

Parametric study of ring, local and mode shaped imperfections for buckling and stability analysis of Booth Lemniscate shells of revolution

Behrooz Shahriari^{1*}, Mehdi Dehghan², Milad Mohammad Hasani Javar³

1- Assistant Professor, Faculty of Mechanics, Malek Ashtar University of Technology, Isfahan, Iran

2- Research Assistant, Faculty of Mechanics, Malek Ashtar University of Technology, Isfahan, Iran

3- M.Sc. in Aerospace Engineering-Aero structures, Faculty of Mechanics, Malek Ashtar University of Technology, Isfahan, Iran

ABSTRACT

The use of cross spheres in the design and manufacturing of the pressure body of subsurface vessels has been of interest. In this article, stress and stability analysis of a Booth lemniscate shell of revolution under external pressure and various geometric imperfections is investigated. First, by introducing Booth Lemniscate shells, this widely used geometry is created without discontinuity and stress concentration. Stress analysis of these shells for different shape coefficients has been done using membrane stress theory. Using Python programming language and scripting in Abaqus software, the geometric equations related to the generating curve of shells with different shape coefficients were created and the stress field resulting from external pressure was calculated. By comparing the results obtained from the analytical solution and the finite element numerical solution, a proper match between the results is observed. Considering the importance of geometric shape defects in the post-buckling behavior of revolution shells, Booth lemniscate shells have been considered under the influence of various types of primary geometric shape defects, including axial and local symmetric ringing and shape defects resulting from the superposition of linear buckling modes. The reduction of the buckling strength of the shells has been investigated in the form of knockdown factor, and the highest impact was related to the shape defects resulting from the mode shape and the lowest was related to the local shape defects. The results show that the middle region of the shell is more sensitive to buckling, and the calculation of the knockdown factor shows that the critical load value decreases with the increase in the dimensions of the shape defect, and as the size of the shape defect increases, the slope of the knockdown factor graph decreases.

ARTICLE INFO

Receive Date: 09 June 2023

Revise Date: 16 October 2023

Accept Date: 02 November 2023

Keywords:

Booth lemniscate shells of
revolution
Geometric imperfections
Membrane stress theory
Strength analysis
Buckling and post-buckling

All rights reserved to Iranian Society of Structural Engineering.

doi: <https://doi.org/10.22065/jsce.2023.394980.3105>

*Corresponding author: Behrooz Shahriari.
Email address: shahriari@mut-es.ac.ir

بررسی پارامتری تاثیر نقص شکل‌های هندسی رینگی، محلی و حاصل از شکل مود در تحلیل کمانش و پایداری سازه پوسته‌های دوار لمنیسکات بوث

بهروز شهریاری^{۱*}، مهدی دهقان^۲، میلاد محمد حسنی جور^۳

۱- استادیار، مجتمع دانشگاهی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، اصفهان، ایران

۲- پژوهشگر، مجتمع دانشگاهی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، اصفهان، ایران

۳- کارشناس ارشد مهندسی هوافضا-سازه‌های هوایی، مجتمع دانشگاهی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، اصفهان، ایران

چکیده

استفاده از کره‌های متقاطع در طراحی و ساخت سازه بدنه سازه‌های زیر سطح دریا همواره مورد توجه بوده است. در این تحقیق، تحلیل تنش و پایداری پوسته‌های دوار لمنیسکات بوث دارای نقص شکل‌های هندسی مختلف تحت فشار هیدرواستاتیک خارجی مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابتدا با معرفی پوسته‌های دوار لمنیسکات بوث، این هندسه پرکاربرد بدون ناپیوستگی و تمرکز تنش ایجاد می‌شود. تحلیل تنش پوسته‌های دوار لمنیسکات برای ضرایب شکل مختلف و با استفاده از تئوری تنش غشایی انجام شده است. با استفاده از زبان برنامه‌نویسی پایتون و اسکریپت نویسی در نرم‌افزار آباکوس، معادلات هندسی مربوط به منحنی مولد پوسته‌ها با ضرایب شکل مختلف ایجاد گردیده و میدان تنش حاصل از فشار خارجی محاسبه شده است. با مقایسه نتایج حاصل از حل تحلیلی و حل عددی المان محدود، تطابق مناسب بین نتایج مشاهده می‌گردد. با توجه به اهمیت نقص شکل‌های هندسی در رفتار پس‌کمانش پوسته‌های دوار، پوسته‌های لمنیسکات بوث تحت تاثیر انواع نقص شکل‌های هندسی اولیه شامل رینگی متقارن محوری، محلی و نقص شکل‌های حاصل از برهم نهی شکل مودهای کمانش خطی در نظر گرفته شده است. کاهش استحکام کمانش پوسته‌ها در قالب ضریب شکست بررسی شده است که بیشترین تاثیرپذیری مربوط به نقص شکل‌های حاصل از شکل مود و کمترین آن مربوط به نقص شکل‌های محلی بوده است. نتایج نشان می‌دهد که ناحیه میانی پوسته نسبت به کمانش حساس‌تر است، همچنین محاسبه ضریب شکست نشان‌دهنده آن است که با افزایش ابعاد نقص شکل مقدار بار بحرانی کاهش می‌یابد و هرچه ابعاد نقص شکل بزرگتر می‌شوند شیب نمودار ضریب شکست کمتر می‌شود.

کلمات کلیدی: پوسته‌های دوار لمنیسکات بوث، نقص شکل‌های هندسی، تئوری تنش غشایی، تحلیل استحکامی، کمانش و پس‌کمانش.

شناسه دیجیتال:		سابقه مقاله:			
doi:	چاپ	انتشار آنلاین	پذیرش	بازنگری	دریافت
https://doi.org/10.22065/jsce.2023.394980.3105	۱۴۰۲/۰۴/۳۱	۱۴۰۲/۰۸/۱۱	۱۴۰۲/۰۸/۱۱	۱۴۰۲/۰۷/۲۴	۱۴۰۲/۰۳/۱۹
بهروز شهریاری shahriari@mut-es.ac.ir			*نویسنده مسئول: پست الکترونیکی:		

