

## Effect of Winkler Elastic Foundation on Free Vibration of Tapered Beam Based on Non-Local Elasticity Theory

M. Soltani<sup>1\*</sup>, M. Mohammadi<sup>2</sup>, B. Asgarian<sup>3</sup>

1- Assistant Professor, Department of civil engineering, University of Kashan, Kashan, Iran

3- MSc student in structural engineering, Department of civil engineering, University of Kashan, Kashan, Iran

2- Professor, Faculty of civil engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran

### ABSTRACT

*In this paper, the influence of Winkler type elastic foundation on the free vibration behavior of non-local Euler-Bernoulli beam with varying cross-section is semi-analytically investigated. For this purpose, the governing equation of motion is derived based on nonlocal elasticity Eringen's model and Hamilton's principle. The power series approximation is applied to solve the fourth order differential equation, since in the presence of variable cross-section, stiffness quantities are not constant. Based on this semi-analytical methodology, displacement component and cross-section properties should be expanded in terms of power series of a known degree. The natural frequencies of non-local beam with variable cross-section are then derived by imposing the boundary conditions and solving the eigenvalue problem. The results of this research are compared with the obtained results by other researchers and there is a good agreement. At the end, the effects of different parameters such as: end conditions, nonlocal Eringen's parameter, tapering ratio and Winkler spring constant on non-dimensional natural frequency of nano-beam are studied in detail. The outcomes of this study indicate that the increase of nonlocal parameter and non-uniformity ratio causes to decrease the dimensionless natural frequency. However, with increasing the Winkler elastic constant, the non-local frequencies increase. Furthermore, it is shown that the effect of Winkler elastic foundation is predominate than the tapering ratio and Eringen's parameter on the natural frequency of nano-beams.*

### ARTICLE INFO

**Receive Date:** 16 March 2019

**Revise Date:** 27 October 2019

**Accept Date:** 17 December 2019

### Keywords:

Natural frequency  
Non-local elasticity theory  
Tapered beam  
Elastic foundation  
Power series method.

All rights reserved to Iranian Society of Structural Engineering.

doi: 10.22065/JSCE.2019.176357.1807

\*Corresponding author: M. Soltani  
Email address: msoltani@kashanu.ac.ir

## تأثیر بستر الاستیک وینکلر بر ارتعاش آزاد تیر ماهیچه‌ای براساس تئوری الاستیسیته غیر محلی

معصومه سلطانی<sup>۱\*</sup>، معصومه محمدی<sup>۲</sup>، بهروز عسگریان<sup>۳</sup>

۱- استادیار گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی سازه، گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

۳- استاد دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

### چکیده

در مقاله پیش‌رو، ارتعاش آزاد تیر با مقطع متغیر متکی بر بستر الاستیک وینکلر و با در نظر گرفتن تئوری الاستیسیته غیر محلی مورد مطالعه قرار گرفته است. روند کار به این صورت است که در مرحله نخست، معادله حرکت براساس فرضیه تغییر شکل‌های کوچک و مدل الاستیسیته غیر محلی ارینگن به کمک اصل همپلتون به دست می‌آید. در ادامه، از روش نیمه تحلیلی بسط سری‌های توانی برای حل معادله دیفرانسیل ارتعاش آزاد عضو غیرمنشوری متکی بر بستر الاستیک استفاده شده است و با جایگذاری شرایط مرزی (دو شرط برای هر انتهای عضو) و حل مسئله مقادیر ویژه، مقدار فرکانس طبیعی ارتعاش و همچنین فرم تغییر شکل عضو مدنظر تحت آنالیز ارتعاش آزاد نامیرا تعیین می‌گردد. در انتها نتایج حاصل از این تحقیق در خصوص تیر همگن با مقطع غیریکنواخت با نتایج دیگر تحقیقات جهت بررسی صحت و دقت محاسبات مقایسه گردیده و تأثیر پارامترهای مختلفی همچون پارامتر ارینگن، ضریب باریک شونده‌گی مقطع و بستر الاستیک وینکلر روی ارتعاش آزاد بدون بعد تیر با شرایط مرزی مختلف به تفصیل بررسی شده است. نتایج بدست آمده از این پژوهش نشان می‌دهند که با افزایش پارامتر ارینگن و باریک شدگی نیم‌رخ عضو مقدار فرکانس طبیعی بدون بعد کاهش می‌یابد، در حالی که با افزایش ثابت فنری نوع وینکلر در بازه استفاده شده در این مقاله فرکانس ارتعاشی به شدت افزایش می‌یابد.

