

<sup>13</sup> Phase shift



شکل ۴: رکورد زلزله ال-سنترو مورد استفاده در بارگذاری سیستم‌ها



شکل ۵: پاسخ لرزه‌ای تغییرمکان-زمان سیستم خطی یک درجه آزادی برای مثال اول

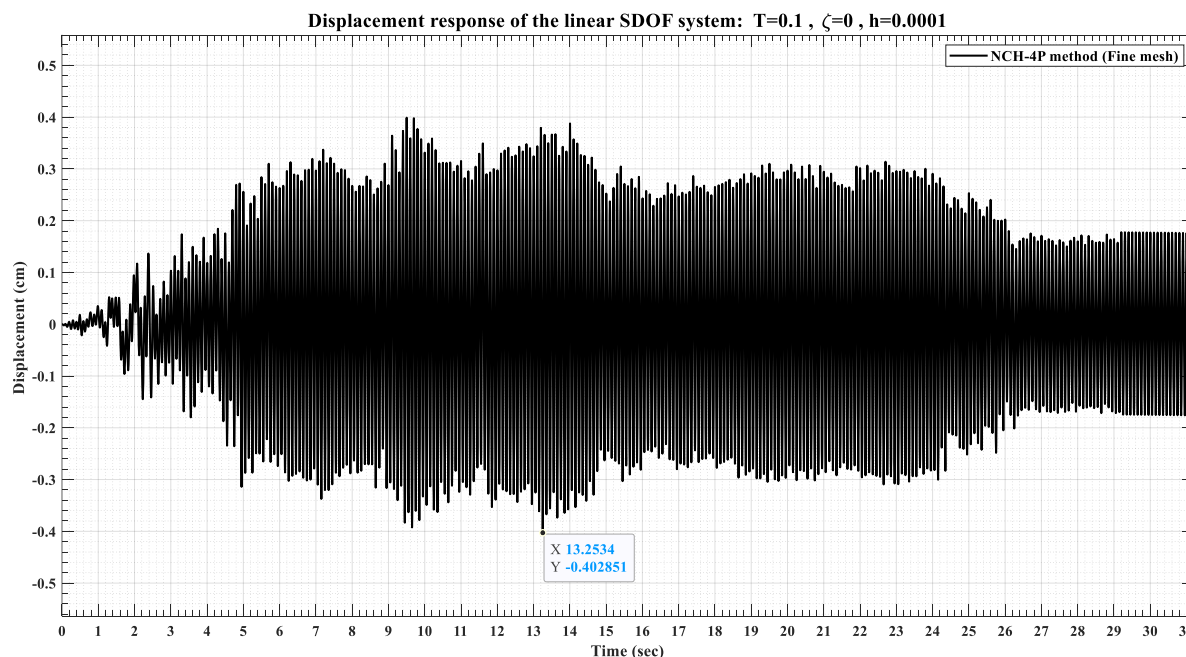
نتایج ارزیابی‌ها نشان می‌دهد، روش ارائه‌شده دقت، پایداری و هم‌گرایی بالایی دارد اما حجم محاسباتی بیشتری نسبت به سایر روش‌های گام‌به‌گام دارد. برخلاف روش نیومارک-بتا که نیازمند گزینش مقادیر مناسبی برای پارامترهای بتا  $\beta$  و گاما  $\gamma$  است، در روش حاضر تمام ضرایب و وزن‌های فرمول‌بندی با دقت بالا و به‌صورت اعداد گویا ارائه‌شده‌اند و روابط آن فاقد مؤلفه اضافی برای تنظیم هم‌گرایی و دقت می‌باشد.

جدول ۴: مقادیر حداکثر پاسخ، زمان تحلیل و مجذور میانگین مربعات سیستم خطی یک درجه آزادی در مثال اول

پارامترها	روش انتگرال دوهمال	روش نیونن-کاتس-هرمیت-چهار نقطه‌ای	روش نیومارک-بتا
تغییر مکان بیشینه (سانتی‌متر)	۰/۴۱۰۴	۰/۳۹۷۱	۰/۲۳۰۱
سرعت بیشینه (سانتی‌متر بر ثانیه)	-	۲۴/۵۵۶۸	۱۳/۷۱۲۵
شتاب بیشینه (سانتی‌متر بر مجذور ثانیه)	-	۱۵۱۱/۸۳۷۲	۸۴۹/۳۴۷۹
تعداد گام تکرار شونده	۱	۵	۱
مجذور میانگین مربعات	۰/۲۵۸۹	۰/۲۵۱۰	۰/۱۴۴۴
اختلاف مجذور میانگین مربعات از پاسخ دقیق (درصد)	۰/۰۰	۳/۰۴۰۴	۴۴/۲۲۲۵
زمان اجرا (ثانیه)	۰/۱۰۶۰	۰/۰۰۹۸	۰/۰۰۲۰