۱- مقدمه

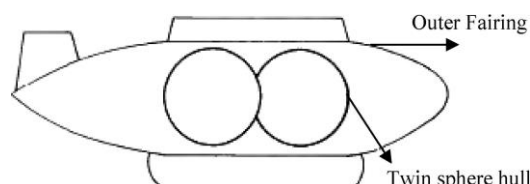
وجود فرآیندهای ساخت مدرن و روش‌های محاسباتی امکان طراحی سازه پوسته با اشکال پیچیده را فراهم می‌کند. چنین فرصتی امکان استفاده از مزایای ساختاری ناشی از هندسه‌های غیرمعمول این سازه‌ها را فراهم می‌کند. پوسته‌های جدار نازک در صنایع پیشرفته کاربرد فراوانی دارند. این پوسته‌های نازک فلزی در مدل‌های مختلف به صورت گسترده در سازه‌های زیرسطحی، سازه‌های فضایی و همچنین در ساخت مخازن فشار و ذخیره مایعات مورد بهره‌برداری قرار می‌گیرند. با توجه به این کاربرد گسترده، بررسی پایداری این پوسته‌ها از اهمیت فراوانی برخوردار است. افزایش مقاومت کمانش در بدنه‌های تحت فشار را می‌توان با شکل دادن به منحنی‌های مولد در پوسته‌های دوار بدست آورد. رویکردها در این مورد می‌تواند متفاوت باشد و یکی از آن‌ها استفاده از ابزارهای بهینه‌سازی است. یک روش دیگر، استفاده از اشکال بهینه‌ای است که در طبیعت یافت می‌شوند. مقالاتی را می‌توان یافت که پوسته‌های تخم‌مرغی در آن تجزیه و تحلیل شده‌اند [۱]-[۳]. ژانگ و همکاران [۴] در سال ۲۰۱۸ نتایج حاصل از تجزیه و تحلیل‌های عددی و تجربی روی پوسته‌هایی با شکلی بر پایه میوه لانگان شبیه کره را مورد بررسی قرار دادند. همچنین ژانگ در سال ۲۰۱۸ [۵] پوسته‌ای مبتنی بر بیضی کاسینی را تجزیه و تحلیل کرد. جیسون و مگنوک [۶] در سال ۲۰۱۵ استحکام و پایداری نوعی پوسته خاص شبه کره تحت بار خارجی را بررسی کرد. رفتار پوسته‌های دوار در هر دو محدوده کمانش و بعد از کمانش ممکن است به میزان قابل توجهی تغییر کند که به علامت انحناء گاوسی بستگی دارد. تأثیر این پارامتر توسط جیسون [۷] در سال ۲۰۰۹ و توسط چانگ [۸] در سال ۲۰۱۶ مورد بررسی قرار گرفته است. در سال ۲۰۰۲ بلاچات [۹] کمانش پوسته‌های لوله‌ای تحت فشار خارجی را در مقایسه با نتایج آزمایشگاهی و تئوری انجام داد و به بررسی مزایای پوسته با انحناء گاوسی مثبت پرداخت. در سال ۲۰۰۷ جیسون و مگنوک [۱۰] کمانش الاستیک پوسته لوله‌ای تحت فشار خارجی را بررسی کردند. در سال ۲۰۰۸ بلاچات و مگنوک [۱۱] مقاومت پایداری و بهینه‌سازی مخازن تحت فشار و مشکلات آنها را مورد بررسی قرار دادند. پن و کویی [۱۲] در سال ۲۰۱۰ مروری بر کمانش و مقاومت نهایی بدنه کروی تحت فشار خارجی را انجام دادند. مگنوک، لوینسکی و سیچی [۱۳] در سال ۲۰۱۸ مشکلات استحکام و کمانش کلاهک‌های مخازن تحت فشار را بررسی کردند. همچنین مگنوک [۱۴] در سال ۲۰۱۸ مقاومت و کمانش یک کلاهک غیر معمولی برای یک مخزن فشار استوانه‌ای را بررسی کرد. سووینسکی و جیسون [۱۵] در سال ۲۰۲۰ در مقاله‌ای به بررسی استحکام و پایداری پوسته لمینسکات بوث پرداخته و نتایج تجزیه و تحلیل را با پوسته‌های استوانه‌ای کلاسیک و همچنین پوسته‌های کروی مقایسه کردند. در سال ۱۹۷۱ تنیسون و ماگریدج [۱۶] به بررسی تئوری و تجربی اثرات انواع خاص عیوب متقارن محوری بر کمانش پوسته‌های استوانه‌ای تحت فشار محوری پرداختند، نتایج تجربی مطابقت خوبی با پیش‌بینی‌های تئوری داشتند. خیمنز [۱۷] و همکارانش در سال ۲۰۱۷ با استفاده از تجزیه و تحلیل اجزای محدود که قبلاً از طریق آزمایش‌های دقیق تأیید شده بود، تأثیر عیوب هندسی بر بار کمانش پوسته‌های کروی تحت فشار خارجی را بررسی کردند. در سال ۲۰۱۹ واگنر [۱۸] و همکارانش یک رویکرد طراحی عددی ساده برای بار بحرانی کمانش در پوسته‌ها ارائه کردند. در همین سال اسمایل [۱۹] و همکارانش به بررسی نقص شکل‌های متقارن محوری و محلی بر بار بحرانی و محاسبه ضریب شکست در یک پوسته خاص پرداختند. ژانگ و همکاران [۲۰] در سال ۲۰۲۰ کمانش پوسته ساخته شده از کره‌های متقاطع را مورد بررسی قرار دادند. بدنه فشار مورد نظر از اتصال سه قطاع کروی به یکدیگر تشکیل شده است. نتایج حاصل از تحلیل کمانش پوسته مورد نظر با نتایج تحلیل کمانش یک پوسته استوانه‌ای تقویت شده رینگی با حجم معادل مقایسه شده و برتری آن نسبت به پوسته استوانه‌ای نشان داده شده است. قاسمی و سلیمانی [۲۱] در سال ۲۰۲۰ کمانش یک استوانه هیبرید کامپوزیت-فلز تحت فشار هیدرواستاتیکی را با استفاده از روش تحلیلی و بسط سری فوریه و روش گالرکین مورد بررسی قرار دادند. پس از آن و در سال ۲۰۲۱ سلطانی و همکاران [۲۲] کمانش جانبی-پیچشی یک تیر غیر منشوری با مقطع جدار نازک متقارن ساخته شده از مواد مدرج تابعی و تحت بارگذاری عرضی را مورد مطالعه قرار دادند. عباسی و همکارانش [۲۳] در سال ۲۰۲۱ بار بحرانی کمانش پوسته‌های کروی حاوی یک نقص شکل گود رو به داخل را به وسیله روش اجزا محدود بررسی کردند. سارمیلا [۲۴] در سال ۲۰۲۲ به بررسی کمانش پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی دارای سوراخ در سطح پوسته به روش اجزا محدود پرداخت. ژو و همکاران [۲۵] در سال ۲۰۲۲ به بررسی

کمانش پوسته‌های مخروطی پرداختند و نشان دادند که پوسته‌های مخروطی که منحنی نصف‌النهاری آن داری قوس باشد تحمل بار بالاتری دارند.

ژانگ و همکارانش [۲۶] در سال ۲۰۲۲ به بررسی تجربی و عددی کمانش پوسته‌های تخم‌مرغی شکل و همچنین تاثیر درزهای جوش بر کمانش این پوسته‌ها پرداختند. تانگ و همکاران [۲۷] در سال ۲۰۲۳ پدیده کمانش یک بدنه فشار بیضوی با ضخامت متغیر (پله-ای) را مورد بررسی قرار دادند. بدنه فشار بیضوی مورد نظر از اتصال حلقه‌های تولید شده به روش هیدروفورمینگ تشکیل شده است. با هدف استخراج مودهای تخریب و استحکام نهایی سازه بدنه فشار مورد نظر، نمونه‌های تست تحت فشار هیدرواستاتیک قرار گرفته است. فو و همکاران [۲۸] در سال ۲۰۲۳ با بررسی کمانش پوسته‌های تقویت شده با انحنای متغیر، روشی جدید برای طراحی این پوسته‌ها ارائه کردند.

در این تحقیق شکل پوسته براساس منحنی ریاضی به نام لمنیسکات بوث^۱ تعیین می‌شود. این انتخاب بر این اساس گرفته شد که بسته به برخی از پارامترها که منحنی را توصیف می‌کنند، پوسته می‌تواند انحنای گوسی مثبت یا منفی داشته باشد. همانطور که از مقالات برداشت می‌شود، این پوسته‌ها نسبت به پوسته استوانه‌ای مقاومت کمانش بالاتری دارد و نکته بعدی اینکه ممکن است در محدوده پس از کمانش رفتار پایدارتری را از خود نشان دهد.