کلمات کلیدی: فرکانس طبیعی، نظریه الاستیسیته غیر محلی، تیر ماهیچه‌ای، بستر وینکلر، روش سری‌های توانی

شناسه دیجیتال:		سابقه مقاله:				
doi:	10.22065/JSCE.2019.176357.1807	چاپ	انتشار آنلاین	پذیرش	بازنگری	دریافت
	https://dx.doi.org/10.22065/jsce.2019.176357.1807	۱۴۰۰/۰۵/۳۰	۱۳۹۸/۰۹/۲۶	۱۳۹۸/۰۹/۲۶	۱۳۹۸/۰۸/۰۵	۱۳۹۷/۱۲/۲۵
معصومه سلطانی msoltani@kashanu.ac.ir					*نویسنده مسئول: پست الکترونیکی:	

## ۱- مقدمه

تحقیق و بررسی درباره فهم طبیعت فیزیکی پدیده ارتعاش همواره اهمیت زیادی برای مهندسان و پژوهشگران داشته است. هنگامی که در یک سازه ارتعاش به وجود می آید ممکن است مشکلات بزرگی نظیر کاهش عملکرد، کارکرد نادرست، و یا شکست در آن ایجاد شود. از این رو بهبود شرایط ارتعاشی با اصلاح سازه توسط فرآیند کنترل ارتعاش امری مهم و اساسی می باشد، که خود این موضوع نیازمند بررسی عوامل تاثیر گذار بر فرکانس طبیعی سازه است. در این پژوهش برآن شدیم به بررسی فرکانس آزاد نانو تیر اویلر- برنولی با استفاده از "تئوری الاستیسیته غیرمحلّی" بپردازیم. این مفاهیم اولین بار توسط ارینگن<sup>۱</sup> [۱] ارائه داده شد. در تئوری غیرمحلّی به دلیل وجود نیروهای بین اتمی اصل پایستگی انرژی نه بصورت موضعی بلکه در کل جسم مورد بررسی قرار می گیرد. به بیان دیگر می توان گفت: طبق این تئوری تنش ایجاد شده در یک نقطه نه تنها به کرنش همان نقطه بلکه به کرنش تمام نقاط دامنه وابسته می باشد. به دلیل تازگی و گستردگی مباحث مربوط به تئوری غیرمحلّی، محققان زیادی به بررسی اثرات این پدیده پرداخته اند، از جمله:

سوداک<sup>۲</sup> [۲] به مطالعه کمانش نانو لوله ها پرداخت و پیش بینی کرد که با افزایش اثرات مقیاس کوچک، مقدار نیروی کمانش بحرانی کاهش می یابد. پیسانو و فوسچی<sup>۳</sup> [۳]، از مدل غیرمحلّی برای مطالعه کشش یک میله الاستیک استفاده کردند. وانگ<sup>۴</sup> و همکاران [۴] مساله ارتعاشات آزاد را بر اساس فرضیات حاکم بر تیر تیموشنکو و با استفاده از تئوری غیرمحلّی بررسی نمودند. آن ها با استفاده از اصل همپلتون معادلات حاکم را استخراج نمودند و به بررسی اثر تکیه گاه های مختلف پرداختند. ردی<sup>۵</sup> [۵] به بررسی کمانش، خمش و ارتعاش آزاد نانو تیرهای غیرمحلّی پرداخت. او از روش جابه جایی مجازی برای استخراج معادلات حرکت استفاده نمود و این معادلات را به صورت تحلیلی حل کرد. پرادهان و همکاران [۶] به بررسی رفتار تیر مدرج تابعی باریک شونده با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرمحلّی پرداختند. در پژوهشی دیگر، فادیکار و پرادهان<sup>۶</sup> [۷-۸] از روش المان محدود برای بررسی پایداری و فرکانس تیر غیرمحلّی استفاده کردند و رفتار نانو لوله ناهمگن را با روش مربعات دیفرانسیل و تئوری غیرمحلّی مورد بررسی قرار دادند. سیوالک و دمیر<sup>۷</sup> [۹]، خمش میکرو-لوله را با استفاده از مدل تیر اویلر-برنولی بررسی نمودند و اثر ابعاد کوچک را با به کار بردن تئوری الاستیسیته غیرمحلّی ارینگن در معادلات اعمال نمودند. بررسی رفتار پس از کمانش نانو تیر با در نظر گرفتن همزمان دو اثر کشش سطحی و اثرات غیرمحلّی توسط مایترا و بوز<sup>۸</sup> [۱۰] انجام شد. محمدی مهر و همکاران [۱۱] با استفاده از روش رایلی-ریتز به تحلیل تیر اویلر-برنولی غیرمحلّی متکی بر بستر الاستیک پاسترناک پرداختند و تاثیر حرارت، شرایط مرزی مختلف، سختی بستر الاستیک و پارامتر غیرمحلّی را مورد بررسی قرار دادند. بخشی خانیکی و همکاران [۱۲-۱۵] به آنالیز استاتیکی و دینامیکی نانو تیرهای غیرمنشوری ساخته شده از مواد مدرج تابعی بر اساس تئوری گرادیان کرنشی پرداختند. آن ها با استفاده از روش های عددی اثرات تغییر مقطع، جنس مصالح و مقیاس کوچک را بر روی فرکانس طبیعی و بار کمانش تیر اویلر-برنولی و تیموشنکو مورد بررسی قرار دادند. الطاهر و همکاران [۱۶] از روش المان محدود، برای تحلیل ارتعاشات تیر اویلر-برنولی استفاده کردند و تغییر شکل تیر را با استفاده از تئوری غیرمحلّی ارینگن بدست آوردند. حسینی هاشمی و بخشی خانیکی [۱۷-۱۹] به تحلیل ارتعاشات آزاد عرضی تیرهای غیرمنشوری با استفاده از تئوری غیرمحلّی پرداختند و اثرات شرایط مرزی مختلف و مدهای ارتعاشی را با استفاده از روش مربعات دیفرانسیل مورد مطالعه قرار دادند. ترابی و دستجردی [۲۰]، به تحلیل ارتعاشات آزاد تیر تیموشنکو و نانو تیرهای ترکخورده با استفاده از مدل الاستیسیته غیرمحلّی پرداخته و نتیجه گیری کردند که شکل موده های تیر مورد نظرشان تحت تاثیر پارامتر اثر مقیاس کوچک طول ماده قرار نمی گیرد. اخیراً، حسنی و محمودآبادی [۲۱] ضریب الاستیک نانوکامپوزیت های تقویت شده با نانولوله های کربنی در حالت اتصال کامل دو فاز را به کمک مدلسازی در نرم افزار اجزاء محدود Ansys و همچنین با استفاده از روش تحلیلی بر مبنای حل معادله الاستیسیته حاکم تعیین نمودند.

<sup>1</sup> Eringen

<sup>2</sup> Sudak

<sup>3</sup> Pisano and Fuschi

<sup>4</sup> Wang

<sup>5</sup> Reddy

<sup>6</sup> Phadikar and Pradhan

<sup>7</sup> Civalek and Demir

<sup>8</sup> Maitra and Bose

مدلسازی بستر الاستیک در تحلیل سازه‌هایی مانند پی ساختمان‌ها، ریل راه آهن، جاده‌ها، خطوط لوله فراساحل، مخازن، باند فرودگاه، اسکله‌ها مورد نیاز است. مدل وینکلر که ساده‌ترین روش برای شبیه‌سازی اندرکنش خاک و فونداسیون است، توسط وینکلر در سال ۱۸۶۷ ارائه شده است. در این مدل، رابطه بین جابه‌جایی و فشار قائم پی، توسط فنرهای ارتجاعی خطی مجزا و مستقل با فاصله‌های کم مدل شده و به دلیل این که فنرها فاقد برهمکنش نسبت به یکدیگر هستند، فقط در محل اعمال بار تغییر شکل (خیز) ایجاد می‌شود. لازم به ذکر است که تغییر شکل‌های برشی در این تئوری در نظر گرفته نمی‌شوند [۲۲]. در زمینه تحلیل پایداری و ارتعاش آزاد تیر محلی و متکی بر بستر ارتجاعی وینکلر مطالعات متعددی با استفاده از مدلسازی، روش‌های عددی و یا تحلیلی صورت گرفته است [۲۳-۲۹]. محققان دیگری به مطالعه ارتعاش آزاد تیر با مقطع متغیر ساخته شده از مواد مدرج تابعی با استفاده از تئوری غیرمحلّی پرداختند [۳۰-۳۲].

