

Analysis of vibrations and nonlinear dynamic buckling of bicurved composite shells under the effect of thermal loading

Alireza Pourmoayed^{1*}, Keramat Malakzadehfard²

1- Assistant professor, Department of Mechanical Engineering, Khatamul-Anbiya Air Defense University, Tehran, Iran

2- Professor, Department of Aerospace Engineering, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran

ABSTRACT

In this article, nonlinear thermomechanical analysis of transient vibrations and buckling stability of shallow composite bicurve shell under thermal loading has been performed. Both the geometric nonlinearity of the structure and the nonlinearity of material properties resulting from temperature changes in the analysis have been used. First-order shear theory and Hamilton's principle were used to derive the crustal motion equations and boundary conditions. In the following, the Ritz method is used to solve these equations. In order to distribute the temperature inside the shell, it is assumed that the temperature changes with time and coordinates only along the thickness. In addition, the effect of important parameters such as the effects of layering order, curvature and thickness of the shell on the temporal evolution of temperature and deflection of flat composite shell and bicurved under thermal boundary conditions has been studied. In order to validate the results, The deflect of center a homogeneous square plate under thermal loading was compared with the research results mentioned in the literature. Also, the results of thermal dynamic buckling of the composite shell under thermal load show that by decreasing the thickness of the shell, the elapsed time until the threshold of dynamic buckling is decreased. The necessary and sufficient conditions for the occurrence of dynamic buckling phenomenon are the absence of transverse loading and the application of the clamped boundary condition. It is also necessary to include nonlinear effects to find the buckling response.

ARTICLE INFO

Receive Date: 02 June 2023

Revise Date: 14 August 2023

Accept Date: 28 September 2023

Keywords:

*Forced vibrations
dynamic buckling
temperature
Ritz method
first order shear theory*

All rights reserved to Iranian Society of Structural Engineering.

doi: <https://doi.org/10.22065/jsce.2023.394985.3104>

*Corresponding author: Alireza Pourmoayed.

Email address: pourmoayed@mut.ac.ir

تحلیل ارتعاشات و کمانش دینامیکی غیرخطی پوسته‌های مرکب دو انحنایی تحت اثر بارگذاری حرارتی

علیرضا پورموید^{۱*}، کرامت ملک‌زاده فرد^۲، محمدعلی رنجبر^۳

۱- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه پدافند هوایی خاتم‌الانبیاء (ص)، تهران، ایران

۲- استاد، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

۳- استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه پدافند هوایی خاتم‌الانبیاء (ص)، تهران، ایران

چکیده

در این مقاله تحلیل غیرخطی ترمومکانیک ارتعاشات گذرای و پایداری کمانشی پوسته دو انحنایی مرکب کم‌عمق تحت بارگذاری حرارتی انجام شده است. به طور توأم غیرخطی هندسی سازه و غیرخطی خواص موادی حاصل از تغییرات دما در تحلیل استفاده شده است. برای استخراج معادلات حرکت پوسته و شرایط مرزی از تئوری مرتبه اول برشی و اصل همپلتون استفاده شد. در ادامه برای حل این معادلات از روش ریتز استفاده گردیده است. به منظور توزیع دما درون پوسته فرض می‌شود تغییر دمایی با زمان و مختصات تنها در راستای ضخامت صورت می‌پذیرد. علاوه بر این، اثر پارامترهای مهمی همچون تأثیرات ترتیب لایه‌چینی، انحنا و ضخامت پوسته بر تحول زمانی دما و خیز پوسته کامپوزیتی تحت و دو انحنایی تحت شرایط مرزی حرارتی مورد مطالعه قرار گرفته است. جهت صحت‌سنجی نتایج، خیز مرکز ورق همگن مربعی تحت بارگذاری حرارتی با نتایج پژوهش اشاره شده در ادبیات مورد مقایسه قرار گرفت. همچنین نتایج کمانش دینامیکی حرارتی پوسته کامپوزیتی تحت بار حرارتی نشان می‌دهد که با کاهش ضخامت پوسته مدت زمان سپری شده تا آستانه کمانش دینامیکی کاهش می‌یابد. شرایط لازم و کافی برای بروز پدیده کمانش دینامیکی به صورت عدم وجود بارگذاری عرضی و اعمال شرط مرزی گیردار است. همچنین وارد نمودن اثرات غیرخطی برای یافتن پاسخ کمانش یافته ضروری است.

کلمات کلیدی: ارتعاشات اجباری، کمانش دینامیکی، دما، روش ریتز، تئوری مرتبه اول برشی.

شناسه دیجیتال:		سابقه مقاله:			
doi:	چاپ	انتشار آنلاین	پذیرش	بازنگری	دریافت
https://doi.org/10.22065/jsce.2023.394985.3104	۱۴۰۳/۰۳/۳۱	۱۴۰۲/۰۷/۰۶	۱۴۰۲/۰۷/۰۶	۱۴۰۲/۰۵/۲۳	۱۴۰۲/۰۳/۱۲
10.22065/jsce.2023.394985.3104	علیرضا پورموید pourmoayed@mut.ac.ir			*نویسنده مسئول: پست الکترونیکی:	

۱- مقدمه

پوسته‌ها یکی از عناصر رایج کاربردی در ساختارهای مهندسی است که به عنوان مثال می‌توان به مخازن تحت فشار، پوسته زیردریایی‌ها و کشتی‌ها، بال و مخزن سوخت هواپیماها، لوله‌ها، بدنه موشک‌ها، سازه‌های هوایی و بسیاری از موارد دیگر اشاره نمود. برای ساخت پوسته‌ها از مواد متفاوتی استفاده می‌شود که در میان آن‌ها مواد کامپوزیتی به دلیل داشتن خواصی چون نسبت مقاومت و سفتی بالا نسبت به وزن، دارای مزیتی منحصر به فرد است. کبیر [۱] و چادری [۲]، به بررسی ارتعاشات آزاد یک پانل کامپوزیتی با دو انحنا از نوع چند لایه‌ی متقارن پرداختند. تئوری مرتبه اول برشی^۱ ساندرز برای تشکیل معادلات دیفرانسیل جزئی خطی به کار گرفته شده است. آن‌ها برای حل معادلات و به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی از روش ناویر و شرایط مرزی ساده استفاده نمودند. تأثیر پارامترهای جنس و هندسه مانند نسبت طول به ضخامت، نسبت شعاع به ضخامت، زاویه الیاف روی فرکانس طبیعی و شکل مودها در این تحقیق‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. آمابیلی^۲ [۳]، ارتعاشات غیرخطی یک پوسته کم ضخامت^۳ دو انحنایی را بررسی و روابط کرنش جابه‌جایی را غیرخطی در نظر گرفته و از تئوری پوسته دائل و ناواژیلو^۴ استفاده نمود. در این مطالعه، مواردی همچون اینرسی داخل صفحه‌ای و نقص هندسی منظور شده و معادلات حرکت به روش لاگرانژ تعیین گردیده و سپس معادلات غیرخطی حرکت با استفاده از روش طول کمان^۵ و انتگرال مستقیم زمانی حل شده است. بارگذاری به صورت هارمونیک و شرایط مرزی ساده منظور شده است. آذرافزا و همکاران، ارتعاشات آزاد و اجباری پوسته استوانه‌ای ساندویچی مرکب با تقویت‌کننده‌های متعامد را با استفاده از تئوری مرتبه بالا مورد تحلیل قرار دادند. آن‌ها به منظور صحت‌گذاری نتایج ارتعاشات آزاد و اجباری به دست آمده، تحلیل حاضر را با نتایج دیگر مراجع و نرم‌افزار آباکوس مقایسه کردند [۴]. انصاریان و جعفری [۵] ارتعاشات آزاد و اجباری پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی محتوی سیال را مورد بررسی قرار دادند. در این تحقیق برای حل معادلات حاکم بر پوسته از تئوری مرتبه اول برشی، برای نوشتن روابط کرنش - تغییر مکان و انحنا - تغییر مکان از تقریب اول لاو و همچنین برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی محتوی سیال از روش انرژی بر اساس اصل انرژی پتانسیل کمینه استفاده شده است. داک^۶ و همکاران تحلیل دینامیکی غیرخطی و ارتعاشات پوسته‌های هدفمند کم‌عمق دو انحنایی پیزوالکتریک تحت بارهای مکانیکی و دمایی را مورد بررسی قرار دادند. در این تحقیق معادلات حاکم بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا ردی که شامل اثرات ترموپیزوالکتریک است استخراج و با استفاده از تابع تنش، روش گالرکین و روش رانگ-کوتا مرتبه چهارم حل گردیده است [۶]. نگوین^۷ و همکاران با استفاده از حل تحلیلی برای بررسی پاسخ دینامیکی غیرخطی و ارتعاش پوسته‌های کامپوزیتی کم‌عمق دو انحنایی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی هدفمند یک رویکرد جدید ارائه نمودند. در بخش نتایج عددی در این تحقیق، تأثیر پارامترهای هندسی، پایه‌های الاستیک، نقص اولیه، افزایش دما و کسر حجمی نانولوله بر ارتعاش غیرخطی پوسته‌های کم‌عمق دو انحنایی هدفمند بررسی شده است [۷]. کریمیاصل^۸ و همکاران پاسخ‌های کمانش و پس کمانش پوسته‌های کم‌عمق کامپوزیتی دو انحنایی هوشمند که در یک در فیبر SMA تعبیه شده بود را تحت بارگذاری رطوبت-حرارتی مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها تأثیر پارامترهای مختلف مانند افزایش دما، الگوی توزیع‌های مختلف، ولتاژ اعمالی، پتانسیل مغناطیسی و نسبت ابعاد و انحنا را بررسی کردند و دریافتند که این پارامترها تأثیر قابل توجهی بر فرکانس‌های غیرخطی دارند [۸]. ملک‌زاده و همکاران [۹] برای اولین بار، با استفاده از تئوری مرتبه بالای بهبودیافته پانل‌های ساندویچی به تحلیل ارتعاشات آزاد و کمانش پانل ساندویچی استوانه‌ای با هسته انعطاف‌پذیر و رویه‌ها با وجود لایه‌های روغن هوشمند مغناطیسی برای شرایط مرزی دو سر لولا پرداخته‌اند. نتایج آن‌ها نشان می‌دهد که فرکانس‌های طبیعی، بارهای بحرانی کمانش (مقادیر ویژه) و تغییر شکل‌های مودال عرضی (بردارهای ویژه) برای استوانه ساندویچی با لایه‌های روغن هوشمند مغناطیسی در رویه‌های پانل ساندویچی استوانه‌ای و هسته انعطاف‌پذیر، به صورت جدی متأثر از شدت میدان مغناطیسی حاکم می‌باشد. کوماری^۹ رفتار ارتعاش خمشی دامنه بزرگ