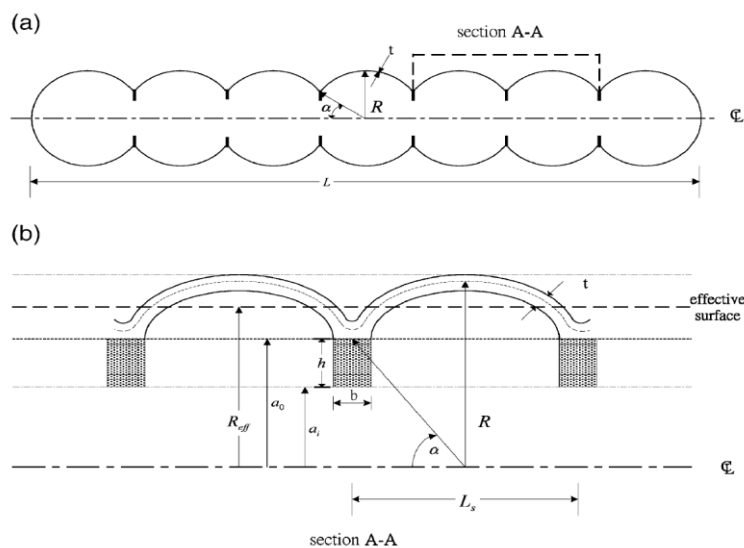
از موارد کاربرد این گونه از پوسته‌های دوار می‌توان به عنوان جایگزینی مناسب برای هندسه کره‌های متقاطع^۲ (MIS) اشاره نمود (شکل ۱) که از دیرباز در سازه بدنه شناورهای زیرسطحی مورد استفاده قرار گرفته است [۲۹]. در ساخت کره‌های متقاطع سنتی از فرایند جوشکاری و نیز رینگ تقویتی در نقطه اتصال دو کره استفاده می‌شود (شکل ۲) که خود عاملی برای ایجاد تمرکز تنش و برهم زدن پیوستگی کانتور تنش در سازه بدنه شناور خواهد بود. حال آنکه این عیب با استفاده از پوسته‌های دوار لمنیسکات بوث و ضریب شکل مناسب مرتفع می‌گردد.



شکل ۱: بدنه فشار شناور زیرسطحی با دو کره متقاطع [۲۹].

¹ Booth lemniscate

² Multiple Intersecting Spheres



شکل ۲: پارامترهای هندسی بدنه فشار با کره‌های متقاطع [۲۹].

علاوه بر این، انحنای یکنواخت و پیوسته پوسته لمینسکات بوث عدم تمرکز تنش موضعی و جلوگیری از اثرات لبه‌ای را تضمین می‌کند. به دلیل پیچیدگی انحناء پوسته، توصیف تحلیلی به حالت قبل از کمانش محدود می‌شود. تجزیه و تحلیل پایداری فقط با استفاده از روش المان محدود انجام می‌شود که یک روش معمول برای تجزیه و تحلیل پایداری سازه‌ها است.

۲- توصیف هندسی پوسته‌های لمینسکات بوث

لمینسکات بوث یک منحنی صفحه‌ای درجه چهار است که می‌تواند در سیستم مختصات دکارتی دو بعدی (x, y) با معادله زیر بیان

شود:

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-2x^2 + \gamma^2 \lambda^2 + \sqrt{4\lambda^4(1-\lambda^2)x^2 + \gamma^4 \lambda^4}} \quad (1)$$

با این حال، توصیف معادله هندسی در سیستم مختصات قطبی اطلاعات بیشتری از ویژگی‌های آن به دست می‌دهد:

$$\rho_p(\theta) = \gamma \sqrt{\cos^2 \theta + \lambda^2 \sin^2 \theta} \quad (2)$$

که γ ضریب اندازه و λ پارامتر شکل هستند. مطابق با معادله (۲)، تغییرات شکل منحنی متناسب با ضریب اندازه γ است. پارامتر شکل $0 \leq \lambda \leq 1$ هندسه کلی منحنی را تغییر می‌دهد. برای $\lambda = 1$ ، لمینسکات بوث یک دایره را توصیف می‌کند که به سادگی از معادله (۲) استنتاج می‌شود. با کاهش λ از انحنای پوسته حول محور مختصات کاسته می‌شود. در حالی که برای $\lambda \rightarrow 0$ منحنی به دو دایره تبدیل می‌شود، که در نقطه $(0, 0)$ متصل می‌شوند. اشکال نمونه بر اساس معادله (۲) برای مقادیر مختلف پارامتر λ در شکل ۳ ارائه شده است.

در این تحقیق، لمینسکات بوث به عنوان یک مولد برای سازه جدار نازک تحت فشار در نظر گرفته می‌شود. بدنه‌ای که به آن بوث اولوید^۳ گفته می‌شود. دلیل آن انواع شکل‌هایی است که می‌توان با در نظر گرفتن چنین منحنی سطحی به دست آورد. نکته مهم آنکه،

³ Booth ovaloid

بسته به پارامتر شکل λ انحنا گوسی این پوسته دوار تغییر می‌کند. برای $1 > \lambda > \frac{1}{\sqrt{2}}$ منحنی محدب است، بنابراین انحنا گوسی مثبت است ($K > 0$). زمانیکه $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، انحنا مولد پوسته لمینسکات به دلیل رابطه زیر برابر صفر است ($K_I(0) = 0$).

$$\frac{d^2 \rho(x)}{dx^2} (x=0) = 0 \quad (3)$$

رابطه (۳) نشان می‌دهد که در این حالت انحنا گوسی برای $x=0$ باید صفر باشد ($K=0$). برای $0 < \lambda < \frac{1}{\sqrt{2}}$ مقادیر انحنا گوسی برای مقادیر نسبتاً کوچک مختصات x منفی می‌شود ($K < 0$). چنین پوسته‌هایی به صورت موضعی مقعر هستند. اگرچه در بیشتر قسمت‌ها محدب باقی می‌مانند. برای بررسی تاثیر پارامتر شکل بر پایداری پوسته‌های لمینسکات، حجم محاط شده توسط پوسته مورد نظر در پارامترهای شکل مختلف ثابت در نظر گرفته می‌شود. طبق روابط موجود در ریاضیات پایه، حجم حاصل از دوران منحنی صفحه‌ای $\rho(x)$ برابر است با:

$$V = 2\pi \int_0^\gamma \rho^2(x) dx \quad (4)$$

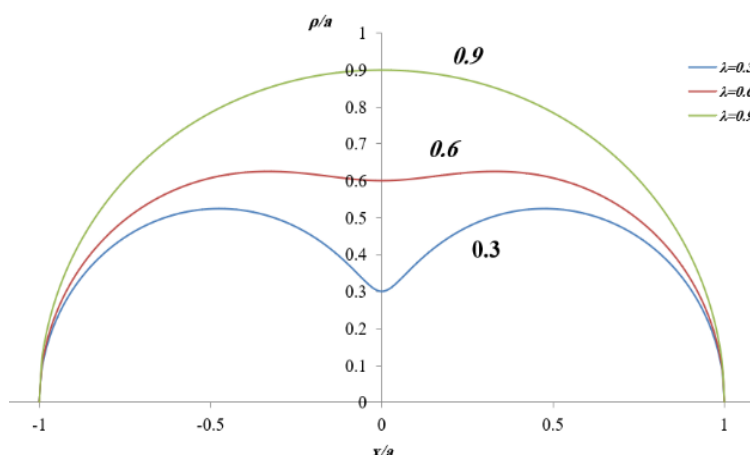
که با حل انتگرال رابطه (۴):

$$V = \pi \gamma^3 \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \lambda^2 + \frac{\lambda^3}{2\sqrt{\lambda^{-2} - 1}} \ln(\lambda^{-1} + \sqrt{\lambda^{-2} - 1}) \right] \quad (5)$$

بنابراین برای بدست آوردن یک حجم ثابت برای پوسته دوار لمینسکات، ضریب اندازه γ به صورت رابطه (۶) نتیجه می‌شود:

$$\gamma = \left\{ \frac{V}{\pi} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \lambda^2 + \frac{\lambda^3}{2\sqrt{\lambda^{-2} - 1}} \ln(\lambda^{-1} + \sqrt{\lambda^{-2} - 1}) \right] \right\} \quad (6)$$

در این تحقیق، حجم پوسته $V = 4.19 m^3$ در نظر گرفته می‌شود که معادل حجم کره‌ای ($\lambda = 1$) با ضریب اندازه‌ی $\gamma = 1000 mm$ است. به منظور حذف حالت‌هایی که انحنا مولد پوسته بسیار زیاد می‌شود، محدوده‌ی $0.2 \leq \lambda \leq 1.0$ برای تغییرات پارامتر شکل در نظر گرفته می‌شود که نمونه‌هایی از آن در شکل ۳ نشان داده شده است.