برای تحلیل دقیق تر پایداری و فرکانس ارتعاشی سازه بر اساس رفتار اندرکنش بین مولکولی مواد از تئوری الاستیسته غیرمحلّی استفاده می‌شود. زیرا در تئوری کلاسیک که مبتنی بر قانون هوک می‌باشد فرض بر این است که مولکول‌های سازنده اعضا هیچ اندرکنشی بر روی هم ندارند. ولی در روش غیرمحلّی رفتار دقیق تر اعضای کوچک مقیاس مورد بررسی قرار می‌گیرد. در واقع می‌توان گفت تئوری‌های الاستیسته غیرمحلّی فرم اصلاح شده تئوری‌های الاستیسته کلاسیک می‌باشند. از تئوری الاستیسته غیرمحلّی برای تحلیل رفتار نانو ساختارها نیز استفاده می‌شود، این تیرها در زمینه‌های مختلف از جمله ساخت سامانه‌های الکترومکانیکال‌ها با وزن کم و حساسیت بالا برای استفاده در پزشکی، رایانه، بیوحسگرها و توسعه ابزارهای نانویی همانند گیره‌ها و سویچ‌ها به کار می‌رود. از این رو در مقاله حاضر ارتعاشات آزاد تیر اویلر-برنولی غیرمحلّی بر بستر الاستیک مورد بررسی قرار می‌گیرد. تیر مذکور به صورت همگن در نظر گرفته شده و از اثرات تغییر شکل برشی چشم پوشی شده است. بدین منظور و در مرحله نخست، معادله حاکم بر حرکت و شرایط مرزی براساس فرضیه تغییر شکل‌های کوچک و مدل الاستیسته غیرمحلّی اربینگن با استفاده از اصل همپلتون و به کمک روش انرژی به دست می‌آید. بعلاوه آنکه حل معادله دیفرانسیل مرتبه چهار استخراج شده به کمک روش‌های متداول امکان پذیر نمی‌باشد، از روش نیمه تحلیلی بسط سری‌های توانی به منظور محاسبه فرکانس‌های ارتعاشی تیر با شرایط مرزی دوسر مفصل، دوسر گیردار و یکسر گیردار-یکسر مفصل استفاده می‌گردد. مطابق با روش مذکور، تمامی ضرایب موجود در معادله حاکم بر ارتعاش آزاد نامیرا شامل: خصوصیات هندسی نیم‌رخ تیر غیرمنشوری، سختی بستر وینکلر و توابع توصیف کننده خواص مصالح سازنده عضو شامل: ضریب ارتجاعی و دانسیته، بایستی به صورت یک چند جمله‌ای متناهی در نظر گرفته شوند و در نهایت فرم تغییر شکل تیر با مقطع متغیر برحسب سری توانی به دست خواهد آمد. در ادامه، با جایگذاری شرایط مرزی (دو شرط برای هر انتهای عضو) و حل مسئله مقادیر ویژه، مقدار فرکانس ارتعاشی تیر غیرمحلّی تعیین می‌گردد. در انتهای مقاله، چند نمونه مثال با استفاده از روش ارائه شده حل و در هر نمونه تاثیر عوامل مختلف شامل سختی بستر، ضریب باریک شونده، مقطع تیر، شرایط انتهایی و پارامتر غیرمحلّی روی فرکانس طبیعی تیر غیرمحلّی با مقطع متغیر مورد بررسی قرار می‌گیرد.