¹ FSDT² Amabili³ shallow shell⁴ Dnnell's and Novozhilov's shell theories⁵ arclength continuation method⁶ Duc⁷ Nguyen⁸ Karimiasl⁹ Kumari

پانل‌های کامپوزیتی تک و دو انحنایی را با استفاده از روش اجزای محدود بررسی نمود. در این مطالعه همچنین پاسخ دینامیکی غیرخطی پانل‌های استوانه‌ای و کروی تحت بارگذاری شوک حرارتی با و بدون فشار شعاعی بررسی شده است [۱۰]. بررسی ارتعاشات اجباری ورق دایروی توخالی با لبه‌های گیردار تحت نیروی هارمونیک توسط نصر اله براتی و همکاران [۱۱] پرداخته شده است. همچنین آن‌ها به منظور صحت‌گذاری نتایج، از مراجع موجود و نرم‌افزار آباکوس استفاده نمودند. نتایج آن‌ها نشان می‌دهد که تغییر فاز آلیاژ موجب کاهش استحکام ماده و رفتار غیرخطی باعث نرم‌شوندگی در آلیاژ می‌شود. شهنازی و ابراهیمی ممقانی، اثر میدان‌های رطوبتی-حرارتی-مغناطیسی بر دینامیک تیرهای مدرج تابعی متحرک محوری را با در نظرگیری مدل‌های مختلف تخلخل مطالعه کردند. در این تحقیق معادله دینامیکی سیستم بر اساس اصل تعمیم‌یافته همیلتون و فرضیات تئوری تیر رابلی استخراج شده است. سپس با کمک روش گالرکین، مسئله مقدار ویژه حل شده است و مشخصات فرکانسی و مرزهای ناپایداری سیستم به صورت عددی مشخص شده‌اند. نتایج آن‌ها نشان داده که با افزایش تخلخل برای سیستم با توزیع تخلخل غیریکنواخت نوع اول، پایداری بهبود می‌یابد. همچنین مشاهده نمودند که همانند اثرات محیط‌های رطوبتی-حرارتی، با افزایش شاخص توانی مواد مدرج، سرعت محوری بحرانی کاهش می‌یابد [۱۲]. رضانی و همکاران برای اولین بار تحلیل دینامیکی غیرخطی پوسته‌های ساندویچی FG/SMA/FG بر روی بسترهای الاستیک تحت بارگذاری حرارتی مکانیکی را مورد بررسی قرار داده‌اند. آن‌ها در این پژوهش، اثرات خواص مواد، پارامترهای هندسی، بستر الاستیک، بارهای حرارتی را بر روی آنالیز دینامیکی غیرخطی پوسته‌های هیبریدی FG/SMA/FG بررسی نموده‌اند [۱۳]. صالحی و همکاران تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری نانو ورق مستطیلی ویسکوالاستیک کلونین-ویت با استفاده از تئوری کوپل تنش اصلاح شده را مورد بررسی قرار داده‌اند. آن‌ها در بخش تحلیل نتایج تأثیر پارامترهایی مانند ضریب ویسکوالاستیک سازه‌های نانوورق، پارامتر مقیاس طول ماده، ضریب الاستیک خطی بستر بر روی فرکانس طبیعی، ماکزیمم خیز دینامیکی، اختلاف فاز و پدیده تشدید را بررسی کرده‌اند. در این پژوهش با توجه به نتایج حاصل شده مشخص شده است که در نظر گرفتن پارامتر مقیاس طول ماده منجر به افزایش سفتی و فرکانس طبیعی نانوورق می‌شود. همچنین در نظر گرفتن پارامتر مقیاس طول ماده منجر به رخ دادن پدیده تشدید در فرکانس‌های تحریک بالاتر و کاهش اختلاف فاز خواهد شد [۱۴]. پورموی و همکاران، تحلیل کماتش و پس‌کمانش پانل ساندویچی با هسته انعطاف‌پذیر تقویت‌شده با سیم‌های آلیاژ حافظه‌دار را بررسی کرده‌اند. در این پژوهش، ابتدا نیروی بحرانی کمانش پنج مود اول به ازای درصدهای متفاوت آلیاژ در پوسته‌ها و هسته مطالعه شده و سپس اثرات تغییر درصد حجمی آلیاژها، فاصله از محور خنثی، تغییر زوایای الیاف و اثر کرنش اولیه آلیاژ حافظه‌دار بر پایداری و رفتار پس از کمانش مورد بررسی قرار گرفته است. بررسی‌ها آن‌ها نشان از ایجاد تغییرات زیاد آلیاژ حافظه‌دار روی نتایج به دلیل تنش بازیابی بزرگی که در حین تغییر فاز ایجاد می‌کنند را دارد [۱۵]. بررسی ارتعاشات غیرخطی بعد از کمانش ناشی از بار حرارتی و تحلیل پایداری نانو ورق گرافن دولایه توسط ورزندیان و همکاران [۱۶] بررسی شده است. در این تحقیق تأثیر پارامترهای مختلف بر ارتعاشات بعد از کمانش نانو ورق گرافن دولایه در محیط حرارتی از جمله پارامتر مقیاس، ابعاد و بار حرارتی ارائه شده است. همچنین پایداری مودهای ارتعاشی حول یک وضعیت کمانشی بررسی شده است. نتایج آن‌ها نشان می‌دهد که پارامتر مقیاس و تغییر دما نقش مهمی در رفتار ارتعاش غیرخطی نانو ساختارهای کمانش کرده دارند. تحلیل کمانش صفحات کامپوزیتی تقویت‌شده با توزیع تابعی نانولوله‌های کربنی با استفاده از تکنیک بار نموی و روش آزادسازی دینامیکی توسط گلمکانی و ضیغمی مطالعه شده است. همچنین نتایج آن‌ها بیانگر این است که استفاده از توزیع تابعی به طور قابل-توجهی باعث افزایش بار بحرانی کمانش می‌شود [۱۷]. الهامی و زینلی پایداری دینامیکی یک تیر دو سر آزاد تحت نیروی ناپایستار محوری را مورد بررسی قرار داده‌اند. آن‌ها ابتدا، با استفاده از تحلیل مودال و روش المان محدود ارتعاشات عرضی تیر در حالت آزاد (بدون نیروی انتهایی) را مورد بررسی و سپس شکل مودها و فرکانس‌های طبیعی را با استفاده از روش المان محدود به دست آورده‌اند. در مرحله بعد، با استفاده از شکل مودها و فرکانس‌ها و تعامل مودهای ارتعاشی نسبت به جرم و سختی، معادله حاکم بر مسئله را با روش گالرکین حل کرده‌اند. نتایج آن‌ها نشان داد که در تیر یکنواخت دو سر آزاد با افزایش نیروی محوری، فرکانس ارتعاشات عرضی تیر همواره کاهش می‌یابد و پدیده فلاتر در نیروهای چندین برابر نیروی کمانش تیر مشاهده می‌شود. در حالی که برای تیر غیریکنواخت دو سر آزاد هر دو پدیده فلاتر و واگرایی ممکن است در تیر اتفاق افتد. دیگر اینکه، اثر فلاتر در سازه تیر به دلیل کوچک بودن نسبت نیروی تراست به وزن نسبتاً ناچیز بوده، ولی اثر اتصال مفصلی به مقدار قابل‌توجهی نیروی بحرانی فلاتر را کاهش می‌دهد. لذا، می‌توان به این نتیجه رسید که بررسی پایداری سازه برای پرنده‌های هدایت‌شونده به دلیل تأثیر ارتعاشات سازه تیر روی سیستم هدایت و کنترل آن بسیار مهم می‌باشد [۱۸].

چان^{۱۰} و همکاران ارتعاشات و پاسخ دینامیکی غیرخطی پوسته‌های مخروطی بریده کامپوزیتی هدفمند که در بستر الاستیک و در محیط‌هایی دمایی قرار گرفته را مورد بررسی قرار دادند. در این تحقیق اثرات پارامترهای ناهمگن، ابعادی، سفت‌کننده‌های بیرونی، دما و بسترهای الاستیک بر ارتعاش و پاسخ دینامیکی غیرخطی سازه‌ها ارائه شده است [۱۹]. نگوین^{۱۱} و همکاران ارتعاش و تحلیل دینامیکی غیرخطی پانل کامپوزیت ساندویچی چندلایه با ضخامت متغیر در محیط حرارتی را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و با در نظر گرفتن غیرخطی بودن هندسی و نقص هندسی اولیه، مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها معادلات حرکت تحلیل دینامیکی را با استفاده از روش گالرکین تعیین و سپس معادله به‌دست‌آمده را با استفاده از روش رانگ-کوتا به صورت عددی حل نمودند. در بخش نتایج عددی، آن‌ها اثرات عیوب هندسی اولیه، پارامترهای هندسی، خواص مواد، ضرایب بستر، بارهای مکانیکی، دما و ضخامت متغیر بر پاسخ دینامیکی غیرخطی و ارتعاش پانل کامپوزیت چندلایه را بررسی کردند [۲۰]. سالاری و همکاران کمانش دینامیکی غیرخطی و ارتعاش پس‌کمانش حرارتی نانو تیرهای متخلخل هدفمند وابسته به دما را بر اساس تئوری محلی مورد بررسی قرار دادند. در این تحقیق برای ارزیابی کمانش دینامیکی غیرخطی نانو تیرهای هدفمند تحت یک بار دینامیکی ناگهانی، از طرح ادغام زمانی نیومارک همراه با روش تکراری نیوتن-رافسون استفاده شده است. آن‌ها همچنین پس از اعتبارسنجی مدل ریاضی توسعه‌یافته، یک بررسی جامع برای تعیین نقش پارامترهای فیزیکی و هندسی مختلف بر روی ویژگی‌های ارتعاشی و کمانشی دینامیکی نانوتیرهای هدفمند پس‌کمانش شده انجام داده‌اند [۲۱]. نوری و استرکی [۲۲]، ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای تقویت‌شده طولی (استرینگر) به روش تحلیلی با هشت نوع مختلف تکیه‌گاه ساده و تکیه‌گاه گیردار را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها در حل تحلیلی از روش ریتز استفاده و تقویت‌کننده‌ها را به صورت المان‌های مجزا در نظر گرفته‌اند. به علاوه تغییرات فرکانس‌های طبیعی، فرکانس پایه و شکل مودهای طبیعی را به ازای شرایط مرزی پیش‌گفته مورد بررسی و تحلیل قرار دادند و در برخی حالت‌ها نتایج به دست آمده را با نتایج روش المان محدود مقایسه کرده‌اند. همچنین اثر خارج از مرکزی تقویت‌کننده‌ها بر تغییرات فرکانس‌های طبیعی خصوصاً فرکانس پایه مورد بررسی قرار گرفته است. آن‌ها در پایان پژوهش، اثر بارگذاری فشاری استاتیکی محوری و شرایط مرزی بر فرکانس‌های طبیعی را مورد بررسی قرار داده و بار کمانش آن‌ها را نیز تعیین کرده‌اند.