شکل ۳: انحنا مولد در پوسته‌های لمینسکات بوت با پارامتر شکل مختلف

۳- تئوری تنش غشایی

با فرض ناچیز بودن ضخامت پوسته در مقایسه با کوچکترین شعاع انحنای آن، می‌توان فرض کرد که تئوری تنش غشایی برای چنین پوسته‌ای قابل استفاده است. نیروهای داخلی پوسته، تحت بار خارجی P مطابق رابطه (۷) است:

$$N_2 = -\frac{1}{2}PR_2\left(2 - \frac{R_2}{R_1}\right), \quad N_1 = -\frac{1}{2}PR_2 \quad (7)$$

که R_1 و R_2 دو شعاع اصلی انحناء در پوسته می‌باشند، که به صورت رابطه (۸) بدست می‌آیند:

$$R_1 = -\frac{1}{\rho^2(x)} \left[\frac{(\rho^2(x) + x^2 g_2^2(x))^{\frac{3}{2}}}{g_2(x) \left[1 - \frac{x^2}{\rho^2(x)} g_2(x) \right] - 4\gamma^2(1-\lambda^2)^2 \frac{x^2}{g_1^3(x)}} \right] \quad (8)$$

$$R_2 = \sqrt{\rho^2(x) + x^2 g_2^2(x)} \quad (9)$$

که:

$$g_1 = \sqrt{4\gamma^2(1-\lambda^2)x^2 + \gamma^4\lambda^4} \quad (10)$$

$$g_2 = \frac{\gamma^2(1-\lambda^2)}{g_1(x)} - 1 \quad (11)$$

تنش‌های اصلی در حالت تنش غشایی عبارتند از:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{t}, \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{t}$$

که t ضخامت پوسته لمینسکات است. تنش معادل فون میزز در حالت تنش صفحه‌ای به صورت رابطه (۱۳) است:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} \quad (12)$$

با استفاده از معادله (۱۳) و معادلات (۷) و (۱۲) رابطه (۱۴) بدست می‌آید:

$$\sigma_{eq} = \frac{P}{t} \tilde{\sigma} \quad (14)$$

که در آن $\tilde{\sigma}$ مطابق رابطه (۱۵) می‌باشد.

$$\tilde{\sigma} = \frac{R_2}{2} \sqrt{3 + \frac{R_2}{R_1} \left(\frac{R_2}{R_1} - 3 \right)} \quad (15)$$

با توجه به این‌که تنش معادل σ_{eq} متناسب با ضریب $\frac{P}{t}$ است، تجزیه و تحلیل $\tilde{\sigma}$ ساده‌تر است. تجزیه و تحلیل تنش پوسته

لمینسکات بیشتر شبیه به پوسته‌های استوانه‌ای استاندارد است. تنش معادل فون میزز (σ_{cyl}) در پوسته استوانه‌ای با شعاع محیطی R_{cyl} با جایگزینی $R_2 = R_{cyl}$ و $R_1 \rightarrow \infty$ در معادله (۱۳) بدست می‌آید.

$$\sigma_{cyl} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{P}{t} R_{cyl} \quad (16)$$

تنش معادل بی بعد به صورت رابطه (۱۷) معرفی می‌شود:

$$\bar{\sigma}_{eq} = \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_{cyl}} \quad (17)$$

یا به عبارتی:

$$\bar{\sigma}_{eq} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{R_2}{R_{cyl}} \sqrt{3 + \frac{R_2}{R_1} \left(\frac{R_2}{R_1} - 3 \right)} \quad (18)$$

طول منحنی مولد بوث اوالوید از رابطه (۱۹) بدست می‌آید:

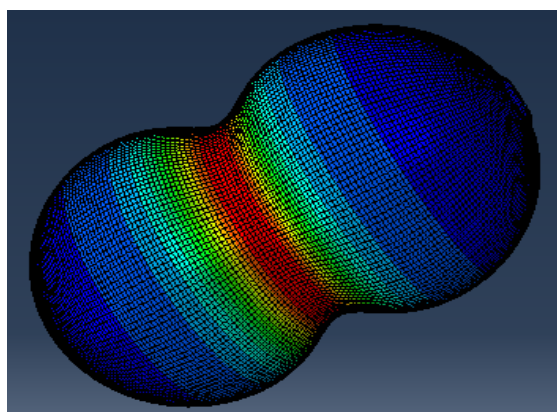
$$S = \int_0^\gamma \sqrt{1 + \left(\frac{d\rho}{dx} \right)^2} dx \quad (19)$$

همان‌طور که قبلاً اشاره گردید، در این تحقیق برای تولید هندسه دقیق پوسته دوار لمینسکات بوث در نرم‌افزار آباکوس از اسکریپت‌نویسی استفاده شده است. در این راستا معادلات مربوط به هندسه پوسته‌ها (رابطه) به کد پایتون تهیه شده برای تحلیل تنش پوسته‌های لمینسکات اضافه گردیده و با ایجاد حلقه تکرار نتایج مربوط به تحلیل تنش و کمانش خطی استخراج گردیده است. برای تحلیل، ضخامت پوسته ۸ میلی‌متر در نظر گرفته شده و از سه پارامتر شکل مختلف $\lambda = 0.3$ ، $\lambda = 0.6$ و $\lambda = 0.9$ استفاده شده است. بار اعمال شده فشار خارجی یکنواخت $P = 2 \times 10^5$ (Pa) و خواص مکانیکی پوسته $E = 200$ GPa پاسکال $\nu = 0.3$ می‌باشد.

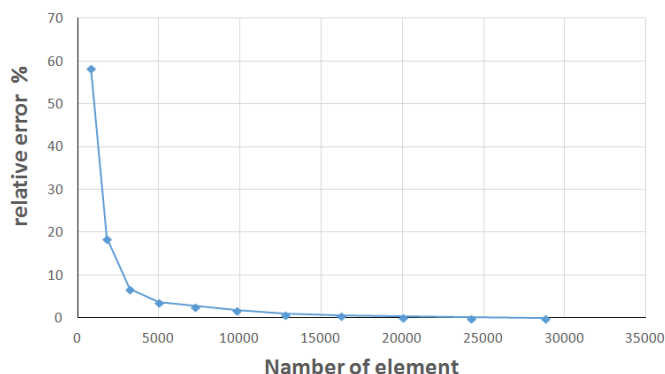
همچنین برای بررسی کمانش پوسته‌های دارای نقص شکل نیز با تهیه یک کد پایتون به روش گفته شده بار بحرانی کمانش استخراج گردیده است. برای بررسی نقص شکل‌ها از پوسته‌ای با ضخامت ۸ میلی‌متر و با پارامتر شکل $\lambda = 0.9$ استفاده شده است. پوسته تحت فشار خارجی یکنواخت $P = 2 \times 10^6$ (Pa) و خواص مکانیکی آن $E = 200$ GPa پاسکال $\nu = 0.3$ می‌باشد.

با هدف بررسی میزان دقت محاسبات و نیز تضمین استقلال نتایج از مش، پوسته لمینسکات با پارامتر شکل $\lambda = 0.6$ و الگوریتم مش سوییپ^۴ (شکل ۴) مورد بررسی قرار گرفته است. رفتار همگرایی نتایج با افزایش چگالی المان‌ها در شکل ۵ نشان داده شده است. در محاسبه میزان خطای نسبی از رابطه (۲۰) استفاده می‌شود.

$$\text{Relative Error}(\%) = \left\| \frac{\text{present solution} - \text{exact solution}}{\text{exact solution}} \right\| \times 100 \quad (20)$$



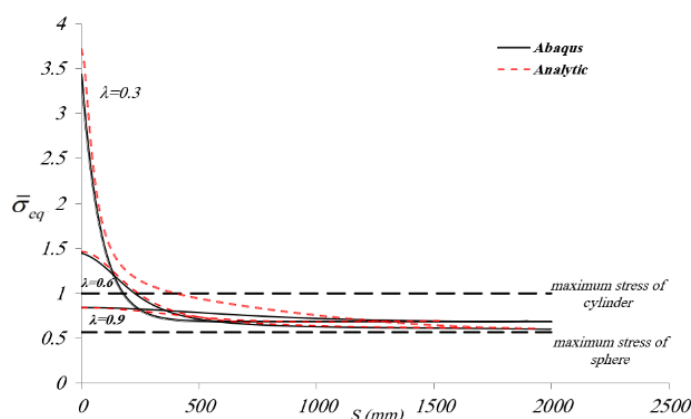
شکل ۴: مدل شبکه‌بندی شده از پوسته دوار بوث اوالوید



شکل ۵: همگرایی نتایج برای پوسته دوار لمینسکات ($\lambda = 0.9$).