## ۲- الگو سازی مسأله

در این پژوهش، یک تیر ماهیچه‌ای با سطح مقطع متقارن توپر به طول  $L$  متکی بر بستر الاستیک وینکلر مطابق شکل ۱ مدنظر است. طول عضو در مقایسه با ابعاد سطح مقطع بسیار بزرگ تر است و تغییر شکل‌ها کوچک هستند. همچنین مطابق فرضیات حاکم بر تئوری تیر اویلر از تغییر شکل‌های برشی صرف نظر می‌شود. بنابراین در حالتی که دستگاه مختصات بر روی مرکز سطح مقطع قرار گرفته باشد، مولفه‌های جابه‌جایی محوری و عرضی به ترتیب توسط روابط زیر تعریف می‌شوند:

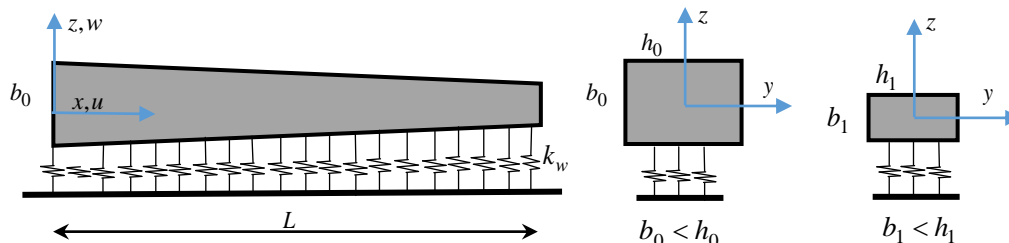
$$u(x, z, t) = -z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \quad (1)$$

$$w(x, z, t) = w(x, t) \quad (2)$$

در روابطه فوق، فرض بر این است که محورهای  $x$  و  $z$  به ترتیب در جهت طول و ضخامت تیر هستند و  $z$  از روی تار خنثی اندازه گیری می‌شود. مولفه‌های  $u$  و  $w$  نشان دهنده تغییر مکان‌های محوری و عمودی (در جهت  $x$  و  $z$ ) هستند. کرنش طولی بر حسب جابه‌جایی عرضی در روابط (۳-۴) ارائه شده است.

$$\varepsilon_{xx} = -z \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \quad (3)$$

$$\varepsilon_{yy}(x,y) = 0, \quad \gamma_{xy}(x,y) = 0 \quad (4)$$



شکل ۱: (الف) تیر باریک شونده متکی بر بستر الاستیک وینکلر، (ب) سیستم مختصات و مولفه‌های تغییر مکان

### ۳- تئوری الاستیسیته غیر محلی

جهت تحقیق و بررسی رفتار مکانیکی مواد در مقیاس کوچک و تحلیل نانو تیرها از تئوری غیر محلی استفاده می‌شود. تفاوت اصلی بین تئوری کلاسیک و تئوری غیر محلی الاستیسیته در تعریف تنش است. بیشتر تئوری‌های کلاسیک مکانیک محیط‌های پیوسته، بر اساس روابط ساختاری هایپرا الاستیک استوار هستند، که در آن فرض می‌شود تنش هر نقطه، به صورت تابعی از کرنش‌های همان نقطه است. اما در تئوری غیر محلی با دخالت نیروهای بین مولکولی و اثرات رفتار سطح ماده بر توده ماده، برای بدست آوردن تنش در یک نقطه، باید حالت کرنش در تمام نقاط دامنه معلوم باشد. این مدل را می‌توان به صورت زیر تعریف نمود:

$$(1 - \kappa^2 \nabla^2) \sigma = C(x) : \varepsilon(x) \quad (5)$$

در رابطه (۵)،  $C(x)$  و  $\varepsilon(x)$  به ترتیب مدول الاستیسیته و کرنش طولی عضو می‌باشند. همچنین،  $\kappa = (e_0 a)$  پارامتر غیر محلی ارینگن نام دارد.  $a$  طول مشخصه داخلی سازه و  $e_0$  ثابت ماده. برای تیر اویلر-برنولی، مطابق روابط (۳) و (۵) میدان تنش بصورت رابطه (۶) بیان می‌شود:

$$\sigma_{xx} - \kappa^2 \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = -Ez \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \quad (6)$$

که  $\sigma_{xx}$  بیانگر تنش عمودی وارده بر سطح مقطع، ناشی از نیروی محوری فشاری و یا لنگر خمشی است. پارامتر  $E$  نیز معرف ضریب ارتجاعی یانگ است. لازم به ذکر است که در این مطالعه، مصالح مصرفی همگن و ایزوتروپیک فرض شده‌اند.