## ۲-۴- مثال دوم: سیستم یک درجه آزادی غیرخطی تحت اثر زلزله ال-سنتر

در این بخش سیستم غیرخطی تحت اثر بارگذاری رکورد ال-سنتر مورد تحلیل و ارزیابی قرار گرفته است. برای شناسایی رفتار غیرخطی مؤلفه فنر، ابتدا باید حداکثر تغییر مکان رفتار خطی سیستم را محاسبه کنیم. اگرچه این سیستم در مثال قبل تحلیل شده است، اما در این مثال با گام‌های ریزتر  $h = 0.0001 \text{ sec}$ ، مجدداً مورد تحلیل و ارزیابی قرار می‌گیرد تا تخمین دقیق‌تری از تغییر شکل بیشینه الاستیک ( $x_{\max, \text{elastic}}$ ) به دست آید. پاسخ ریزگام<sup>۱۴</sup> روش ارائه شده نیز در شکل ۶ ارائه شده است. مطابق شکل مذکور، تغییر شکل بیشینه برابر با  $x_{\max, \text{elastic}} = 0.4029 \text{ cm}$  می‌باشد که در زمان  $t = 13.2534 \text{ sec}$  رخ می‌دهد.



شکل ۶: پاسخ لرزه‌ای ریزگام تغییر مکان-زمان سیستم خطی یک درجه آزادی برای مثال دوم

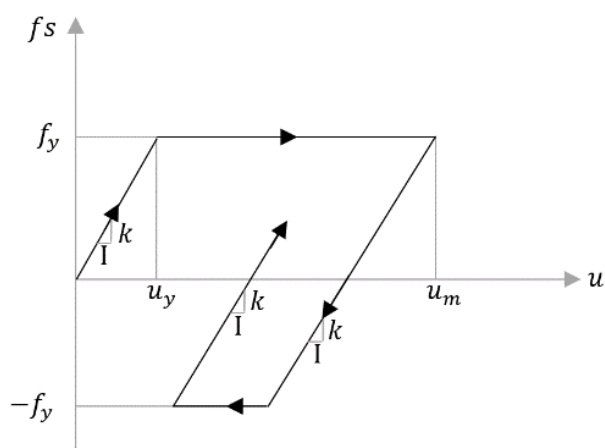
حال رفتار غیرخطی سیستم را به صورت شکل ۷ تعریف می‌کنیم. مقدار نیروی تسلیم به صورت  $\mu f_0$  می‌باشد که در آن پارامتر  $\mu$  ضریب شکل‌پذیری و پارامتر  $f_0$  بیشینه نیروی فنریت در سیستم الاستیک خطی بوده و به صورت زیر بدست می‌آید:

<sup>14</sup> Fine mesh

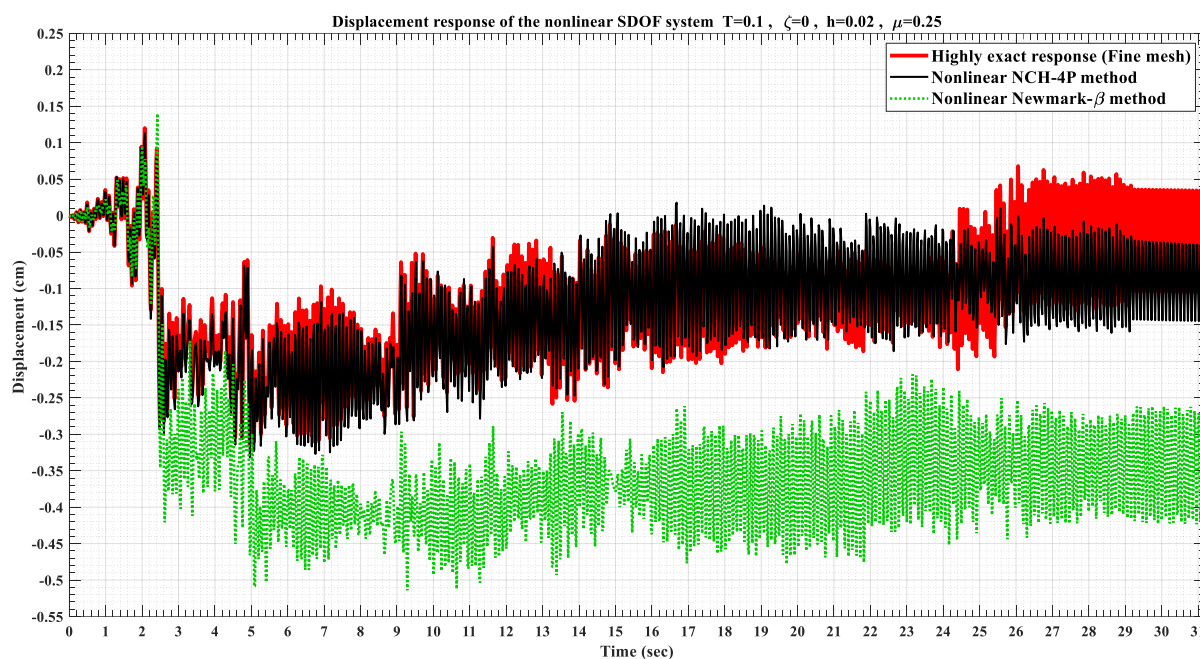
$$f_0 = kx_{e,\max} = 1800 \times 0.402851 = 725.131 \text{ kN} \quad (17)$$