در ادامه و در یک بررسی مقایسه‌ای، تنش معادل مستخرج از تحلیل با تئوری غشائی و تنش حاصل از نرم‌افزار المان محدود برای پوسته‌های لمینسکات با پارامتر شکل مختلف در شکل ۶ ارایه گردیده است. مشاهدات حاکی از آن است که تطابق مناسبی بین نتایج حاصل از حل تحلیلی و عددی وجود دارد.

برای درک بهتر از میزان تنش در پوسته لمینسکات، مقایسه‌ای بین تنش در پوسته کروی و پوسته استوانه‌ای با دو سر بسته شده، انجام گرفته است. بیشترین تنش استوانه $\sqrt{3}$ برابر بیشترین تنش کره در یک بارگذاری برابر است و در شکل ۶ نشان داده شده است.



شکل ۶: تنش معادل بی‌بعد در پوسته‌های بوٹ اوالوید بر حسب طول منحنی

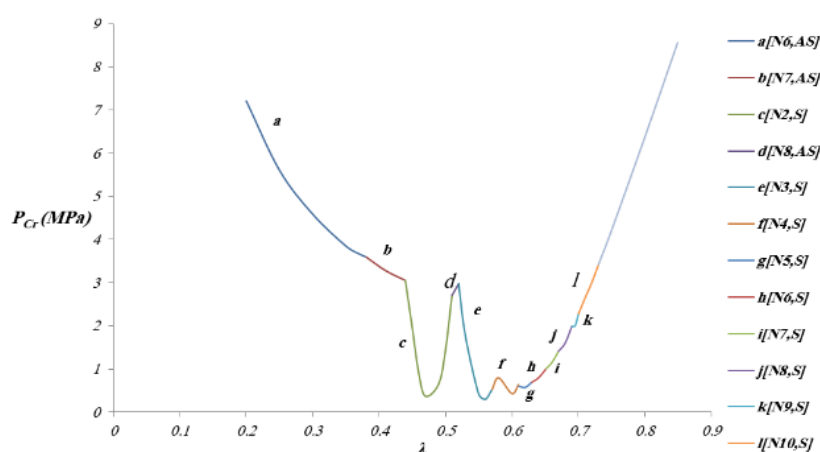
۴- تحلیل کمانش خطی

در این بخش از مقاله، به بررسی پایداری پوسته‌های ساخته شده از منحنی‌های لمینسکات بوٹ پرداخته شده است. نظر به پیچیدگی هندسه این قسم از پوسته‌ها استخراج روابط تحلیلی فرم بسته کمانش و خصوصاً ارضاء شرایط مرزی عملاً غیر ممکن است. بنابراین در این مقاله از حلگر Buckle نرم‌افزار آباکوس جهت استخراج بار بحرانی کمانش خطی پوسته‌های بوٹ اوالوید استفاده شده است. لازم به توضیح است که صحنه‌گذاری کد المان محدود مورد نظر برای پوسته کروی که روابط تحلیلی برای آن موجود است، توسط این تیم تحقیقاتی انجام شده است. برای این منظور، مقایسه‌ای بین تحلیل المان محدود و حل تحلیلی کمانش کره صورت گرفته است. فرمول دقیق کمانش خطی کره تحت فشار خارجی به صورت زیر می‌باشد [۳۰]:

$$P_{cr} = \frac{2E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left(\frac{h}{R} \right)^2 \quad (21)$$

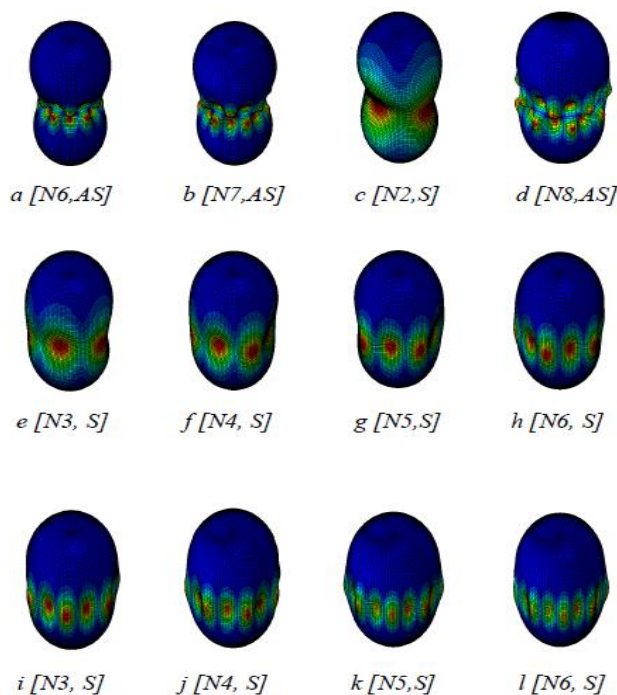
که در این رابطه، h ضخامت پوسته برابر ۸ میلی متر، R شعاع کره برابر ۱۰۰۰ میلی متر و ν ضریب پواسون برابر 0.3 در نظر گرفته شده که نهایتاً با جایگذاری $P_{cr} = 15.49 \text{ MPa}$ حاصل می‌شود. سپس در نرم افزار آباکوس یک کره را مدل سازی کرده و مقدار بار بحرانی بدست آمده، برابر با $P_{cr} = 15.42 \text{ MPa}$ می‌باشد. مشاهده می‌شود که تطابق خوبی بین حل تحلیلی کره و حل عددی آن در نرم افزار آباکوس وجود دارد. اکنون با حصول اطمینان از الگوریتم حل عددی در نظام حل کمانش خطی می‌توان به بررسی کمانش پوسته‌های دوار لمینسکات پرداخت.

نتایج حاصل از تحلیل کمانش خطی و بار بحرانی پوسته‌های لمینسکات بوث برای محدوده پارامتر شکل $0.2 \leq \lambda \leq 0.85$ و ضخامت ۸ میلی‌متر در شکل ۷ ارائه گردیده است.



شکل ۷: بار بحرانی کمانش پوسته بوث اوالوید در پارامترهای شکل مختلف.

همان‌طور که در شکل ۷ مشاهده می‌گردد، طیف‌های مختلفی از تغییرات بار بحرانی کمانش (a...l) بسته به شکل مودهای سازه در نظر گرفته شده است. برای مثال، طیف a دارای علامت اختصاری [N6, AS] می‌باشد که در آن نماد N6 نشان دهنده عدد موج در شکل مود اول سازه و نماد AS بیان کننده شکل مود نامتقارن سازه است. از نماد S برای نمایش تقارن محوری در شکل مود استفاده می‌گردد. شکل مود مربوط به طیف‌های کمانشی بیان شده، در شکل ۸ قابل مشاهده است. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود، مقدار بار بحرانی کمانش پوسته لمینسکات نه تنها وابسته به پارامتر شکل است بلکه بسته به شکل مود کمانشی ایجاد شده (متقارن و نامتقارن) تغییراتی در بار بحرانی کمانش پوسته موردنظر مشاهده می‌گردد که کمترین بار بحرانی کمانش مربوط به شکل مودهای متقارن می‌باشد.