با توجه به مطالعات انجام شده و خلاء تحقیقاتی، در این مقاله تحلیل غیرخطی ترمومکانیک ارتعاشات گذرای و پایداری کمانشی پوسته دو-انحنایی مرکب کم‌عمق انجام شده است. همچنین لازم به ذکر است به طور توأم غیرخطی هندسی سازه و غیرخطی خواص موادی حاصل از تغییرات دما در تحلیل استفاده شده است.

۲- استخراج معادلات

در این بخش، ابتدا مدل هندسی، منته‌های تنش و نحوه توزیع دما در پوسته مورد مطالعه و سپس با استفاده از تئوری مرتبه اول برشی و اصل همیلتون معادلات حاکم بر حرکت به همراه شرایط مرزی مربوطه برای پوسته کامپوزیتی چندلایه‌ای دو انحنایی تحت بارگذاری حرارتی استخراج می‌گردد. در ادامه از روش ریتز^{۱۲} برای حل معادلات استفاده و نتایج به دست آمده مورد تحلیل و بررسی قرار می‌گیرند.

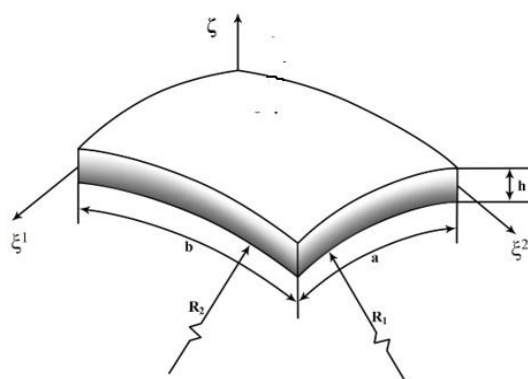
۲-۱- مدل هندسی مورد مطالعه

در این تحقیق بر روی پوسته‌ای با ضخامت یکسان h ، مختصات متعامد (ξ^1, ξ^2, ξ^3) که در آن در هر نقطه جهت‌های مختصات بر جهت‌های اصلی انحنای منطبق هستند، در نظر گرفته می‌شود (شکل ۱). به علاوه، رویه $\xi = 0$ منطبق بر سطح میانی انتخاب می‌گردد. بردار مکان نقطه $(0, \xi^2, \xi^1)$ روی سطح میانی با r و موقعیت نقطه دلخواه (ξ^1, ξ^2, ξ^3) با R نمایش داده می‌شود.

¹⁰ Chan

¹¹ Nguyen

¹² Ritz



شکل ۱: هندسه یک پوسته دو انحنایی

لازم به ذکر است در این تحقیق با توجه به دقت نظریه برشی مرتبه اول در پیش‌بینی تغییر شکل هندسی پوسته، در رابطه (۱) از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و از فرضیات ذیل استفاده گردیده است:

- خطوط مستقیم عمود بر سطح میانی تغییر طول ندارند.
- عمودهای عرضی قبل و پس از تغییر شکل مستقیم بوده، اما لزوماً عمود باقی نمی‌مانند.
- خیز پوسته می‌تواند نسبتاً بزرگ، اما لازم است کرنش‌ها کوچک باشند.
- تنش عمودی در راستای ضخامت ناچیز بوده و بنابراین می‌توان وضعیت تنش پوسته را تنش صفحه‌ای در نظر گرفت.

$$u_1(\zeta^1, \zeta^2, \zeta, t) = u(\zeta^1, \zeta^2, t) + \zeta \psi_1(\zeta^1, \zeta^2, t)$$

$$u_2(\zeta^1, \zeta^2, \zeta, t) = v(\zeta^1, \zeta^2, t) + \zeta \psi_2(\zeta^1, \zeta^2, t) \quad (1)$$

$$u_3(\zeta^1, \zeta^2, \zeta, t) = w(\zeta^1, \zeta^2, t)$$

در رابطه (۱)، u و v تغییر مکان‌های سطح میانی و همچنین ψ_1 و ψ_2 به ترتیب چرخش عمودهای جانبی حول محورهای y و x هستند. با استفاده از فرضیات فون کارمن و مقدراری عملیات ریاضی، روابط کرنش - جابه‌جایی به صورت زیر خلاصه می‌شود.

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right)} \left[\varepsilon_1^0 + \zeta \varepsilon_1^1 \right], \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{\left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right)} \left[\varepsilon_2^0 + \zeta \varepsilon_2^1 \right], \quad \varepsilon_3 = 0$$

$$\varepsilon_4 = \frac{1}{\left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right)} \left[\varepsilon_{23}^0 + \zeta \varepsilon_{23}^1 \right], \quad \varepsilon_5 = \frac{1}{\left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right)} \left[\varepsilon_{13}^0 + \zeta \varepsilon_{13}^1 \right] \quad (2)$$

$$\varepsilon_6 = \frac{1}{\left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right)} \left[\varepsilon_{12}^0 + \zeta \varepsilon_{12}^1 \right] + \frac{1}{\left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right)} \left[\varepsilon_{21}^0 + \zeta \varepsilon_{21}^1 \right]$$

در روابط فوق از تعاریف (۳) استفاده شده است

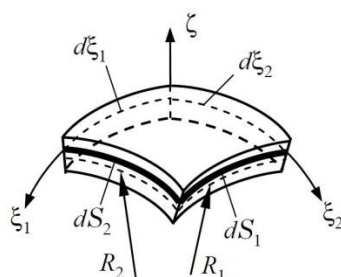
$$\begin{aligned} \varepsilon_1^0 &= \frac{1}{a_1} \left[\frac{\partial u}{\partial \xi^1} + \frac{1}{a_2} \frac{\partial a_1}{\partial \xi^2} v + \frac{a_1}{R_1} w \right] + \frac{1}{2a_1^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi^1} \right)^2, & \varepsilon_1^1 &= \frac{1}{a_1} \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial \xi^1} + \frac{1}{a_2} \frac{\partial a_1}{\partial \xi^2} \psi_2 \right] \\ \varepsilon_2^0 &= \frac{1}{a_2} \left[\frac{\partial v}{\partial \xi^2} + \frac{1}{a_1} \frac{\partial a_2}{\partial \xi^1} u + \frac{a_2}{R_2} w \right] + \frac{1}{2a_2^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi^2} \right)^2, & \varepsilon_2^1 &= \frac{1}{a_2} \left[\frac{\partial \psi_2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{a_1} \frac{\partial a_2}{\partial \xi^1} \psi_1 \right] \\ \varepsilon_{23}^0 &= \frac{1}{a_2} \left[\frac{\partial w}{\partial \xi^2} + a_2 \psi_2 - \frac{a_2}{R_2} v \right], & \varepsilon_{23}^1 &= 0, & \varepsilon_{13}^0 &= \frac{1}{a_1} \left[\frac{\partial w}{\partial \xi^1} + a_1 \psi_1 - \frac{a_1}{R_1} u \right], & \varepsilon_{13}^1 &= 0 \\ \varepsilon_{12}^0 &= \frac{1}{a_1} \left[\frac{\partial v}{\partial \xi^1} - \frac{1}{a_2} \frac{\partial a_1}{\partial \xi^2} u \right] + \frac{1}{2a_1 a_2} \frac{\partial w}{\partial \xi^1} \frac{\partial w}{\partial \xi^2}, & \varepsilon_{12}^1 &= \frac{1}{a_1} \left[\frac{\partial \psi_2}{\partial \xi^1} - \frac{1}{a_2} \frac{\partial a_1}{\partial \xi^2} \psi_1 \right] \\ \varepsilon_{21}^0 &= \frac{1}{a_2} \left[\frac{\partial u}{\partial \xi^2} - \frac{1}{a_1} \frac{\partial a_2}{\partial \xi^1} v \right] + \frac{1}{2a_1 a_2} \frac{\partial w}{\partial \xi^1} \frac{\partial w}{\partial \xi^2}, & \varepsilon_{21}^1 &= \frac{1}{a_2} \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial \xi^2} - \frac{1}{a_1} \frac{\partial a_2}{\partial \xi^1} \psi_2 \right] \end{aligned} \quad (3)$$

۲-۲- منتجه‌های تنش

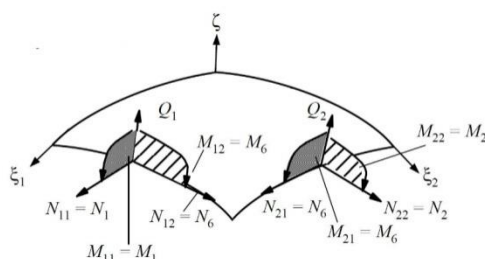
برای استخراج منتجه‌های تنش مطابق شکل ۲، نیروی کششی وارد بر المان سطح مقطعی عمود بر محور ξ^1 برابر با $\sigma_{11} ds_2$ در نظر گرفته می‌شود. به علاوه، المان سطح در این حالت با توجه به شکل ۳ برابر با

$$dS_\alpha = ds_\alpha d\zeta = A_\alpha d\xi^\alpha d\zeta = \left(1 + \frac{\zeta}{R_\alpha} \right) a_\alpha d\xi^\alpha d\zeta \quad (4)$$

است؛ بنابراین



شکل ۲: المان دیفرانسیلی واقع بر پوسته



شکل ۳: منتجه‌های تنش بر المان پوسته

$$\int_{-0.5h}^{0.5h} \sigma_{11} dS_2 = \left[\int_{-0.5h}^{0.5h} \sigma_{11} \left(1 + \frac{\zeta}{R_2} \right) d\zeta \right] a_2 d\xi^2 = N_{11} a_2 d\xi^2 \quad (5)$$

در رابطه (5)، N_{11} نیروی غشایی در جهت محور ξ^1 بر واحد طول سطح میانی در جهت ξ^2 است.

$$N_{11} = \int_{-0.5h}^{0.5h} \sigma_{11} \left(1 + \frac{\zeta}{R_2} \right) d\zeta \quad (6)$$

به نحوی مشابه، M_{11} گشتاور در جهت محور ξ^1 بر واحد طول سطح میانی در جهت ξ^2 تعریف می‌شود.

$$\int_{-0.5h}^{0.5h} \sigma_{11} \zeta dS_2 = \left[\int_{-0.5h}^{0.5h} \sigma_{11} \left(1 + \frac{\zeta}{R_2} \right) \zeta d\zeta \right] a_2 d\xi^2 = M_{11} a_2 d\xi^2 \quad (7)$$