که با فرض  $\mu = 0.25$ ، می‌توان نوشت:

$$f_y = \mu f_0 = 0.25 \times 725.131 = 181.282 \text{ kN} \quad (18)$$



شکل ۷: مدل رفتاری ساده‌سازی شده الاستوپلاستیک نیرو-تغییر شکل در مثال دوم



شکل ۸: پاسخ لرزه‌ای تغییر مکان-زمان سیستم غیرخطی یک درجه آزادی برای مثال دوم

شکل ۸، پاسخ‌های به‌دست آمده از نسخه غیرخطی روش ارائه‌شده را با روش غیرخطی نیومارک-بتا و منحنی پاسخ ریزگام روش ارائه‌شده مقایسه می‌کند. برای مقایسه کمی، خلاصه‌ای از نتایج عددی در جدول ۵ گزارش شده است. نتایج به‌وضوح نشان می‌دهد، تطابق بهتری بین

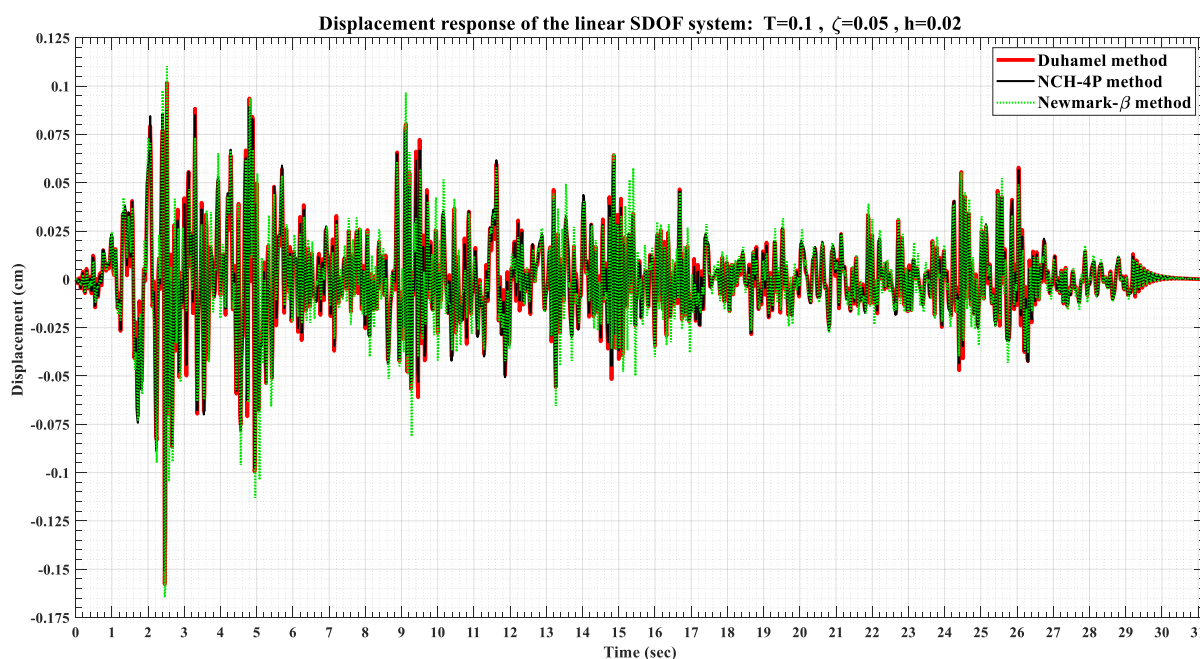
پاسخ به دست آمده از روش ارائه شده و پاسخ ریزگام وجود دارد. در شکل ۸، مقادیر بیشینه پاسخ روش ارائه شده نیز مطابقت بالایی با منحنی پاسخ ریزگام دارد. به وضوح در این مثال دقت ناکافی روش نیومارک-بتای غیر خطی با محاسبات تکرار نیوتن نمایان می باشد.