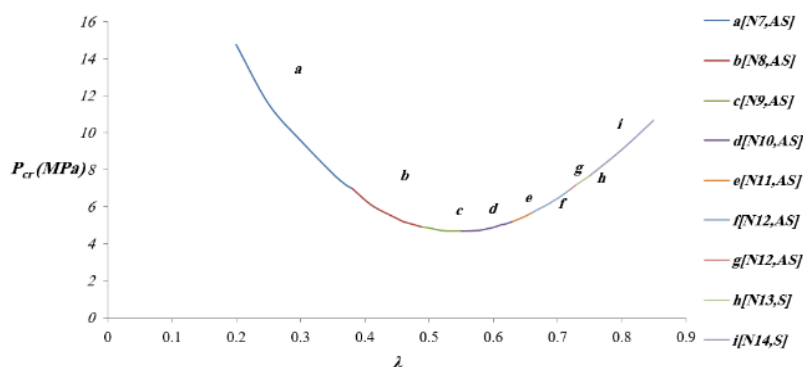
شکل ۸: شکل مود کمانش پوسته‌های بوٹ اولوید در پارامترهای شکل مختلف.

استفاده از تقویت‌های رینگی در سازه بدنه پوسته‌های دوار، یکی از بهترین راهکارها در راستای افزایش مقاومت به کمانش سازه در برابر فشار هیدرواستاتیک خارجی می‌باشد. لذا در ادامه با در نظر گرفتن تقویت رینگ میانی برای پوسته‌های دوار لمینسکات بوٹ، تاثیر آن بر پایداری پوسته‌های مورد نظر مورد بررسی قرار گرفته است. در شکل ۹ نمونه‌ای از تقویت رینگی مقطع مستطیل به ابعاد 3×10 cm متصل به پوسته نشان داده شده است.

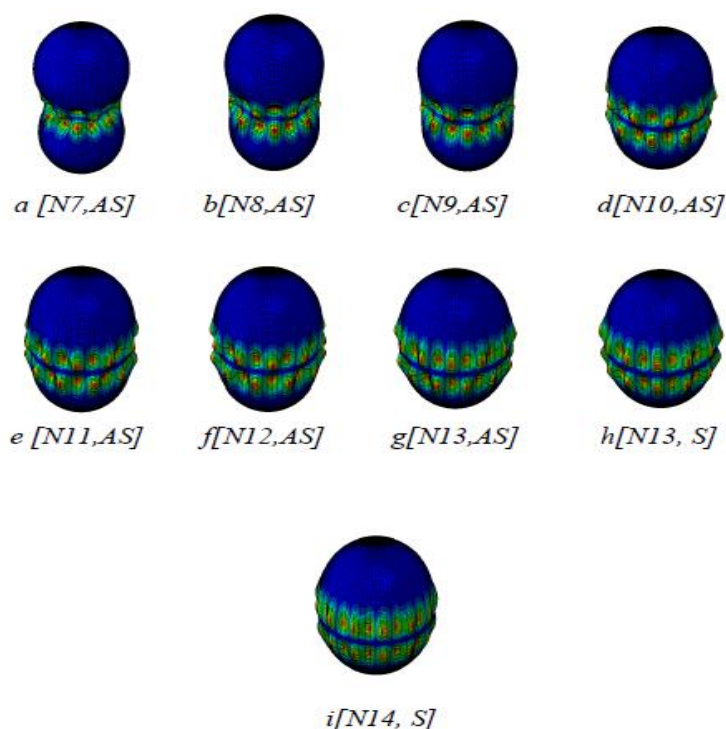
پس از انجام تحلیل کمانش پوسته‌های تقویت شده مورد نظر، نتایج مربوطه در نمودار شکل ۱۰ ارایه گردیده است. همان‌طور که از نمودار قابل مشاهده است، افزودن رینگ تقویتی میانی باعث افزایش بار بحرانی کمانش، کاهش طیف شکل موده‌های کمانش و همچنین تغییرات یکنواخت بار بحرانی در پارامترهای شکل مختلف گردیده است. در شکل ۱۱ می‌توان طیف‌های مختلف مود کمانشی پوسته لمینسکات تقویت شده را ملاحظه نمود.



شکل ۹: مدل پوسته لمینسکات تقویت شده با رینگ میانی.



شکل ۱۰: بار بحرانی کمانش پوسته بوته اولوید تقویت شده در پارامترهای شکل مختلف.



شکل ۱۱: شکل مود کمانش پوسته‌های بوته اولوید تقویت شده در پارامترهای شکل مختلف.

۵- محاسبه بار بحرانی کمانش و ضریب شکست

در این بخش از مقاله به محاسبه بار بحرانی کمانش غیر خطی این پوسته‌ها با دو نقص شکل محلی و رینگی پرداخته شده است. برای این منظور از حلگر Static Ricks در نرم‌افزار آباکوس استفاده شده است. در تحلیل رفتار غیرخطی سازه، نقاط خاصی از مسیر تعادل اهمیت ویژه‌ای دارند. از جمله نقاط حدی^۵ و نقاط دوشاخگی^۶. در نقاط حدی، مماس بر مسیر تعادل افقی است و از نقاط دوشاخگی دو یا چند مسیر تعادل عبور می‌کند. لازم به یادآوری است که در این نقاط بحرانی رابطه بین نیرو و جابه‌جایی یکتا نیست و در اصطلاح سازه غیرقابل کنترل است. این نقاط از لحاظ مهندسی اهمیت بسزایی دارد زیرا نقاطی هستند که اغلب طراح از آن‌ها دوری می‌جوید. این مقاله در

⁵ Limit Points

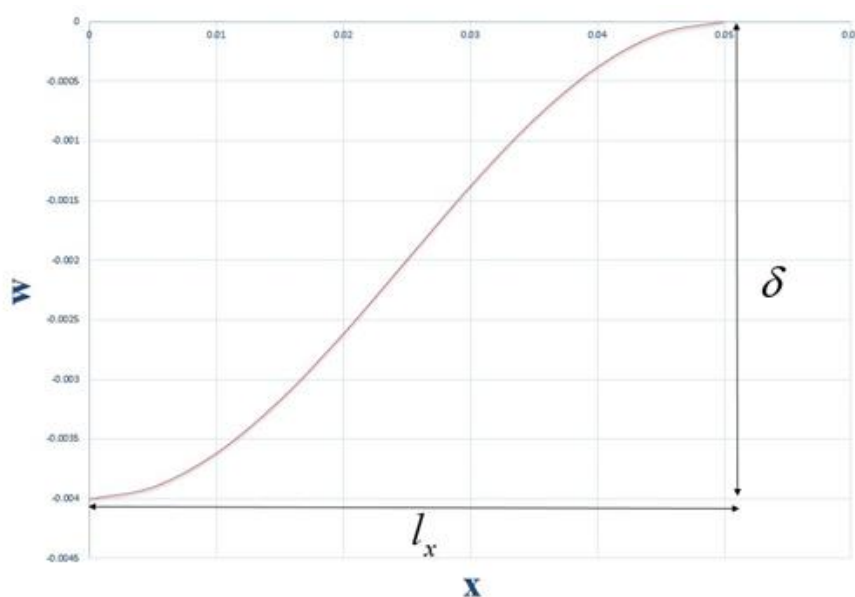
⁶ Bifurcation Points

نظر دارد که با استفاده از تحلیل ریکز^۷ در نرم‌افزار اجزاء محدود آباکوس مسیر تعادل سازه و نقاط بحرانی آن را مشخص نماید. روش تکرار نیوتن-رافسون^۸ روشی معمول در حل معادله‌های غیرخطی حاکم بر رفتار سازه‌هاست. در این روش از فرایند جست‌وجوی خطی برای افزایش سرعت همگرایی استفاده می‌شود. حال آنکه این روش قادر به عبور از نقاط حدی در مسیر تعادل نیست. روش قدرتمند طول کمان^۹ که در آن حل تکراری مفید شده و به دنبال مسیر قطعی تعادل پیش می‌رود، با ترکیب نمودهای بار و تغییر مکان قادر به حل مسائل نقاط حدی است. این روش در الگوریتم ریکز در نرم‌افزار آباکوس به‌خوبی در تحلیل رفتار کمانشی پوسته‌ها استفاده شده است.