که در آن

$$M_{11} = \int_{-0.5h}^{0.5h} \sigma_{11} \left(1 + \frac{\zeta}{R_2} \right) \zeta d\zeta \quad (8)$$

با ادامه روند فوق، می‌توان دیگر منته‌های تنش را تعریف نمود. نتیجه نهایی عبارت است از

$$\begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ N_{21} \end{Bmatrix} = \int_{-0.5h}^{0.5h} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \left(1 + \frac{\zeta}{R_2} \right) \\ \sigma_{22} \left(1 + \frac{\zeta}{R_1} \right) \\ \sigma_{12} \left(1 + \frac{\zeta}{R_2} \right) \\ \sigma_{12} \left(1 + \frac{\zeta}{R_1} \right) \end{Bmatrix} d\zeta, \quad \begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \\ M_{21} \end{Bmatrix} = \int_{-0.5h}^{0.5h} \begin{Bmatrix} \zeta \sigma_{11} \left(1 + \frac{\zeta}{R_2} \right) \\ \zeta \sigma_{22} \left(1 + \frac{\zeta}{R_1} \right) \\ \zeta \sigma_{12} \left(1 + \frac{\zeta}{R_2} \right) \\ \zeta \sigma_{12} \left(1 + \frac{\zeta}{R_1} \right) \end{Bmatrix} d\zeta, \quad \begin{Bmatrix} Q_{23} \\ Q_{13} \end{Bmatrix} = \int_{-0.5h}^{0.5h} k_s \begin{Bmatrix} \sigma_{23} \left(1 + \frac{\zeta}{R_1} \right) \\ \sigma_{13} \left(1 + \frac{\zeta}{R_2} \right) \end{Bmatrix} d\zeta \quad (9)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در حالت کلی روابط

$$N_{\alpha\beta} \neq N_{\beta\alpha}, \quad M_{\alpha\beta} \neq M_{\beta\alpha}$$

برقرار است. در صورت کم‌عمق بودن پوسته موردنظر می‌توان از نسبت‌های $\frac{\xi}{R_a}$ صرف‌نظر نموده و بنابراین

$$N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha}, \quad M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha}$$

۲-۳- میدان دما

به منظور توزیع دما درون پوسته فرض می‌شود تغییر دما تنها در راستای ضخامت صورت می‌پذیرد. در غیاب تولید حرارت حجمی، معادله گذرای انتقال حرارت در یک محیط غیرهمگن و دارای ویژگی‌های فیزیکی وابسته به دما به صورت

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\kappa(\zeta, T) \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right) = \rho(\zeta, T) c(\zeta, T) \frac{\partial T}{\partial t} \quad (10)$$

نوشته می‌شود که در آن $T(\xi, t)$ بیانگر دما بر حسب کلوین، $k(\xi, T)$ رسانندگی حرارتی، $\rho(\xi, T)$ چگالی و $c(\xi, T)$ ظرفیت گرمایی ویژه است. از آنجا که مقدم بر بارگذاری حرارتی، پوسته در دمای مرجع قرار دارد، بنابراین شرط اولیه معادله فوق به فرم

$$T(\zeta, 0) = T_0 \quad (11)$$

منظور می‌گردد. معادله حرارت فوق به دو شرط مرزی برای تعیین جواب نیاز دارد. انواع مختلف شرط مرزی حرارتی برای پوسته قابل تصور است. در این تحقیق فرض می‌شود شرط مرزی حرارتی پوسته یکی از سه حالت زیر است.

- هر دو سطح فوقانی و تحتانی شرط مرزی اساسی دارند و بنابراین دما بر روی هر دو سطح تعیین شده است.
- سطح فوقانی شرط مرزی اساسی و سطح تحتانی شرط مرزی طبیعی دارد به نحوی که سطح بالایی دمای معین و سطح پایینی ایزوله است.

- هر دو سطح دارای شرط مرزی طبیعی هستند به طوری که سطح فوقانی تحت شار معین و سطح تحتانی ایزوله است. عبارت‌های ریاضی متناظر با این شرایط مرزی به صورت

$$T(0.5h, t) = T_u \quad , \quad T(-0.5h, t) = T_l \quad (12)$$

$$T(0.5h, t) = T_u \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial \zeta}(-0.5h, t) = 0 \quad (13)$$

$$\kappa(0.5h, T) \frac{\partial T}{\partial \zeta}(0.5h, t) = Q_u \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial \zeta}(-0.5h, t) = 0 \quad (14)$$

است. برای حل معادله حرارت فوق به همراه شرط اولیه و شرایط مرزی ذکر شده، روش تفاضل محدود در حوزه مکان استفاده می‌شود. با گسسته‌سازی و اعمال شرایط مرزی، معادله حرارت حاکم به فرم

$$c(T) \dot{T} + \kappa(T) T = F(T) \quad (15)$$

نوشته می‌شود. در معادله (۱۵)، $c(T)$ ماتریس ظرفیت گرمایی، $k(T)$ ماتریس رسانندگی حرارتی، $F(T)$ بردار بار حرارتی و نقطه مشتق‌گیری نسبت به زمان را نشان می‌دهد. به دلیل وابستگی ویژگی‌های فیزیکی پوسته به دما، ماتریس‌های حاضر در معادله (۱۵) به دما وابسته بوده و بنابراین معادله فوق یک معادله غیرخطی است. از این رو لازم است تا پاسخ معادله در هر گام زمانی با استفاده از فرآیند تکرار تعیین گردد. برای این منظور، ویژگی‌های فیزیکی پوسته ابتدا در دمای مرجع برآورد می‌گردد و معادله (۱۵) حل می‌شود. با برآورد ویژگی‌های فیزیکی در دمای جدید حاصل شده، دستگاه معادلات فوق به طور مجدد حل می‌گردد. این فرآیند تکرار تا دستیابی به سطح دقت موردنظر ادامه می‌یابد.

۲-۴- معادلات حرکت

در بخش حاضر با استفاده از اصل همیلتون معادلات حاکم بر حرکت پوسته دو انحنایی تحت بار دینامیکی حرارتی گذرا استخراج می‌شود. بر این اساس، نقطه شروع بیان ریاضی اصل همیلتون به صورت

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta K - \delta U + \delta W) dt = 0 \quad (16)$$

است. در رابطه (۱۶)، δK تغییرات انرژی جنبشی، δU تغییرات انرژی کرنشی و δW کار ناشی از نیروهای خارجی است. برای تغییرات انرژی جنبشی می توان نوشت

$$\delta K = \int_V \rho (\dot{u}_1 \delta \dot{u}_1 + \dot{u}_2 \delta \dot{u}_2 + \dot{u}_3 \delta \dot{u}_3) dV \quad (17)$$

با جایگذاری میدان جابه جایی در رابطه (۱۷) نتیجه می شود

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_V [(\dot{u} + \zeta \dot{\psi}_1)(\delta \dot{u} + \zeta \delta \dot{\psi}_1) + (\dot{v} + \zeta \dot{\psi}_2)(\delta \dot{v} + \zeta \delta \dot{\psi}_2) + \dot{w} \delta \dot{w}] A_1 A_2 d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 \\ &= \int_\Omega [I_0(\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) + I_1(\dot{u} \delta \dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_1 \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{\psi}_2 + \dot{\psi}_2 \delta \dot{v}) \\ &\quad + I_2(\dot{\psi}_1 \delta \dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 \delta \dot{\psi}_2)] a_1 a_2 d\xi^1 d\xi^2 \end{aligned} \quad (18)$$

که در آن از تعریف رابطه (۱۹) استفاده شده است

$$I_i = \int_{-0.5h}^{0.5h} \rho \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) \zeta^i d\zeta \quad (19)$$

با انتگرال گیری جزیه جزی می توان عبارت تغییرات انرژی جنبشی را به صورت

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta K dt = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_\Omega [I_0(\ddot{u} \delta u + \ddot{v} \delta v + \ddot{w} \delta w) + I_1(\ddot{u} \delta \psi_1 + \dot{\psi}_1 \delta \dot{u} + \ddot{v} \delta \psi_2 + \dot{\psi}_2 \delta \dot{v}) + I_2(\dot{\psi}_1 \delta \dot{\psi}_1 + \dot{\psi}_2 \delta \dot{\psi}_2)] a_1 a_2 d\xi^1 d\xi^2 \quad (20)$$

بازنویسی نمود. تغییرات انرژی کرنشی توسط رابطه

$$\delta U = \int_V [\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \delta \varepsilon_{22} + \sigma_{12} \delta \varepsilon_{12} + \sigma_{13} \delta \varepsilon_{13} + \sigma_{23} \delta \varepsilon_{23}] A_1 A_2 d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 \quad (21)$$

تعیین می گردد. با محاسبه انتگرال در راستای ضخامت، رابطه (۲۱) به فرم

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V [N_{11} \delta \varepsilon_{11}^0 + M_{11} \delta \varepsilon_{11}^1 + N_{22} \delta \varepsilon_{22}^0 + M_{22} \delta \varepsilon_{22}^1 + N_{12} \delta \varepsilon_{12}^0 + M_{12} \delta \varepsilon_{12}^1 + N_{21} \delta \varepsilon_{21}^0 + M_{21} \delta \varepsilon_{21}^1 \\ &\quad + Q_{13} \delta \varepsilon_{13}^0 + Q_{23} \delta \varepsilon_{23}^0] a_1 a_2 d\xi^1 d\xi^2 \end{aligned} \quad (22)$$

نوشته می شود. به علاوه، کار مجازی ناشی از بار خارجی $q(\xi^1, \xi^2)$ که (به عنوان مثال) بر سطح فوقانی اعمال می گردد، توسط رابطه

$$\delta W = \int_\Omega q(\xi^1, \xi^2) \delta w \left(1 + \frac{h}{R_1}\right) \left(1 + \frac{h}{R_2}\right) d\xi^1 d\xi^2 \quad (23)$$

بیان می گردد. در محاسبات پیشین، پنج معادله تعادل از شش معادله در نظر گرفته شده است. در واقع، معادله تعادل گشتاورها حول محور عمود بر سطح میانی در نظر گرفته نشده است. این معادله به صورت

$$N_{12} - N_{21} + \frac{M_{12}}{R_1} - \frac{M_{21}}{R_2} = 0 \quad (24)$$

است. صرف نظر از این معادله سبب می شود که با چرخش جسم صلب، یک میدان تنش در پوسته پدیدار می شود. برای حل مسئله فوق،

لازم است عبارت

$$\int_1^2 dt \int_{\Omega} \left(N_{12} - N_{21} + \frac{M_{12}}{R_1} - \frac{M_{21}}{R_2} \right) \delta \varphi_n a_1 a_2 d\xi^1 d\xi^2 \quad (25)$$