جدول ۵: مقادیر حداکثر پاسخ، زمان تحلیل و مجذور میانگین مربعات سیستم غیرخطی یک درجه آزادی در مثال دوم

مؤلفه‌ها	پاسخ ریزگام با روش ارائه شده	روش نیوتن-کانتس-هرمیت-چهار نقطه‌ای	روش نیومارک-بتا
تغییر مکان بیشینه (سانتی‌متر)	۰/۳۱۴۹	۰/۳۲۹۰	۰/۴۳۴۷
سرعت بیشینه (سانتی‌متر بر ثانیه)	۸/۰۱۸۱	۸/۰۳۸۴	۸/۲۱۶۶
شتاب بیشینه (سانتی‌متر بر مجذور ثانیه)	۴۰۴/۴۱۲۵	۴۰۸/۰۳۳۲	۴۰۲/۳۶۶۸
تعداد گام تکرار شونده	۶	۶	۶
مجذور میانگین مربعات	۰/۱۴۶۱	۰/۱۴۵۱	۰/۲۶۰۵
اختلاف مجذور میانگین مربعات از پاسخ دقیق (درصد)	۰/۰	۰/۷۰۷۴	۷۸/۲۷۳۶
زمان اجرا (ثانیه)	۰/۴۶۴۸	۰/۰۲۰۰	۰/۰۰۲۱

### ۳-۴- مثال سوم: سیستم یک درجه آزادی میرای خطی تحت اثر زلزله ال-سنترال

در این بخش یک سیستم میرای خطی تحت اثر زلزله ال-سنترال تحلیل و مورد ارزیابی قرار گرفته است. سیستم در لحظه ابتدایی، از مبدأ نوسان شروع به حرکت می کند. در این مثال برخلاف دو مثال قبلی نسبت میرایی برابر با مقدار متعارف در سازه‌های رایج و برابر با پنج درصد در نظر گرفته شده است. انتظار می رود، روش ارائه شده حتی در صورت دارا بودن میرایی نیز نسبت به روش انتگرال دوهمال و روش نیومارک-بتا دقیق تر باشد که براساس نتایج دو مثال قبلی در صورتی که سیستم بدون میرا دقت، سرعت، پایداری و هم‌گرایی بالایی داشته باشد، در صورت وجود میرایی این خواست‌گاه به سهولت محقق خواهد شد. منحنی‌های پاسخ روش ارائه شده با روش‌های نیومارک-بتا و انتگرال دوهمال در شکل ۹ و نتایج عددی در جدول ۶ نمایش داده شده است.



شکل ۹: پاسخ تغییر مکان-زمان سیستم میرای خطی یک درجه آزادی در مثال سوم

جدول ۶: مقادیر حداکثر پاسخ، زمان تحلیل و مجذور میانگین مربعات سیستم میرای خطی یک درجه آزادی در مثال سوم

پارامترها	روش انتگرال دو هامل	روش نیونن-کاتس-هرمیت-چهار نقطه‌ای	روش نیومارک-بتا
تغییر مکان بیشینه (سانتی‌متر)	۰/۱۶۱۲	۰/۱۵۹۱	۰/۱۶۴۹
سرعت بیشینه (سانتی‌متر بر ثانیه)	-	۷/۱۷۲۵	۷/۳۵۱۳
شتاب بیشینه (سانتی‌متر بر مجذور ثانیه)	-	۴۳۳/۱۵۹۰	۴۵۶/۵۹۸۳
تعداد گام تکرار شونده	۱	۵	۱
مجذور میانگین مربعات	۰/۰۲۷۱	۰/۰۲۷۰	۰/۰۲۷۶
اختلاف مجذور میانگین مربعات از پاسخ دقیق (درصد)	۰/۰۰	۰/۲۱۹۱	۱/۸۷۲۲
زمان اجرا (ثانیه)	۰/۱۶۷۰	۰/۰۱۰۵	۰/۰۰۱۹

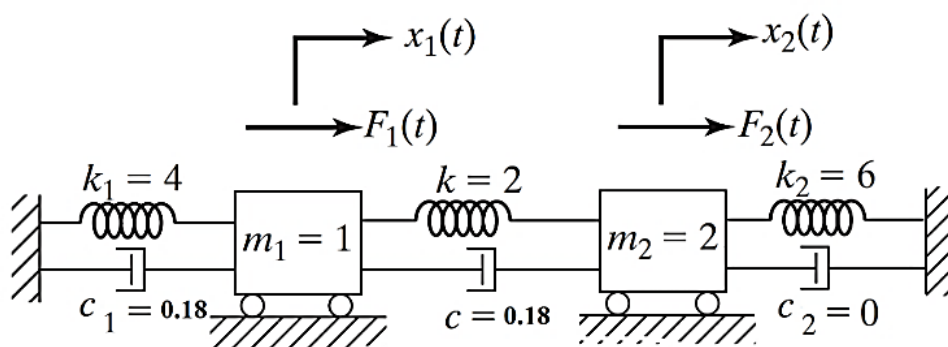
### ۳-۴- مثال چهارم: سیستم چند درجه آزادی میرای غیر خطی تحت اثر نیروهای خارجی