### ۴- روش انرژی و معادلات حاکم بر مساله

معادله دیفرانسیل حرکت برای یک تیر با مقطع متغیر را می‌توان به کمک اصل حداقل انرژی و حساب تغییرات به صورت ذیل به دست آورد:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \Pi dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - (U + V)) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U - \delta V) dt = 0 \quad (7)$$

در رابطه فوق  $\Pi$  نشان دهنده انرژی پتانسیل کل سیستم الاستیک است. این انرژی برابر مجموع انرژی کرنشی خطی الاستیک  $U$ ، کار نیروهای خارجی  $V$  و انرژی جنبشی تحت بارگذاری هارمونیک  $T$  است. معادلات حاکم بر تغییرات مرتبه اول انرژی جنبشی، کرنشی و کار نیروهای خارجی را می‌توان به شکل روابط (۸-۱۰) نوشت:

$$\delta T = \int_0^L -\rho A \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right) dx \quad (8)$$

$$\delta U = \int_0^L \int_A (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx}) dA dx \quad (9)$$

$$\delta V = \int_0^L (k_w w(x,t) \delta w(x,t)) dx \quad (10)$$

که در آن  $\rho$  و  $A$  به ترتیب چگالی جرمی مصالح و مساحت نیم‌رخ تیر هستند و  $k_w$  سختی بستر الاستیک وینکلر است. با جایگذاری رابطه (۳) در عبارت مربوط به تغییرات انرژی کرنشی، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_0^L \int_A (\sigma_{xx} \delta (-z \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2})) dA dx = - \int_0^L \int_A (z \sigma_{xx} \delta (\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2})) dA dx \\ &= - \int_0^L (\delta (\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2})) \int_A z \sigma_{xx} dA dx \end{aligned} \quad (11)$$

گستاور خمشی داخلی ناشی از تنش نرمال ایجاد شده بر سطح مقطع عضو به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$M = \int_A z \sigma_{xx} dA \quad (12)$$

شکل نهایی عبارت تغییرات مرتبه اول انرژی کرنشی الاستیک با جایگذاری رابطه فوق در عبارت (۱۱) به دست می‌آید.

$$\delta U = \int_0^L -M \delta (\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}) dx \quad (13)$$

با استفاده از اصل همپلتون و جایگذاری عبارات (۸)، (۱۰) و (۱۳) در رابطه (۷) خواهیم داشت:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \Pi dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left( \rho A \left( \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right) \delta \left( \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \right) + M \delta \left( \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) - k_w w(x,t) \delta w(x,t) \right) dx dt = 0 \quad (14)$$

در ادامه، معادله حاکم بر تغییرات انرژی پتانسیل کل با کمک انتگرال گیری جزء به جزء به صورت زیر ساده می‌گردد:

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \int_0^L \left[ \left( \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} - k_w w(x,t) \right) \delta w(x,t) \right] dx \\ &+ \left( M \delta \left( \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right) - \left( \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} \right) \delta \left( \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right) \right) \Big|_0^L = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

در رابطه (۱۵) اولین جمله، شامل حاصلضرب معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش آزاد نانو تیر با مقطع متغیر در تغییرات کوچک تابع خیز است. جمله دوم معرف شرایط مرزی اساسی و طبیعی است. بنابراین با توجه به جمله اول عبارت فوق معادله حرکت به صورت رابطه (۱۶) بیان می‌شود:

$$\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} = -\rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + k_w w(x,t) \quad (16)$$

با ضرب طرفین رابطه (۶) در  $z$  و انتگرال گیری بر روی سطح مقطع ( $A$ ) خواهیم داشت:

$$\int_A \sigma_{xx} z dA - \kappa^2 \int_A \frac{d^2 \sigma_{xx}}{dx^2} dA = - \int_A E z \left( z \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) dA \quad (17)$$

با توجه به تعریف ارائه شده برای لنگر خمشی داخلی، عبارت (۱۷) به صورت زیر ساده و بازنویسی می‌شود:

$$M(x,t) - \kappa^2 \frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (18)$$

$I$  ممان اینرسی نیم‌رخ عرضی تیر حول محور ضعیف است. با استفاده از روابط (۱۶) و (۱۸) معادله (۱۹) حاصل می‌گردد:

$$\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} - \kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( -\rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + k_w w(x,t) \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (19)$$

با ترکیب دو عبارت (۱۶) و (۱۹)، معادله حاکم بر رفتار دینامیکی تیر اویلر-برنولی غیرمحلّی متکی بر بستر الاستیک استخراج می‌گردد:

$$-\rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + k_w w(x,t) - \kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( -\rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + k_w w(x,t) \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (20)$$