به تابع انرژی کرنشی افزوده گردد که در آن φ_n با استفاده از رابطه

$$\varphi_n = \frac{1}{2} \nabla \times u \cdot n = \frac{1}{2a_1 a_2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi^1} (a_2 v) - \frac{\partial}{\partial \xi^2} (a_1 u) \right] \quad (26)$$

محاسبه می گردد. با جایگذاری نتایج فوق در اصل همیلتون و انتگرال گیری جز به جز و همچنین استفاده از تعاریف زیر

$$\tilde{N}_{12} = \tilde{N}_{21} = \frac{1}{2} (N_{12} + N_{21}) \quad (27)$$

$$\tilde{M}_{12} = \tilde{M}_{21} = \frac{1}{2} (M_{12} + M_{21}) \quad (28)$$

معادلات حاکم بر حرکت پانل ساندویچی دو انحنایی حاصل می شود.

$$\frac{\partial}{\partial \xi^1} (a_2 N_{11}) + \frac{\partial}{\partial \xi^2} (a_1 \tilde{N}_{12}) - N_{22} \frac{\partial a_2}{\partial \xi^1} + \tilde{N}_{12} \frac{\partial a_1}{\partial \xi^2} + \frac{a_1 a_2}{R_1} Q_1 + \frac{a_1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\frac{M_{12}}{R_1} - \frac{M_{21}}{R_2} \right) = a_1 a_2 \left(I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} \right) \quad (29)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi^1} (a_2 \tilde{N}_{12}) + \frac{\partial}{\partial \xi^2} (a_1 N_{22}) - N_{11} \frac{\partial a_1}{\partial \xi^2} + \tilde{N}_{12} \frac{\partial a_2}{\partial \xi^1} + \frac{a_1 a_2}{R_2} Q_2 + \frac{a_2}{2} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\frac{M_{21}}{R_2} - \frac{M_{12}}{R_1} \right) = a_1 a_2 \left(I_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} \right) \quad (30)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi^1} (a_2 Q_1) + \frac{\partial}{\partial \xi^2} (a_1 Q_2) - a_1 a_2 \left(\frac{N_{11}}{R_1} + \frac{N_{22}}{R_2} \right) + q = a_1 a_2 I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (31)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi^1} (a_2 M_{11}) + \frac{\partial}{\partial \xi^2} (a_1 \tilde{M}_{12})_1 - M_{22} \frac{\partial a_2}{\partial \xi^1} + \tilde{M}_{12} \frac{\partial a_1}{\partial \xi^2} - a_1 a_2 Q_1 = a_1 a_2 \left(I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} \right) \quad (32)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi^1} (a_2 \tilde{M}_{12}) + \frac{\partial}{\partial \xi^2} (a_1 M_{22}) - M_{11} \frac{\partial a_1}{\partial \xi^2} + \tilde{M}_{12} \frac{\partial a_2}{\partial \xi^1} - a_1 a_2 Q_2 = a_1 a_2 \left(I_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} \right) \quad (33)$$

شرایط مرزی مربوطه نیز به صورت روابط (۳۳) تعیین می گردد.

$$\xi^1 = const, \quad N_{11} \delta u = 0, \quad N_{12} \delta v = 0, \quad Q_{13} \delta w = 0, \quad M_{11} \delta \psi_1 = 0, \quad M_{12} \delta \psi_2 = 0 \quad (34)$$

$$\xi^2 = const, \quad N_{12} \delta u = 0, \quad N_{22} \delta v = 0, \quad Q_{23} \delta w = 0, \quad M_{12} \delta \psi_1 = 0, \quad M_{22} \delta \psi_2 = 0$$

۲-۵- معادلات ساختاری

در این تحقیق برای به دست آوردن معادلات ساختاری فرض می شود که پانل ساندویچی از تعدادی لایه ارتوتروپیک با ضخامت یکسان تشکیل شده است؛ به طوری که محور اصلی لایه k ام با محور ξ^1 زاویه θ_k را تشکیل می دهد. رابطه ساختاری لایه k ام در محوره های اصلی این لایه به صورت

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{bmatrix} - (T - T_0) \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

است که در آن

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (36)$$

$$Q_{44} = G_{23}, \quad Q_{55} = G_{13}, \quad Q_{66} = G_{12}$$

از آنجا که محوره های اصلی ماده در حالت کلی بر محوره های هندسی پوسته منطبق نیست، لازم است تا دستگاه مختصات مادی متصل به هر لایه به اندازه زاویه مناسب دوران داده شود. در این صورت رابطه ساختاری به صورت زیر نوشته می شود.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{bmatrix} - (T - T_0) \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_{11} \\ \bar{\alpha}_{22} \\ 2\bar{\alpha}_{12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

در رابطه (۳۵) و (۳۷)، Q_{ij} سفتی لایه k -ام در جهت محوره های اصلی ماده و \bar{Q}_{ij} سفتی لایه در جهت محوره های هندسی پوسته هستند. سفتی های انتقال یافته \bar{Q}_{ij} را می توان بر حسب سفتی های محوره های اصلی Q_{ij} توسط روابط

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)$$

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\
\bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\
\bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\
\bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\
\bar{Q}_{44} &= Q_{44} \cos^4 \theta + Q_{55} \sin^4 \theta \\
\bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) \sin \theta \cos \theta \\
\bar{Q}_{55} &= Q_{44} \sin^4 \theta + Q_{55} \cos^4 \theta
\end{aligned} \tag{38}$$

محاسبه نمود. به طور مشابه، روابط زیر برقرار است

$$\bar{\alpha}_{11} = \alpha_{11} \cos^2 \theta + \alpha_{22} \sin^2 \theta \quad ; \quad \bar{\alpha}_{22} = \alpha_{11} \sin^2 \theta + \alpha_{22} \cos^2 \theta \quad ; \quad \bar{\alpha}_{12} = 2 \sin \theta \cos \theta (\alpha_{11} - \alpha_{22}) \tag{39}$$

۲-۶- حل معادلات حاکم

به منظور حل معادلات حاکم بر حرکت پوسته دو انحنایی تحت بارگذاری و حرارت از روش ریتز استفاده می‌شود. بر این اساس، هر یک از متغیرهای اساسی u, v, w, ψ_x و ψ_y به صورت حاصل ضرب توابع (نامعین) زمانی و (معین) مکانی نوشته می‌شود که در آن بخش مکانی، خود تابعی از دو متغیر (مختصات توصیف سطح میانی پانل) است. بنابراین

$$\begin{Bmatrix} u(\xi^1, \xi^2, t) \\ v(\xi^1, \xi^2, t) \\ w(\xi^1, \xi^2, t) \\ \psi_x(\xi^1, \xi^2, t) \\ \psi_y(\xi^1, \xi^2, t) \end{Bmatrix} = \sum_m \begin{bmatrix} \varphi_m^u(\xi^1, \xi^2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_m^v(\xi^1, \xi^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_m^w(\xi^1, \xi^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varphi_m^{\psi_x}(\xi^1, \xi^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi_m^{\psi_y}(\xi^1, \xi^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_m(t) \\ V_m(t) \\ W_m(t) \\ \Psi_{x,m}(t) \\ \Psi_{y,m}(t) \end{Bmatrix} \tag{40}$$

در رابطه (۴۰)، $\varphi_m^u, \varphi_m^v, \varphi_m^w, \varphi_m^{\psi_x}$ و $\varphi_m^{\psi_y}$ توابع تقریب بوده و بر مبنای روش ریتز (جهت همگرایی به جواب) لازم است شرایط مرزی اساسی را ارضا نمایند. در پژوهش حاضر توابع تقریب مثلثاتی به کار گرفته شده است. با قرار دادن بسط فوق در فرم ضعیف معادلات حرکت، معادلات حاکم بر پوسته به صورت فشرده

$$M(T) \ddot{X} + K(X, T) X = F(X, T) \tag{41}$$

نوشته می‌شود. در رابطه (۴۱) بردار مجهولات به صورت

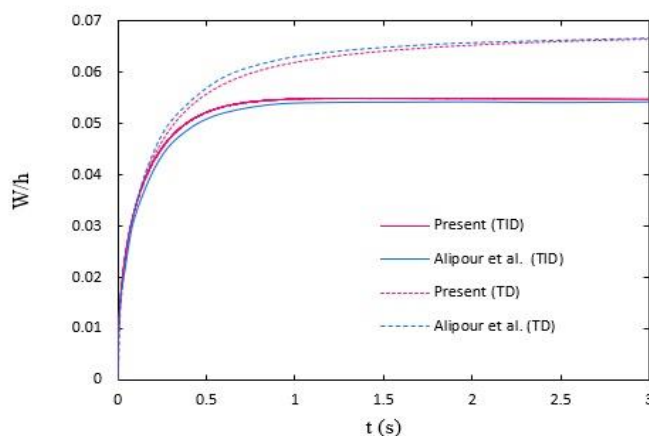
$$X = \begin{Bmatrix} U_m(t) \\ V_m(t) \\ W_m(t) \\ \Psi_{x,m}(t) \\ \Psi_{y,m}(t) \end{Bmatrix} \quad (42)$$

است. همان طور که مشاهده می شود، به دلیل در نظر گرفتن اثرات غیرخطی از نوع هندسی، دستگاه معادلات حاصل نیز غیرخطی بوده و لازم است جهت حصول جواب فرآیند تکرار به کار گرفته شود. به علاوه به دلیل فرض وابستگی به دمای ویژگی های فیزیکی، ماتریس های ظاهر شده در معادله (41) به دما نیز وابسته بوده و بنابراین لازم است در هر زمان ماتریس ها برآورد شوند. به منظور حل دستگاه معادلات غیرخطی مذکور از روش های خانواده نیومارک استفاده می شود [23].

۳- تحلیل نتایج

۳-۱- صحت سنجی

به منظور صحت سنجی نتایج پژوهش حاضر، ورقی مربعی با نسبت ضخامت به ضلع 0.07 در نظر گرفته می شود. سطح بالایی ورق دارای دمای 700 درجه کلوین و سطح پایینی در دمای مرجع 300 درجه کلوین فرض می شود. نتایج مربوط به ورق همگن در شکل 4 نمایش داده شده است. شرایط مرزی به صورت ساده و وابستگی ویژگی های فیزیکی در دو حالت مستقل از دما (TID) و وابسته به دما (TD) در نظر گرفته شده است. به منظور مقایسه از نتایج علیپور و همکاران [23] استفاده شده است. همان طور که مشاهده می شود، نتایج با دقت مناسبی بر یکدیگر منطبق هستند. همچنین لازم به ذکر است که ویژگی های فیزیکی اجزای سازنده پوسته کامپوزیتی مطابق ماده 1 از جدول 1 می باشد.