برای صحت‌سنجی فرمول‌بندی جدید، در این مثال یک سیستم چند درجه آزادی را تحت بررسی قرار می‌دهیم که در شکل ۱۰ نشان داده شده است. این مثال از کتاب ارتعاشات راتو برگرفته شده است [۳۳]. در سیستم مورد بررسی، یک سیستم دو درجه آزادی تحت بارگذاری از نوع نیروهای خارجی واقع شده است. مطابق مبانی و فرمول‌های ارتعاشات، ماتریس‌های جرم، میرایی، و سختی سیستم مذکور به صورت زیر قابل تعیین می‌باشد:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ kip.sec}^2/\text{in} \quad (19)$$

$$[c] = \begin{bmatrix} c_1 + c & -c \\ -c & c_2 + c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.36 & -0.18 \\ -0.18 & 0.18 \end{bmatrix} \text{ kip.sec/in} \quad (20)$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 + k & -k \\ -k & k_2 + k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \text{ kip/in} \quad (21)$$



شکل ۱۰: سیستم دینامیکی دو درجه آزادی تحت بارهای خارجی در مثال چهارم [۶]

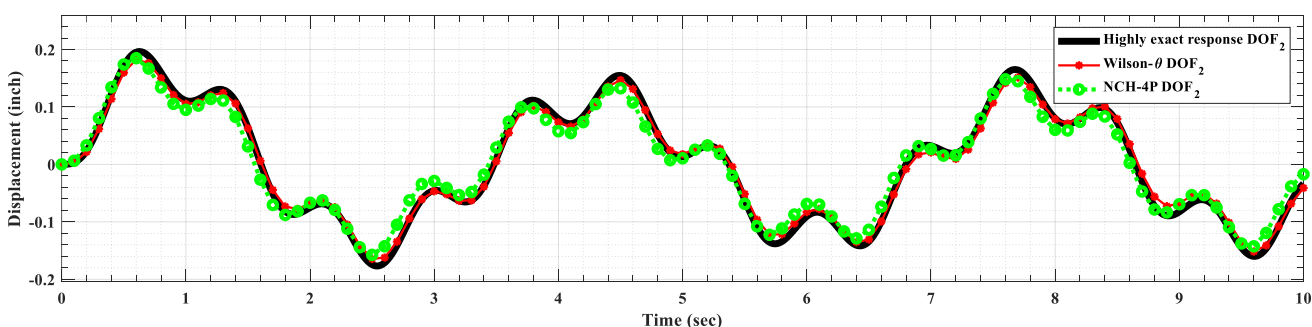
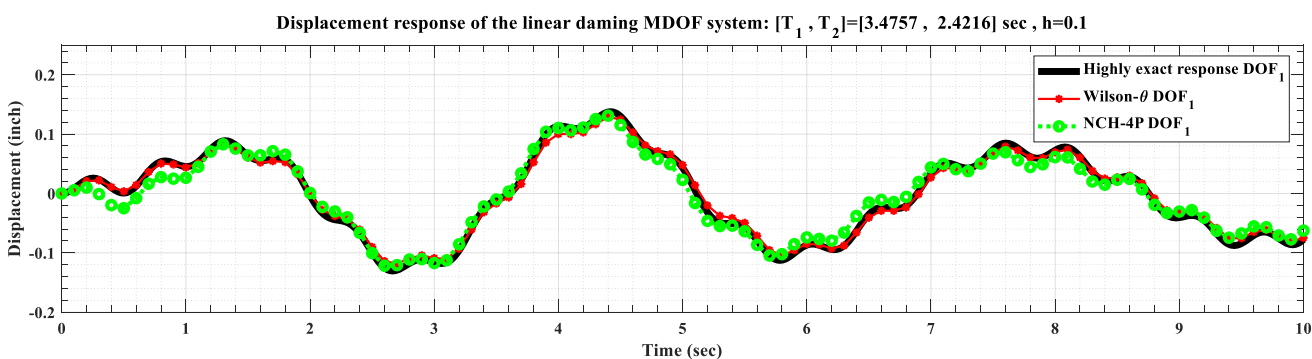
سیستم دینامیکی از حالت سکون و بدون تغییر شکل اولیه (با شرایط اولیه صفر) شروع به حرکت می‌کند. بردار نیروی محرک به صورت زیر معرفی می‌گردد:

$$\{F(t)\} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \cos(12t) \\ 5 \sin(8t) \end{Bmatrix} \text{ kip} \quad (22)$$

بر اساس تئوری ارتعاشات، مقادیر دوره تناوب مُد اول و دوم ارتعاش  $T_1 = 3.475 \text{ sec}$  و  $T_2 = 2.421 \text{ sec}$  تعیین می‌شود. طول گام زمانی تحلیل نیز برابر  $h = 0.1 \text{ sec}$  فرض شده است که حدوداً دو درصد زمان تناوب مُد دوم ارتعاش می‌شود. پاسخ‌های به‌دست آمده برای هر دو درجه آزادی سیستم در شکل ۱۰ ترسیم و مقایسه شده‌اند. علاوه بر آن، خلاصه‌ای از نتایج عددی به‌دست آمده در جدول ۷ ارائه شده است. نتایج حاصله تطابق بسیار بالای روش پیشنهادی را با روش ویلسون-تتا نشان می‌دهد. هر چند روش نیوتن-کاتس-هرمیت-چهار نقطه‌ای به سرعت روش ویلسون-تتا نمی‌باشد اما دقت بالایی دارد.