در شرایط ارتعاش آزاد، با جداسازی دو متغیر زمان ( $t$ ) و مکان ( $x$ ) جابه‌جایی عرضی تیر ( $w(x,t)$ ) را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$w(x,t) = W(x) \times e^{i\omega t} \quad (21)$$

که در آن  $\omega$  فرکانس طبیعی ارتعاش است. با جایگذاری رابطه (۲۱) در عبارت (۲۰) در نهایت معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش آزاد تیر ماهیچه‌ای مستقر بر بستر وینکلر براساس تئوری غیرمحلّی ارینگن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 W}{dx^2} \right) - \kappa^2 \frac{d^2}{dx^2} \left( -\rho A \omega^2 W + k_w W \right) - \rho A \omega^2 W + k_w W = 0 \quad (22)$$

مطابق با رابطه (۱۵) و فرضیات حاکم بر تغییر شکل خمشی تیر اویلر-برنولی غیرمحلّی، شرایط مرزی برای هر دو انتهای اعضای تحلیل شده به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$\text{انتهای گیردار:} \quad \frac{dW}{dx} = 0 \quad W = 0 \quad (23)$$

$$\text{انتهای مفصلی:} \quad M = \kappa^2 (-\rho A \omega^2 W + k_w W) - EI \frac{d^2 W}{dx^2} = 0 \quad W = 0 \quad (24)$$

بعلت وجود ضرایب متغیر در معادله حرکت تیر اویلر-برنولی غیرمحلّی با مقطع متغیر، حل دقیق امکان پذیر نیست و بایستی از یک روش عددی و یا نیمه تحلیلی استفاده نمود که یکی از مناسب‌ترین و بهترین روش‌ها برای حل معادلات دیفرانسیل خطی مراتب بالا و با ضرایب متغیر روش بسط سری‌های توانی است. سری به صورت  $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$  که در آن  $a_0, a_1, \dots, a_n$  اعداد حقیقی هستند، سری توانی نامیده می‌شود. روش حل مبتنی بر این اندیشه است که جواب معادله به صورت یک سری توانی بر حسب متغیر  $x$  نوشته شود. محققین مختلفی به شیوه‌های متفاوتی از روش بسط سری‌های توانی به منظور تعیین بار کمانشی و فرکانس ارتعاشی تیر-ستون‌ها و اعضای جدار نازک استفاده نموده‌اند [۲۳، ۳۰، ۳۳-۳۷]. در ادامه، کاربرد این روش در تحلیل ارتعاش آزاد تیر ماهیچه‌ای غیرمحلّی مستقر بر بستر الاستیک ارائه می‌گردد.

## ۵- روش بسط سری‌های توانی

بر اساس این روش نیمه تحلیلی، کلیه ضرایب موجود در معادله دیفرانسیل بایستی به صورت یک چند جمله‌ای متناهی در نظر گرفته شوند

بنابراین، ضرایب معادله حرکت حاکم بر تیر ماهیچه‌ای غیرمحلّی متکی بر بستر الاستیک شامل لنگر دوم سطح  $I(x)$ ، مدول الاستیسیته  $E(x)$ ، مساحت نیم‌رخ  $A(x)$ ، جرم حجمی مصالح  $\rho(x)$  و سختی بستر وینکلر به فرم سری توانی زیر در نظر گرفته شده‌اند:

$$I(x) = \sum_{i=0}^{\infty} I_i x^i \quad E(x) = \sum_{i=0}^{\infty} E_i x^i \quad \rho(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \rho_i x^i \quad A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i x^i \quad k_w(x) = \sum_{i=0}^{\infty} k_{wi} x^i \quad (25)$$

با معرفی مختصات بدون بعد محلی ( $\varepsilon = x/L$ ) روابط فوق به صورت زیر بازنویسی می‌گردند:

$$I(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} I_i L^i \varepsilon^i \quad E(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} E_i L^i \varepsilon^i \quad \rho(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \rho_i L^i \varepsilon^i \quad A(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i L^i \varepsilon^i \quad k_w(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} k_{wi} L^i \varepsilon^i \quad (26)$$