شکل 4: خیز مرکز ورق همگن مربعی تحت نوع اول بارگذاری حرارتی

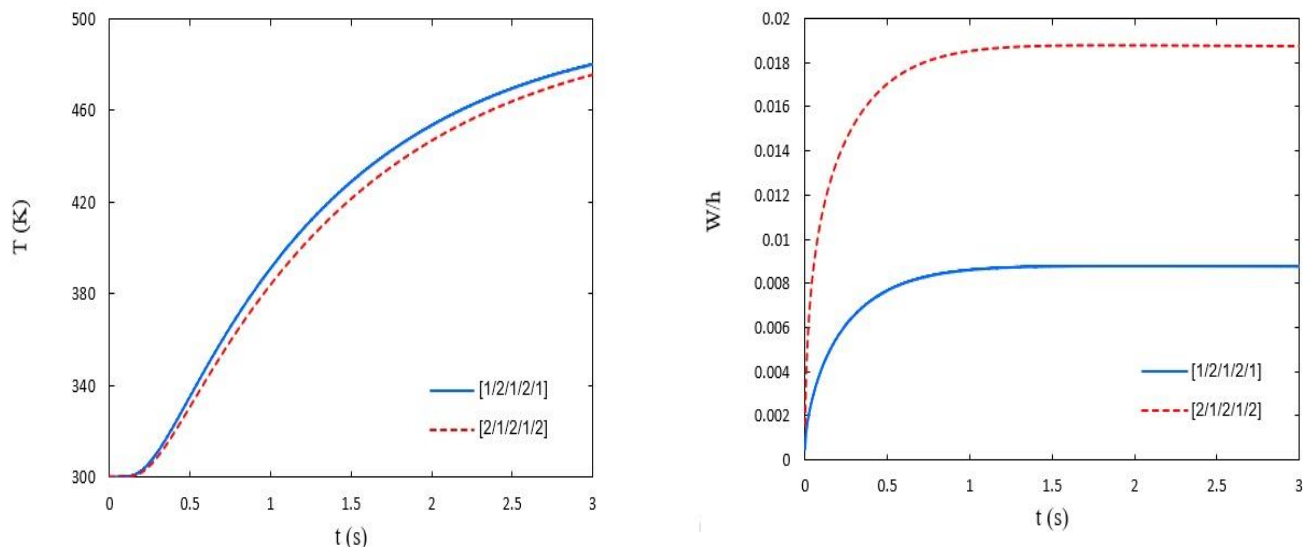
جدول ۱: ویژگی‌های فیزیکی اجزای سازنده پوسته کامپوزیتی

ویژگی	ماده نوع ۱	ماده نوع ۲	ویژگی	ماده نوع ۱	ماده نوع ۲
E_1 (GPa)	۱۳۱	۳۸/۶۱	κ (W / mK)	۵	۵
E_2 (GPa)	۱۰/۳۴	۸/۲۷	ρ (kg / m ³)	۱۶۲۷	۱۹۰۰
ν_{12}	۰/۲۲	۰/۲۶	c_v (J / kgK)	۷۰۰	۷۰۰
G_{23} (GPa)	۶/۲۰۵	۳/۴۴۷	α_1 (10 ⁻⁶ / K)	۰/۰۹	۲/۶۷
G_{13} (GPa)	۶/۲۰۵	۴/۱۳۷	α_2 (10 ⁻⁶ / K)	۸/۶۷	۶/۸۳
G_{12} (GPa)	۶/۸۹۵	۴/۱۳۷			

۳-۲- ارتعاشات اجباری حاصل از بارگذاری حرارتی

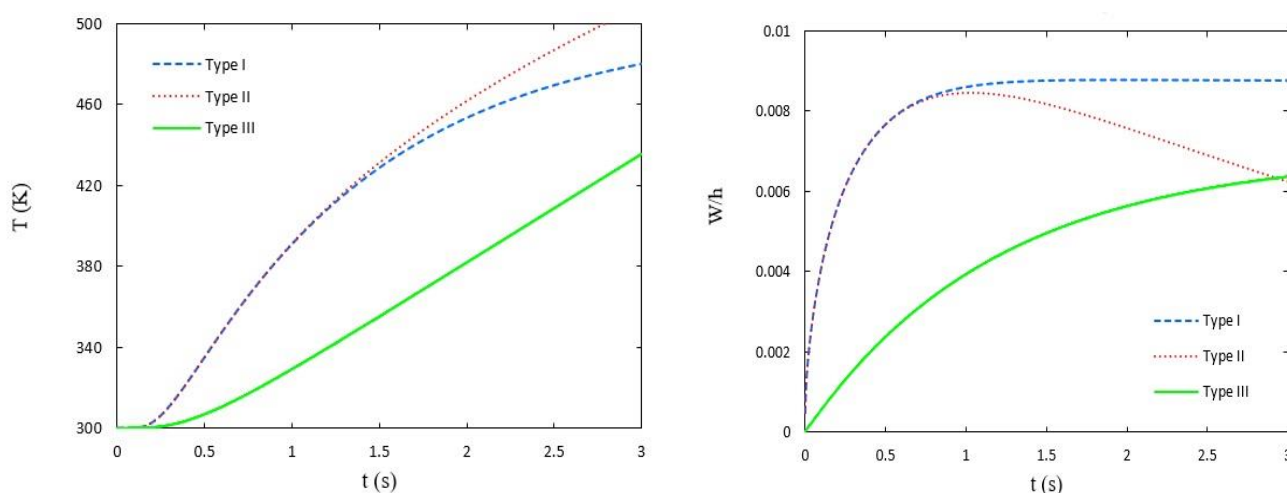
در بخش حاضر تنها بارگذاری حرارتی بر ورق اعمال شده و مقادیر پیش فرض $h = 0.007$, $a = b = 0.1$ برای ابعاد و ضخامت ورق در نظر گرفته می‌شود. شرایط مرزی ورق نیز در حالت پیش فرض به صورت تکیه‌گاه ساده انتخاب می‌شود. دمای سطح فوقانی ۷۰۰ کلوین و دمای سطح تحتانی ۳۰۰ کلوین بوده و بارگذاری حرارتی از نوع ۱ است.

اولین مثال به بررسی تأثیر ترتیب لایه‌ها در یک ورق کامپوزیتی تخت تحت نوع اول بارگذاری حرارتی می‌پردازد. منحنی آبی‌رنگ در شکل ۵ متناظر با ورق دارای معماری پیش فرض و منحنی قرمز مربوط به پانل با معماری موادی ۱ و ۲ از جدول ۱ به شکل [2/1/2/1/2] می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، با گذشت زمان و عبور شار حرارتی از سطح فوقانی به سمت سطح تحتانی، دمای سطح میانی افزایش و به دمای سطح بالایی (۷۰۰) کلوین نزدیک‌تر می‌گردد. مقایسه منحنی‌های مربوط به خیز دو پانل نشان می‌دهد که سفتی خمشی پانل دارای معماری پیش فرض بسیار بیشتر است. علت این امر آن است که نوع ماده یک که مدول الاستیسیته آن بالاتر است، در معماری پیش فرض فاصله بیشتری تا سطح میانی داشته و لذا صلبیت خمشی بالاتری ایجاد می‌نماید.



شکل ۵: تأثیر ترتیب لایه چینی بر تحول زمانی ورق کامپوزیتی تحت شرایط مرزی حرارتی نوع یک

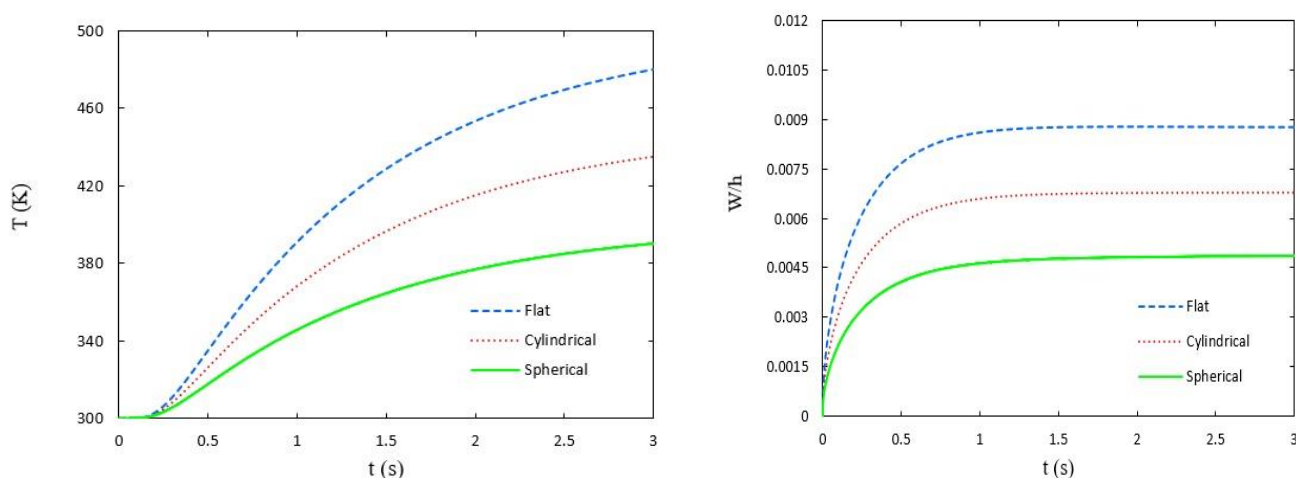
شکل ۶ اثر سه نوع شرط مرزی حرارتی مختلف را بر تحول زمانی دما و خیز ورق کامپوزیتی تخت نشان می‌دهد. در نوع اول شرایط مرزی حرارتی، دمای سطح پایینی دمای مرجع و دمای سطح بالایی برابر ۷۰۰ درجه کلوین منظور شده است. در شرط مرزی حرارتی نوع دوم، سطح پایینی عایق بوده و سطح بالایی دارای دمای ۷۰۰ درجه کلوین است. در شرط مرزی حرارتی نوع سوم، سطح پایینی عایق و سطح بالایی در معرض شار حرارتی ۱۰۰۰۰ وات بر مترمربع قرار دارد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، بیشترین افزایش دما در حالت دارای شرط مرزی حرارتی نوع دوم صورت می‌پذیرد. به علاوه، مقایسه منحنی‌های مربوط به خیز نشان می‌دهد با گذشت زمان و کاهش گرادیان دما در شرط مرزی نوع دوم نسبت زمان‌های آغازین، تغییر شکل ورق به دلیل کاهش منته‌جه‌های حرارتی کاهش می‌یابد.