جدول ۷: مقادیر حداکثر پاسخ، زمان تحلیل و مجذور میانگین مربعات چند درجه آزادی میرای غیرخطی تحت اثر نیروهای خارجی در مثال چهارم

پارامترها	پاسخ ریزگام روش ارائه شده	روش نیوتن-کاتس-هرمیت-چهار نقطه‌ای	روش ویلسون-تتا
تغییر مکان بیشینه (اینچ)	$\begin{bmatrix} 0.1377 \\ 0.1964 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1311 \\ 0.1849 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.1293 \\ 0.1825 \end{bmatrix}$
سرعت بیشینه (اینچ بر ثانیه)	$\begin{bmatrix} 0.4247 \\ 0.6190 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.4169 \\ 0.5898 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.3833 \\ 0.5678 \end{bmatrix}$
شتاب بیشینه (اینچ بر مجذور ثانیه)	$\begin{bmatrix} 2.5531 \\ 3.2596 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.4536 \\ 3.2277 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.3729 \\ 3.1611 \end{bmatrix}$
تعداد گام تکرار شونده	۳	۳	۱
مجذور میانگین مربعات	$\begin{bmatrix} 0.0766 \\ 0.0921 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.0708 \\ 0.0834 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.0725 \\ 0.0869 \end{bmatrix}$
اختلاف مجذور میانگین مربعات از پاسخ دقیق (درصد)	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7.5 \\ 9.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5.4 \\ 5.6 \end{bmatrix}$
زمان اجرا (ثانیه)	۳/۳۰۱۵	۰/۰۱۵۹	۰/۰۰۸۵



شکل ۱۰: پاسخ‌های تغییر مکان-زمان سیستم میرای غیرخطی چند درجه آزادی در مثال چهارم.

## ۵- نتایج و بحث

مقادیر حداکثر پاسخ، زمان تحلیل، مجذور میانگین مربعات ( $RMS^{15}$ ) و درصد اختلاف مجذور میانگین مربعات از پاسخ دقیق روش‌های ارزیابی شده در مثال‌ها به ترتیب در جداول ۴ تا ۷ خلاصه شده‌اند. باتوجه به جدول ۴، در ارزیابی سیستم‌های خطی انتگرال دوهمال دارای پایین‌ترین سرعت و روش نیومارک-بتا با اختلاف بسیار کم نسبت به روش جدید سریع‌ترین روش می‌باشد. لازم به ذکر است، نسخه کنونی روش ارائه شده از نظر سرعت هم‌پای روش نیومارک-بتا نمی‌باشد؛ اما در نسخه‌های جدید روش ارائه شده این اختلاف ناچیز نیز بهبود بخشیده خواهد شد. با این وجود، میزان خطای روش ارائه شده در مقایسه با روش دقیق انتگرال دوهمال نزدیک به ۳ درصد اما این میزان خطا در روش نیومارک بیش از ۴۴ درصد می‌باشد که این امر نشان از دقت بالای روش ارائه شده می‌باشد. در جدول ۵ نیز همانند مورد قبلی، در ارزیابی سیستم‌های غیرخطی روش نیومارک-بتا سریع‌تر می‌باشد؛ اما از نظر دقت روش جدید دقیق و با خطای کمتر از یک درصد نسبت به پاسخ ریزگام عمل می‌کند در حالی که خطای روش غیرخطی نیومارک-بتا به بیش از ۷۸ درصد می‌رسد. بنابراین، در سیستم‌های غیرخطی نیز عملکرد روش ارائه شده رضایت‌بخش‌تر می‌باشد. در جدول ۶ نیز توانمندی روش جدید در تحلیل سیستم‌های دارای میرایی نشان داده شده است. در این مثال نیز همانند سیستم‌های بدون میرایی انتگرال دوهمال پایین‌ترین سرعت و روش نیومارک سریع‌ترین تحلیل را داشتند. نهایتاً، مثال چهارم به یک سیستم چند درجه آزادی می‌پردازد. در این مثال، نتایج روش حاضر با روش معروف ویلسون-تتای غیرخطی مطابقت داده شده است. نظر به مقادیر عددی جدول ۷ و شکل ۱۰، عملکرد بالای روش جدید را در تحلیل سیستم‌های چند درجه آزادی نشان می‌دهد.