با توجه به اینکه برای انجام این تحلیل از کدنویسی پایتون استفاده شده، برای ایجاد نقص شکل در بستر کد پایتون از معادله (۲۲) استفاده گردیده است. با دوران منحنی ایجاد شده توسط معادله (۲۲) که در شکل ۱۲ نشان داده شده است، حول محور پوسته نقص شکل رینگگی و با دوران آن حول خطی عمود بر پوسته نقص شکل محلی ایجاد می‌شود که در شکل ۱۳ این دو نوع نقص شکل نشان داده شده است.

$$w = -\frac{\delta}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi x}{l_x}\right) \right) \quad (22)$$

که δ عمق منحنی و l_x نصف طول منحنی می‌باشد.

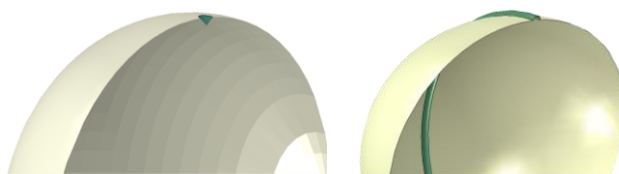


شکل ۱۲: نصف منحنی ایجاد شده توسط معادله (۲۲) برای ایجاد نقص شکل.

⁷ Riks

⁸ Newton-Raphson

⁹ Arc Length

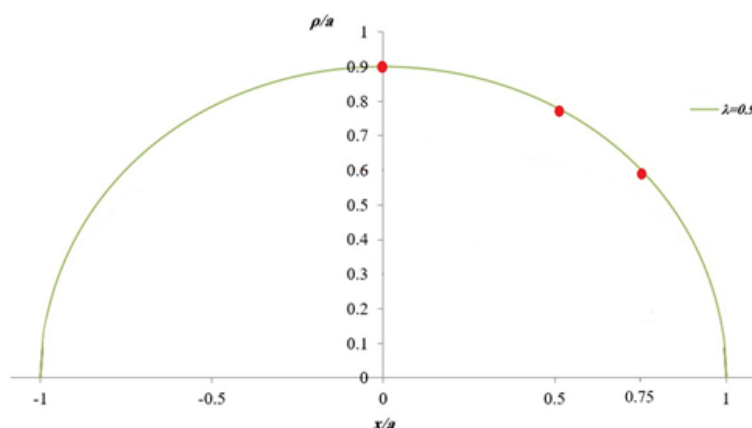


شکل ۱۳: نمایی از نقص شکل های محلی (چپ) و رینگ (راست).

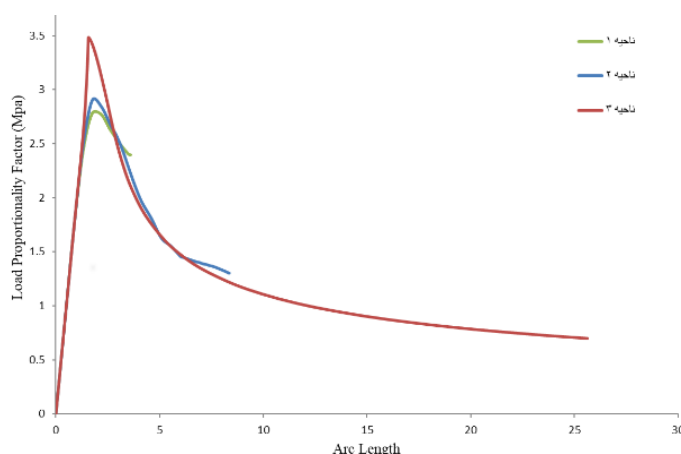
بار بحرانی کمانش محاسبه شده برای هندسه ایده آل در حالت الاستیک و الاستیک-پلاستیک در شکل ۱۴ نشان داده شده است، نتایج به صورت ضریب تناسب بار^{۱۰} استخراج شده است. برای محاسبه بار بحرانی باید حداکثر ضریب تناسب بار را در بار اعمالی به پوسته که در اینجا $P=2 \text{ Mpa}$ می باشد ضرب کرد.

$$P_{cr} = P \times (LPF) \quad (23)$$

بار بحرانی کمانش در نقص شکل رینگ در سه ناحیه مختلف محاسبه شده است. این سه ناحیه در شکل ۱۵ نشان داده شده اند. نتایج در نمودار شکل ۱۶ ارائه گردیده است.



شکل ۱۵: محل های ایجاد نقص شکل های رینگ در پوسته با پارامتر شکل $\lambda = 0.9$ (نقاط قرمز) نامگذاری شده از چپ به راست با ناحیه شماره ۱، ۲ و ۳



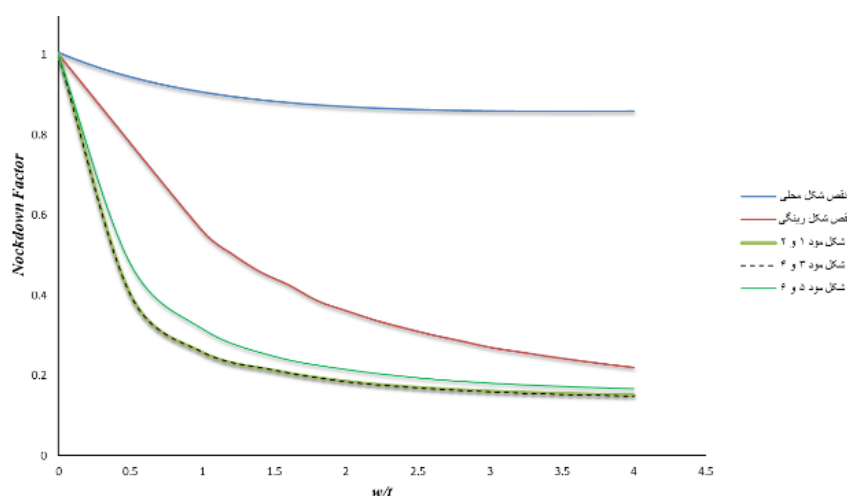
شکل ۱۶: ضریب تناسب بار استخراج شده برای سه ناحیه مذکور ($P=200 \text{ Mpa}$ بار اعمالی).

با توجه به نتایج شکل ۱۶ ناحیه شماره ۱ در برابر کمانش نسبت به دو ناحیه دیگر حساس تر می باشد. در قدم بعد در ناحیه شماره ۱ نقص شکل هایی با اندازه مختلف ایجاد شده است. نقص شکل ها به صورت ضریبی از ضخامت پوسته در نظر گرفته شده اند، که از

¹⁰ Load Proportional Factor

صفر (بدون نقص شکل) تا چهار برابر ضخامت ایجاد شده‌اند. همین مراحل نیز برای نقص شکل‌های محلی در ناحیه شماره ۱ و برای نقص شکل‌های حاصل از شکل مودها انجام شده است. در نقص شکل حاصل از شکل مودها، شکل مودها به صورت جفت شده با هم به عنوان نقص شکل اولیه به کل پوسته اعمال شده‌اند. بعد از محاسبه بار بحرانی برای هر کدام از نقص شکل‌ها با توجه به فرمول ۲۴ ضریب شکست برای پوسته بدست آمده است، که برابر است با مقدار بار بحرانی کمانش تقسیم بر بار بحرانی کمانش در حالت ایده‌آل. نتایج این قسمت در شکل ۱۷ قابل مشاهده است.

$$\text{Knockdown factor} = \frac{P}{P_{\text{perfect}}} \quad (24)$$



شکل ۱۷: ضریب شکست برای انواع نقص شکل محلی، رینگی و نقص شکل‌های حاصل از شکل مودهای (۱،۲)، (۳،۴) و (۵،۶)