شکل ۶: تحول زمانی دما و خیز ورق کامپوزیتی تخت تحت اثر شرایط مرزی حرارتی مختلف

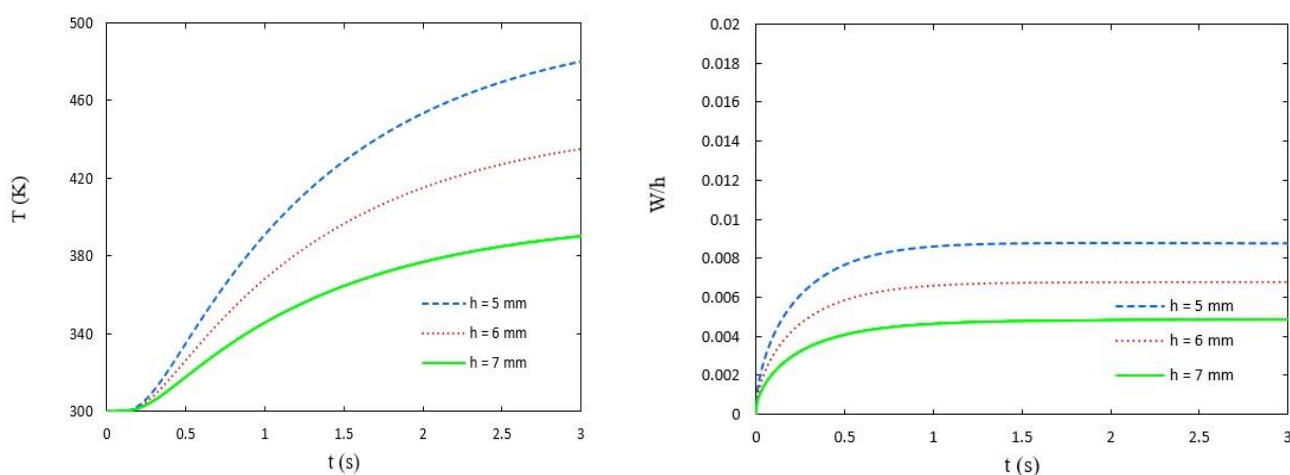
اثر انحنا بر پاسخ زمانی گرمایش سریع پوسته کامپوزیتی در شکل ۷ نمایش داده شده است. در این شکل، سه پوسته تخت، استوانه‌ای با شعاع انحنای ۰/۱ متر و پانل دو انحنایی کروی با شعاع انحنای ۰/۱ در نظر گرفته شده است. شرایط مرزی حرارتی از نوع اول

در نظر گرفته شده است. ملاحظه می‌شود که اصولاً انحنا باعث افزایش سفتی بوده و خیز در حالت تخت بیشتر است. همچنین نرخ زمانی افزایش دما در صفحه میانی ورق تخت بیشتر می‌باشد.



شکل ۷: اثر انحنا بر تحول زمانی دما و خیز ورق کامپوزیتی تحت شرط مرزی حرارتی نوع یک

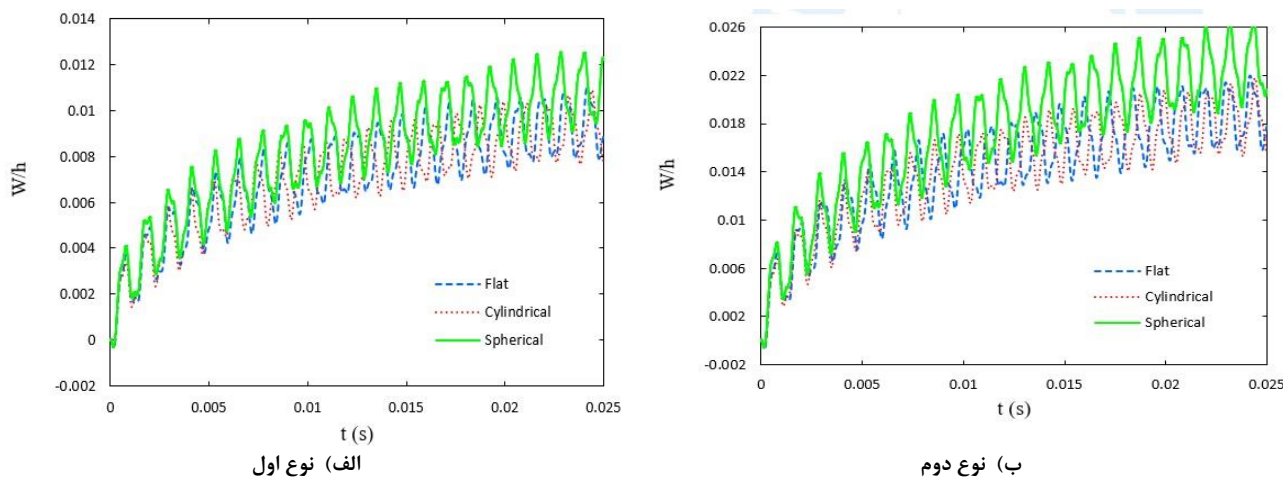
شکل ۸ به بررسی اثر ضخامت بر پاسخ زمانی پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی دو انحنایی تحت بار حرارتی از نوع اول اختصاص دارد. سطح پایین در دمای مرجع قرار داشته و سطح بالایی دارای دمای ۷۰۰ درجه کلوین است. منحنی‌های نشان داده شده در این شکل مربوط به سه پوسته کامپوزیتی با ضخامت ۵، ۶ و ۷ میلی‌متری است. شعاع‌های انحنای پوسته کروی مساوی و برابر با ۰/۱ است. همان‌طور که مشاهده می‌گردد، با افزایش ضخامت پوسته، مقاومت رسانایی آن بالاتر رفته و بنابراین به علت گرادیان دمای پایین‌تر در ضخامت پوسته، خیز آن نیز کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر در یک انرژی ثابت حرارتی، در سه پوسته با ضخامت‌های مختلف، دمای دینامیکی پوسته ضخیم‌تر را کمتر بالا می‌برد و همچنین به علت سفتی بالاتر پوسته ضخیم‌تر، کرنش‌های مکانیکی کمتری تولید می‌کند و خیز دینامیکی پوسته نیز کمتر خواهد بود.



شکل ۸: اثر ضخامت بر تحول زمانی دما و خیز پوسته کروی کامپوزیتی

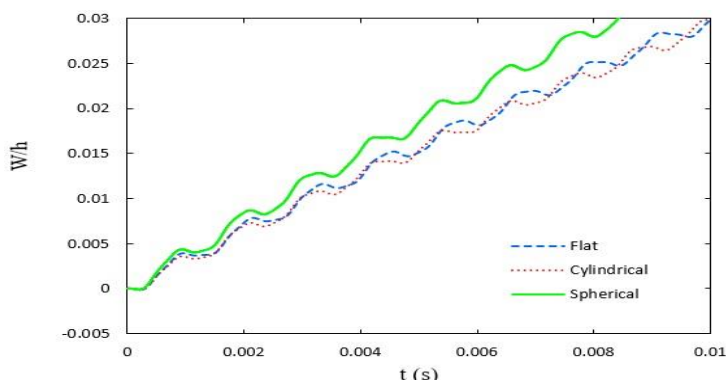
معمولاً ارتعاشات اجباری حاصل از بارگذاری حرارتی سریع پوسته‌های ضخیم ناچیز است. بنابراین برای بررسی ارتعاشات اجباری حاصل از بارگذاری حرارتی مناسب است پوسته نازک انتخاب گردد. شکل ۹ الف نتایج ارتعاشات اجباری پوسته تحت شرط مرزی حرارتی نوع اول را نمایش می‌دهد. سه نوع پوسته تخت، استوانه‌ای و کروی در نظر گرفته شده است. دمای سطح فوقانی پوسته‌ها برابر ۴۰۰ کلوین

انتخاب شده است. ضخامت پوسته‌ها برابر ۲ میلی‌متر و شعاع انحنای پوسته‌های استوانه‌ای و کروی ۰/۱ در نظر گرفته شده است. ارتعاشات اجباری حاصل از بارگذاری حرارتی برای دو شرط مرزی دیگر به ترتیب در شکل ۹ ب و شکل ۹ ج نشان داده شده است. شعاع انحنای پوسته‌های استوانه‌ای و کروی در شرط مرزی حرارتی نوع دوم و سوم برابر ۰/۲ متر است. در شکل ۹ ب سطح پایینی عایق و دمای سطح فوقانی پوسته ۴۰۰ درجه کلون است.



شکل ۹: ارتعاشات اجباری حاصل از بارگذاری حرارتی پوسته کامپوزیتی تحت بار حرارتی

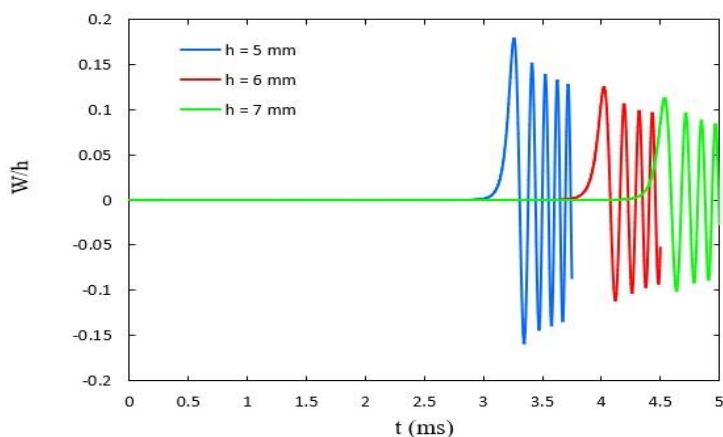
در شکل ۹ ج نیز سطح پایینی عایق و سطح بالایی تحت شار حرارتی ثابت ۱۰ کیلووات بر مترمربع قرار دارد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، لازم به ذکر است که در شرایط مرزی اساسی دمای رویه‌ای بالایی و پایینی معین و ثابت نگه داشته می‌شود و یک گرادیان دمایی بین دو سطح در جهت ضخامت برقرار می‌شود، در حالی که در شرایط مرزی طبیعی یکی یا هر دو سطح دارای شرط شار حرارتی یا ایزولاسیون حرارتی است. نتایج شکل ۹ در حالت‌های تخت و استوانه‌ای و کروی مربوط به حالت فقط شرط نوع سوم است که سطح بالایی دارای شار حرارتی معین و سطح پایینی دارای ایزولاسیون حرارتی است. با توجه به نتایج ملاحظه می‌شود که دامنه ارتعاشات با زمان در حالت کروی کمی بزرگ‌تر شده است. این امر به دلیل سهم‌گیری بیشتر انرژی حرارتی در حالت واحد در پوسته کروی است. به علاوه، با تنظیم پارامتر انحنای پوسته می‌توان رفتار دینامیکی آن را کنترل نمود.