## ۶- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، یک فرمول‌بندی عددی بسیار توانمند و ساده تحت عنوان روش نیوتن-کاتس-هرمیت-چهار نقطه‌ای یا به اختصار NCH-4P برای تحلیل دینامیکی سیستم‌های خطی و غیرخطی ارائه شد. از مهم‌ترین مزایای روش ارائه شده، یکسان بودن فرمول‌های اصلی آن برای تحلیل سیستم‌های خطی و غیرخطی می‌باشد. برخلاف روش نیومارک-بتا که از تکرار نیوتن برای انعکاس اثرات غیرخطی استفاده می‌کند؛ روش ارائه شده مکانیسم مستقلی برای تحلیل سیستم‌های خطی ندارد و صرفاً روابط اصلی را به صورت حلقه‌ای تکرار می‌کند. نتایج ارزیابی و مقایسه روش ارائه شده نشان می‌دهد که روش پیشنهادی می‌تواند به عنوان یک ابزار تحلیلی قابل اعتماد در محاسبه پاسخ لرزه‌ای سازه‌ها و تحلیل تاریخچه زمانی سیستم‌های یک و چند درجه آزادی معرفی گردد. سایر مزایای روش ارائه شده به صورت زیر قابل ذکر است:

- برنامه‌نویسی کامپیوتری آن بسیار ساده می‌باشد.
- انواع تحریک‌ها مانند هارمونیک، ضربه‌ای و تحریک زلزله نامنظم را پوشش می‌دهد.
- از محاسبات پیشرفته ریاضی اجتناب شده و محاسبات آن صرفاً مبتنی بر عملیات جبری ساده می‌باشد.
- روش ارائه شده از نظر دقت مناسبی دارد و خطاهای تقریب، صرف نظر از منبع آن‌ها به گام‌های بعدی تسری پیدا نمی‌کند.

سرانجام، نسخه فعلی اولین نسخه فرمول‌بندی معرفی شده است و مطالعات بیشتر جهت توسعه و ارتقا آن در دست انجام است.

## مراجع

- [1] Brezinski, C. and L. Wuytack. (2012). *Numerical Analysis: Historical Developments in the 20th Century*. 64-238 Ed. New York, USA: Elsevier Science. 512.
- [2] Stuart, A. M. (1994). Numerical analysis of dynamical systems. *Acta numerica*, 3(1), 467-572. <https://doi.org/10.1017/S0962492900002488>.
- [3] Hochbruck, M. and A. Ostermann. (2010). Exponential integrators. *Acta Numerica*, 19(1), 209-286. <https://doi.org/10.1017/S0962492910000048>.