۶- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

در این تحقیق ضمن معرفی پوسته‌های دوار لمینسکات بوث، استحکام و رفتار کمانشی آن‌ها در برابر فشار هیدرواستاتیک خارجی مورد بررسی دقیق قرار گرفت. در همین راستا، معادلات هندسی لمینسکات بوث به عنوان منحنی مولد یک پوسته دوار در نظر گرفته شده و مبنای تولید این نوع از پوسته‌ها قرار گرفته است. با بهره‌گیری از تئوری تنش غشایی و برقراری ارتباط بین میدان تنش و پارامترهای هندسی، تحلیل تنش پوسته‌ها از طریق کدنویسی در نرم افزار متلب انجام شد. با هدف صحت‌گذاری نتایج حاصل از حل تحلیلی از قابلیت اسکریپت نویسی (در بستر پایتون) در نرم‌افزار المان محدود آباکوس استفاده شده و معادلات مربوط به هندسه پوسته‌های لمینسکات در نرم‌افزار، مدل‌سازی شده و پس از تحلیل، نتایج با حل تحلیلی مقایسه شده است که تطابق خوبی بین نتایج مشاهده می‌گردد. پس از آن و با استفاده از نرم‌افزار المان محدود، بار بحرانی کمانش پوسته‌های دوار بوث اولوید و نیز شکل مودهای مربوطه در دو حالت تقویت شده رینگی و بدون تقویت استخراج و تاثیر پارامترهای شکل مختلف بر آن مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج بدست آمده گویای آن است:

- که افزودن رینگ تقویتی میانی باعث افزایش بار بحرانی کمانش، کاهش طیف شکل مودها و همچنین تغییرات یکنواخت بار بحرانی در پارامترهای شکل مختلف می‌گردد.

- نتایج بررسی بار بحرانی کمانش برای سه حالت دارای نقص شکل رینگی، محلی و نقص شکل‌های حاصل شکل مودها و همچنین محاسبه ضریب شکست برای این سه حالت نشان دهنده آن است که که ناحیه وسط پوسته نسبت به کمانش حساس‌تر است، همچنین محاسبه

ضریب شکست نشان‌دهنده آن است که با افزایش ابعاد نقص شکل مقدار بار بحرانی کاهش می‌یابد و هرچه ابعاد نقص شکل بزرگتر می‌شوند شیب نمودار ضریب شکست کمتر می‌شود.

مراجع

- [1] Wang, M., Zhang, J., Wang, W., & Tang, W. (2018). Linear and nonlinear elastic buckling of stereolithography resin egg-shaped shells subjected to external pressure. *Thin-Walled Structures*, 127, 516-522.
- [2] Zhang, J., Wang, M., Wang, W., Tang, W., & Zhu, Y. (2017). Investigation on egg-shaped pressure hulls. *Marine Structures*, 52, 50-66.
- [3] Zingoni, A. (2001). Stresses and deformations in egg-shaped sludge digestors: discontinuity effects. *Engineering structures*, 23(11), 1373-1382.
- [4] Zhang, J., Wang, W. M., Cui, W. C., Tang, W. X., Wang, F., & Chen, Y. (2018). Buckling of longan-shaped shells under external pressure. *Marine Structures*, 60, 218-225.
- [5] Zhang, J., Wang, W., Wang, F., Tang, W., Cui, W., & Wang, W. (2018). Elastic buckling of externally pressurized Cassini oval shells with various shape indices. *Thin-Walled Structures*, 122, 83-89.
- [6] Jasion, P., & Magnucki, K. (2015). Theoretical investigation of the strength and stability of special pseudospherical shells under external pressure. *Thin-Walled Structures*, 93, 88-93.
- [7] Jasion, P. (2009). Stability analysis of shells of revolution under pressure conditions. *Thin-walled structures*, 47(3), 311-317.
- [8] Chang, G. H., & Modarres-Sadeghi, Y. (2016). Flow-induced instabilities of shells of revolution with non-zero Gaussian curvatures conveying fluid. *Journal of Sound and Vibration*, 363, 600-612.
- [9] Błachut, J. (2002). Buckling of externally pressurised barrelled shells: a comparison of experiment and theory. *International journal of pressure vessels and piping*, 79(7), 507-517.
- [10] Jasion, P., & Magnucki, K. (2007). Elastic buckling of barrelled shell under external pressure. *Thin-walled structures*, 45(4), 393-399.
- [11] Błachut, J., & Magnucki, K. (2008). Strength, stability, and optimization of pressure vessels: Review of selected problems. *Applied Mechanics Reviews*, 61(6).
- [12] Pan, B., & Cui, W. (2010). An overview of buckling and ultimate strength of spherical pressure hull under external pressure. *Marine Structures*, 23(3), 227-240.
- [13] Magnucki, K., Lewinski, J., & Cichy, R. (2018). Strength and buckling problems of dished heads of pressure vessels—contemporary look. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 140(4).
- [14] Magnucki, K., Jasion, P., & Rodak, M. (2018). Strength and buckling of an untypical dished head of a cylindrical pressure vessel. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 161, 17-21.
- [15] Sowiński, K., & Jasion, P. (2019). Strength and stability of shells based on Booth lemniscate loaded with external pressure. *Thin-Walled Structures*, 144, 106284.
- [16] Hutchinson, J. W., Tennyson, R. C., & Muggerider, D. B. (1971). Effect of a Local Axisymmetric Imperfection on the Buckling Behavior of a Circular Cylindrical Shell under Axial Compression, *AIAA Journal*, 9(1), 48-52.
- [17] Jiménez, F. L., Marthelot, J., Lee, A., Hutchinson, J. W., & Reis, P. M. (2017). Technical brief: knockdown factor for the buckling of spherical shells containing large-amplitude geometric defects. *Journal of Applied Mechanics*, 84(3).
- [18] Wagner, H. N. R., Sosa, E. M., Ludwig, T., Croll, J. G. A., & Hühne, C. (2019). Robust design of imperfection sensitive thin-walled shells under axial compression, bending or external pressure. *International Journal of mechanical sciences*, 156, 205-220.
- [19] Ismail, M. S., Ifayefunmi, O., & Fadzullah, S. H. S. M. (2019). Buckling of imperfect cylinder-cone-cylinder transition under axial compression. *Thin-Walled Structures*, 144, 106250.
- [20] Zhang, J., Li, S., Cui, W., Xiang, K., Wang, F. and Tang, W. (2020). Buckling of multiple intersecting spherical shells under uniform external pressure. *Journal of Marine Science and Application*, 19, 634-641.
- [21] Abbasi, A., Yan, D., & Reis, P. M. (2021). Probing the buckling of pressurized spherical shells. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 155, 104545.
- [22] Sahoo, S. (2022). Buckling behavior of laminated composite stiffened cylindrical shell panels having cutout for different parametric variations. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: *Journal of Mechanical Engineering Science*, 236(22), 10987-11007.
- [23] Zhu, Y., Yu, J., Guan, W., Tang, W., Yue, L., & Zhang, J. (2022). Effects of the geometrical shapes on buckling of conical shells under external pressure. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 196, 104624.
- [24] Zhang, J., Cheng, P., Wang, F., Tang, W., & Zhao, X. (2022). Hydroforming and buckling of an egg-shaped shell based on a petal-shaped preform. *Ocean Engineering*, 250, 111057.

- [25] Tang, Y., Zhang, J., Wang, F., Zhao, X. and Wang, M. (2023) Buckling performance of ellipsoidal pressure hulls with stepwise wall thicknesses, *Ocean Engineering*, 284, 115165.
- [26] Fu, X., Mei, Z., Wang, S., Bai, X., Zhang, E., Chen, G. and Li, H. (2023) Design method of combined stiffened pressure hulls with variable-curvature characteristic, *Ocean Engineering*, 281, 114685.
- [27] Liang, C. C., Shiah, S. W., Jen, C. Y., & Chen, H. W. (2004). Optimum design of multiple intersecting spheres deep-submerged pressure hull. *Ocean Engineering*, 31(2), 177-199.
- [28] Ventsel, E., & Krauthammer, T. (2001). *Thin Plates and Shells Theory Analysis and Application*.