شکل ۹ ج: ارتعاشات اجباری حاصل از بارگذاری حرارتی پوسته کامپوزیتی تحت بار حرارتی نوع سوم

۳-۳- کمانش دینامیکی حاصل از بارگذاری حرارتی ورق اطراف گیردار

ابتدا لازم است توجه شود که ورق‌های تخت تحت بار حرارتی و شرط مرزی گیردار با آغاز بارگذاری حرارتی دچار تغییر شکل نمی‌شوند. علت این امر آن است که به واسطه حرارت، گشتاورهای خمشی برانگیخته شده و تکیه‌گاه ورق قادر به تحمل چنین گشتاورهایی هستند. این امر ایجاب می‌کند علی‌رغم بار حرارتی پانل همچنان در حالت بدون خیز (مسطح) باقی بماند. با سپری شدن زمان و نفوذ شار حرارتی درون پانل و ایجاد میدان گرادیان دما در آن، گشتاورهای برانگیخته شده توسط حرارت بزرگ‌تر شده و امکان ارضای معادلات دینامیکی حاکم بر ورق در مسیری دیگر فراهم می‌گردد. در این صورت دو مسیر حرکت در دسترس ورق است: مسیر اول باقی ماندن به صورت مسطح و مسیر دوم آغاز به ارتعاشات عرضی نمودن است. چنین نقطه‌ای نشان‌دهنده ناپایداری دینامیکی برای ورق است و کمانش دینامیکی خوانده می‌شود. به دلیل آن که این ناپایداری توسط بارحرارتی دینامیکی پدیدار شده است، ناپایداری مذکور را کمانش دینامیکی حرارتی می‌نامند. ذکر این نکته ضروری است که شرایط لازم و کافی برای بروز کمانش دینامیکی حرارتی خالص در اینجا به صورت عاری بودن پانل از هرگونه بارگذاری عرضی بیان می‌شود. شکل ۱۰ کمانش دینامیکی حرارتی ورق کامپوزیتی را تحت بار حرارتی از نوع اول نمایش می‌دهد.



شکل ۱۰: کمانش دینامیکی حرارتی پانل کامپوزیتی تحت بار حرارتی نوع اول برای ضخامت‌های مختلف

سطح پایینی در دمای ۳۰۰ درجه کلوین و سطح فوقانی در دمای ۷۰۰ درجه کلوین قرار دارد. همان‌طور که در شکل ۱۰ مشاهده می‌شود، با کاهش ضخامت پانل مدت‌زمان سپری شده تا آستانه کمانش دینامیکی کاهش می‌یابد. به عنوان مثال ورق با ضخامت ۵ میلی‌متر حدوداً بعد از ۳ میلی‌ثانیه کمانش دینامیکی‌اش شروع می‌شود.

۴- نتیجه‌گیری

پژوهش حاضر به تحلیل غیرخطی پوسته دو انحنایی تحت بارگذاری‌های مختلف تحت اثر دما پرداخته است. معادله‌های حاکم بر حرکت و شرایط مرزی پوسته دو انحنایی تحت بارگذاری حرارتی بر اساس نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده است. به منظور حل معادلات با استفاده از روش ریتز، معادلات حاکم در حوزه مکان گسسته‌سازی شده است. نتایج حاصل در پژوهش حاضر را می‌توان به صورت زیر خلاصه نمود.

۱. برای پوسته‌های نسبتاً ضخیم، بارگذاری حرارتی منجر به ارتعاشات اجباری از حرارت با دامنه بسیار ناچیز شده و پاسخ دینامیکی آن با صرف‌نظر از اینرسی به صورت شبه استاتیکی حاصل می‌شود. از سوی دیگر، در پانل‌های با ضخامت کم بارگذاری حرارتی به تحقق ارتعاشات اجباری از حرارت می‌انجامد.

۲. دامنه ارتعاشات اجباری از حرارت برای بارگذاری حرارتی با شرط مرزی اساسی (دو رویه بالا و پایین پوسته با دمای ثابت) بسیار بزرگتر از بارگذاری حرارتی با شرط مرزی طبیعی است.
۳. شرایط لازم و کافی برای بروز پدیده کماتش دینامیکی به صورت عدم وجود بارگذاری عرضی و اعمال شرط مرزی گیردار است. همچنین وارد نمودن اثرات غیرخطی برای یافتن پاسخ کماتش یافته ضروری است.
۴. با استفاده از معماری پوسته و تنظیم سفتی (با تغییر شعاع انحنا و ضخامت آن) می توان از بروز کماتش دینامیکی (جهت بارگذاری ورودی مشخص حرارتی) جلوگیری و آن را به تعویق انداخت. توجه شود که شرایط بارگذاری دمایی مشخص است و برای این شرایط پوسته از نظر تنظیم سفتی (با تغییرات شعاع و انحنا و ضخامت) معماری می شود. شکل ۱۰ مؤید این موضوع است.
۵. اعمال شرط مرزی گیردار سبب کاهش دامنه ارتعاشات اجباری حاصل از حرارت برای پوسته های استوانه ای و دو انحنایی می شود.

مراجع

- [1] Kabir, H., and Chaudhuri, R., (1991), "Free vibration of shear-flexible anti-symmetric angle-ply doubly curved panels", *International Journal of Solids and Structures*, 28, pp.17-32.
- [2] Chaudhuri, R., and Kamal, R., (1988), "Exact solution of shear-flexible doubly curved anti-symmetric angle-ply shells", *International journal of engineering science*, 26, pp.587-604.
- [3] Amabili, M., (2005), "Non-linear vibrations of doubly curved shallow shells", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 40, pp.683-710.
- [4] Azarafza, R., Malekzadeh Fard, K., Golaghapour Kami, M., and Pourmoayed, A. R., (2021), "Dynamic analysis of cylindrical sandwich shell with orthogonal stiffeners using high-order theory", *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 53(4), pp. 2473-2492.
- [5] Ansaryan, Y., and Jafari, A., (2017), "Investigation of free and forced vibration of a composite circular cylindrical shell with internal fluid", *Journal of Solid and Fluid Mechanics*, 7(2), pp.93-100.
- [6] Duc, N.D., Quan, T.Q. and Luat, V.D., (2015), "Nonlinear dynamic analysis and vibration of shear deformable piezoelectric FGM double curved shallow shells under damping-thermo-electro-mechanical loads", *Composite Structures*, 125, pp.29-40.
- [7] Nguyen, D. D., Tran, Q. Q., and Nguyen, D. K. (2017), "New approach to investigate nonlinear dynamic response and vibration of imperfect functionally graded carbon nanotube reinforced composite double curved shallow shells subjected to blast load and temperature", *Aerospace science and technology*, 71, pp. 360-372.
- [8] Karimiasl, M., Ebrahimi, F., and Akgöz, B. (2019), "Buckling and post-buckling responses of smart doubly curved composite shallow shells embedded in SMA fiber under hygro-thermal loading", *Composite Structures*, 223, 110988.
- [9] Malekzadeh Fard, K., Gholami, M., Pourmoayed, A.R., (2019), "Free Vibration and Buckling Analysis of Cylindrical Sandwich Panel with Flexible Core and Magneto Rheological Fluid Layers", *Journal of Aerospace Mechanic*, 14(4), pp. 1-19.
- [10] Kumari, E. (2022), "Dynamic response of composite panels under hermos-mechanical loading", *Journal of Mechanical Science and Technology*, 36(8), pp. 3781-3790.
- [11] Nasraleh Barati, A.H., Jafari, A., Etamadi Haghighi, S., (2021), "Nonlinear forced vibrations of a hollow circular plate Made of memory alloy", *Journal of Mechanical Engineering*, 23(4), pp. 178-204.

- [12] Shahnazi, M. R., Ebrahimi-Mamaghani, A., (2023), "Stability and dynamic analysis of Rayleigh functionally graded porous beams with longitudinal motion in hygro-thermo-magnetic environments", *Journal of Solid and Fluid Mechanics (JSFM)*, 13, (2), pp. 1-13.
- [13] Ramezani, M., Rezaiee-Pajand, M., and Tornabene, F. (2022), "Nonlinear dynamic analysis of FG/SMA/FG sandwich cylindrical shells using HSDT and semi ANS functions", *Thin-Walled Structures*, 171, 108702.
- [14] Salehi, S., Rahmani, O., and Hoseini, S.A., (2020), "Free and Forced Vibration Analysis of Kelvin-Voigt Viscoelastic Nanoplate by Using Modified Couple Stress Theory", *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 52(1), pp.173-186.
- [15] Pourmoayed, A. R., Malekzadeh Fard, K., Ranjbar, M. A., (2020), "Buckling and Post-buckling Analysis of a Sandwich Panel with Flexible Core Reinforced with Memory Alloy Wires (SMA)", *Journal of Aerospace Mechanics*, 17(1), pp. 83-97.
- [16] Pourmoayed, A. R., Malekzadeh Fard, K., Ranjbar, M. A., (2020), "Buckling and Post-buckling Analysis of a Sandwich Panel with Flexible Core Reinforced with Memory Alloy Wires (SMA)", *Journal of Aerospace Mechanics*, 17(1), pp. 83-97.
- [17] Golmakani, M.E. and Zeighami, V., (2016), "Buckling analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using incremental loading and dynamic relaxation methods", *Computational Methods in Engineering*, 35(1), pp.43-63.
- [18] Elhami, M. R., Zainli, M., (2011), "Dynamic stability analysis of a free double-ended beam under unsteady follower force", *Journal of Aerospace Mechanics*, 7(1), 163.
- [19] Chan, D. Q., Anh, V. T. T., and Duc, N. D. (2019), "Vibration and nonlinear dynamic response of eccentrically stiffened functionally graded composite truncated conical shells surrounded by an elastic medium in thermal environments", *Acta Mechanica*, 230, pp. 157-178.
- [20] Nguyen, D. D., Kim, S. E., Vu, T. A. T., and Vu, A. M., (2021), "Vibration and nonlinear dynamic analysis of variable thickness sandwich laminated composite panel in thermal environment", *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 23(5), pp. 1541-1570.
- [21] Salari, E., Ashoori, A. R., Vanini, S. S., & Akbarzadeh, A. H. (2022), "Nonlinear dynamic buckling and vibration of thermally post-buckled temperature-dependent FG porous nanobeams based on the nonlocal theory", *Physica Scripta*, 97(8), 085216.
- [22] Nouri, A., Astaraki, S., (2019), "Vibration and buckling analysis of longitudinally stiffened cylindrical shells under the axial static loading", *Journal of Aeronautical Engineering*, 21(1), pp. 57-69.
- [23] Alipour, S.M., Kiani, Y., and Eslami, M.R., (2016), "Rapid heating of FGM rectangular plates", *Acta Mechanica*, 227, pp. 421-436.