<sup>15</sup> Root mean square

- [4] Katsikadelis, J. T. (2020). *Dynamic Analysis of Structures*. 6th Ed. New York, USA: Elsevier Science. 512.
- [5] Paz, M. and W. Leigh. (2004). *Damped Single Degree-of-Freedom System*. 5th Ed. Netherlands: Springer. 790.
- [6] Chopra, A. K. (2007). *Dynamics of Structures*. 2nd Ed. New Delhi: Pearson Education. 844.
- [7] Veletsos, A., N. Newmark and C. Chelapati. (1965). Deformation spectra for elastic and elastoplastic systems subjected to ground shock and earthquake motions. In: *Proceedings of the 3rd world conference on earthquake engineering*. New Zealand: American Society of Civil Engineers, 663-682. <https://doi.org/10.13140/RG.2.1.4008.8167>.
- [8] Izadifard, R. A., S. Mollaei and M. E. N. Omran. (2016). Preparing pressure-impulse diagrams for reinforced concrete columns with constant axial load using single degree of freedom approach. *International Journal of Advancements in Technology*, 7(4), 9. <http://dx.doi.org/10.4172/0976-4860.1000173>.
- [9] Newmark, N. M. (1959). A method of computation for structural dynamics. *Journal of the engineering mechanics division*, 85(3), 67-94. <https://doi.org/10.1061/taceat.0008448>.
- [10] Ebeling R.M, Green R.A and French S.E. (1997). *Accuracy of response of single-degree-of-freedom systems to ground motion*. [online] Washington, D.C: U. S. A. C. o. Engineers, pp. 6-26. Available at: [https://www.researchgate.net/publication/272682432\\_Accuracy\\_of\\_Response\\_of\\_Single-Degree-of-Freedom\\_Systems\\_to\\_Ground\\_Motion](https://www.researchgate.net/publication/272682432_Accuracy_of_Response_of_Single-Degree-of-Freedom_Systems_to_Ground_Motion) [1997.12.01].
- [11] Li Q.S. (2002). Forced vibrations of single-degree-of-freedom systems with nonperiodically time-varying parameters. *Journal of engineering mechanics*, 128(12), 1267-1275. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2002\)128:12\(1267\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:12(1267)).
- [12] Chang, S. Y. (2004). Studies of Newmark method for solving nonlinear systems:(I) basic analysis. *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, 27(5), 651-662. <http://dx.doi.org/10.1080/02533839.2004.9670913>.
- [13] Li, P. and B. Wu. (2004). An iteration approach to nonlinear oscillations of conservative single-degree-of-freedom systems. *Acta Mechanica*, 170(1), 69-75. <https://doi.org/10.1007/s00707-004-0112-3>.
- [14] Vamvatsikos, D. and C. A. Cornell. (2005). Direct estimation of seismic demand and capacity of multidegree-of-freedom systems through incremental dynamic analysis of single degree of freedom approximation. *Journal of Structural Engineering*, 131(4), 589-599. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(2005\)131:4\(589\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(2005)131:4(589)).
- [15] Kurt, N. and M. Cevik. (2008). Polynomial solution of the single degree of freedom system by Taylor matrix method. *Mechanics Research Communications*, 35(8), 530-536. <http://dx.doi.org/10.1016/j.mechrescom.2008.05.001>.
- [16] Bathe, K.-J. (2007). Conserving energy and momentum in nonlinear dynamics: a simple implicit time integration scheme. *Computers & structures*, 85(7-8), 437-445. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2006.09.004>.
- [17] Bathe K.J and N. G. (2012). Insight into an implicit time integration scheme for structural dynamics. *Computers & Structures*, 90(98), 1-6. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2012.01.009>.
- [18] Katsikadelis, J. T. (2014). A new direct time integration method for the equations of motion in structural dynamics. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 94(9), 757-774. <https://doi.org/10.1002/zamm.201200245>.
- [19] Katsikadelis, J. T. (2021). A new method for numerical integration of higher-order ordinary differential equations without losing the periodic responses. *Frontiers in Built Environment*, 7(1), 621037. <https://doi.org/10.3389/fbuil.2021.621037>.
- [20] Noh, G. and K.-J. Bathe. (2018). Further insights into an implicit time integration scheme for structural dynamics. *Computers & Structures*, 202(1), 15-24. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2018.02.007>.
- [21] Noh, G. and K.-J. Bathe. (2019). The Bathe time integration method with controllable spectral radius: The  $\rho_\infty$ -Bathe method. *Computers & Structures*, 212(1), 299-310. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2018.11.001>.
- [22] Zhang, J. (2020). A-stable two-step time integration methods with controllable numerical dissipation for structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 121(1), 54-92. <https://doi.org/10.1002/nme.6188>.
- [23] Zhang, J. (2021). A-stable linear two-step time integration methods with consistent starting and their equivalent single-step methods in structural dynamics analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 122(9), 2312-2359. <https://doi.org/10.1002/nme.6623>.
- [24] Zhang, J., Y. Liu and D. Liu. (2017). Accuracy of a composite implicit time integration scheme for structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 109(3), 368-406. <http://dx.doi.org/10.1002/nme.5291>.
- [25] Babaei M, Mollaei S, Moslemi Petrucci A, J. M. and Scurtu IC. (2021). Numerical and analytical study of seismic response of structural systems with new formulation using energy and impact methods. In: *E3S Web of Conferences*. Hong Kong: EDP Sciences, 040141-040148. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202128604014>.
- [26] Babaei M. (2013). A general approach to approximate solutions of nonlinear differential equations using particle swarm optimization. *Applied Soft Computing*, 13(7), 3354-3365. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2013.02.005>.
- [27] Babaei M, Jalilkhani M, Ghasemi SH and Mollaei Somayeh. (2022). New Methods for Dynamic Analysis of Structural Systems under Earthquake Loads. *Journal of Rehabilitation in Civil Engineering*, 10(3), 81-99. <https://doi.org/10.22075/jrce.2021.23323.1506>.

- [28] Hanafi M.R, Babaei M and Narjabadifam P. (2023). New Formulation for dynamic analysis of nonlinear time-history of vibrations of structures under earthquake loading. *Journal of Civil and Environmental Engineering*, [Online]. 28(2). Available at: [https://ceej.tabrizu.ac.ir/article\\_16408.html](https://ceej.tabrizu.ac.ir/article_16408.html) [Accessed June 11 2023]. <https://doi.org/10.22034/ceej.2023.54564.2209>.
- [29] Babaei, M., M. Jalilkhani, S. H. Ghasemi and S. Mollaei. (2022). New Methods for Dynamic Analysis of Structural Systems under Earthquake Loads. *Journal of Rehabilitation in Civil Engineering*, 10(3), 81-99. <https://doi.org/10.22075/jrce.2021.23323.1506>.
- [30] Babaei, M. and J. Farzi. (2023). Derivation of weighting rules for developing a class of A-stable numerical integration scheme:  $\alpha$  I-(2+ 3) P method. *Journal of Difference Equations and Applications*, [Online]. 29(4), 1-30. Available at: <https://www.tandfonline.com/doi/citedby/10.1080/10236198.2023.2219785?scroll=top&needAccess=true> [Accessed Jun 08 2023]. <https://doi.org/10.1080/10236198.2023.2219785>.
- [31] Chopra, A. K. (2017). *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*. 4th Ed. Upper Saddle River, New jersey, USA: Pearson. 876.
- [32] Slepyan, L. (2022). Phase shift in forced oscillations and waves. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 96(1), 104762. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2022.104762>.
- [33] Rao S.S. (2017). *Mechanical Vibrations, in SI Units, Global Edition*. 6th Ed. London, UK: Pearson Education. 1152.