با جایگذاری مختصات بدون بعد محلی و عبارات فوق در معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش آزاد نانو تیر غیرمنشوری، رابطه ذیل حاصل می‌شود:

$$\frac{d^2}{d\varepsilon^2} \left[ \left( \sum_{i=0}^{\infty} E_i L^i \varepsilon^i \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} I_j L^j \varepsilon^j \right) \frac{d^3 W}{d\varepsilon^2} \right] + L^4 \left[ \left( \sum_{i=0}^{\infty} k_{wi} L^i \varepsilon^i \right) - \omega^2 \left( \sum_{i=0}^{\infty} \rho_i L^i \varepsilon^i \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} A_j L^j \varepsilon^j \right) \right] W(\varepsilon) - L^2 \kappa^2 \frac{d^2}{d\varepsilon^2} \left[ \left( \sum_{i=0}^{\infty} k_{wi} L^i \varepsilon^i \right) - \omega^2 \left( \sum_{i=0}^{\infty} \rho_i L^i \varepsilon^i \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} A_j L^j \varepsilon^j \right) \right] W(\varepsilon) = 0 \quad (27)$$

بر اساس روش سری‌های توانی، فرم جواب حاکم بر تغییر شکل عرضی بایستی به صورت  $W(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \varepsilon^i$  در نظر گرفته شود. به دلیل وجود مشتق مرتبه دوم تغییر مکان در معادله حرکت خواهیم داشت:

$$\frac{d^3 W(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} = \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)a_i \varepsilon^{i-2} = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)(i+2)a_{i+2} \varepsilon^i \quad (28)$$

با جایگذاری رابطه تغییر شکل عرضی و عبارت (26) در (27) معادله زیر حاصل می‌شود.

$$\frac{d^2}{d\varepsilon^2} \left( \sum_{i=0}^{\infty} E_i^* \varepsilon^i \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} I_j^* \varepsilon^j \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2} (k+2)(k+1) \varepsilon^k \right) - L^4 \omega^2 \left( \sum_{i=0}^{\infty} \rho_i^* \varepsilon^i \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} A_j^* \varepsilon^j \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon^k \right) + L^4 \left( \sum_{i=0}^{\infty} k_{wi}^* \varepsilon^i \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon^k \right) - L^2 \kappa^2 \frac{d^2}{d\varepsilon^2} \left[ \left( \sum_{i=0}^{\infty} k_{wi}^* \varepsilon^i \right) - \omega^2 \left( \sum_{i=0}^{\infty} \rho_i^* \varepsilon^i \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} A_j^* \varepsilon^j \right) \right] \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon^k \right) = 0 \quad (29)$$

به طوری که:

$$I_j^* = I_j L^j \quad A_j^* = A_j L^j \quad E_i^* = E_i L^i \quad \rho_i^* = \rho_i L^i \quad k_{wi}^* = k_{wi} L^i \quad (30)$$

با توجه به قانون ضرب جملات سری رابطه (29) بصورت (31) بازنویسی می‌شود.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[ \sum_{i=0}^{k+2} \sum_{j=0}^k (E_i^*) (I_{j-i}^*) (a_{k-j+4}) (k-j+4)(k-j+3)(k+2)(k+1) - \omega^2 L^4 \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^j (\rho_i^*) (A_{j-i}^*) (a_{k-j}) + L^4 \sum_{i=0}^k (k_{wi}^*) (a_{k-i}) + L^2 \kappa^2 \omega^2 \sum_{j=0}^{k+2} \sum_{i=0}^j L^2 (\rho_i^*) (A_{j-i}^*) (a_{k-j+2}) (k+2)(k+1) - L^2 \kappa^2 \sum_{i=0}^{k+2} (k_{wi}^*) (a_{k-i+2}) (k+2)(k+1) \right] \varepsilon^k = 0 \quad (31)$$

با توجه رابطه فوق می‌توان کلیه ضرایب  $a_i$  به جزء چهار مورد اول ( $a_0, a_1, a_2, a_3$ ) را تعیین نمود. در نتیجه، جواب عمومی معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش آزاد تیر ماهیچه‌ای غیرمحلّی متکی بر بستر الاستیک را می‌توان به صورت زیر ارائه نمود:



$$W(\varepsilon) = a_0 W_0(\varepsilon) + a_1 W_1(\varepsilon) + a_2 W_2(\varepsilon) + a_3 W_3(\varepsilon) \quad (32)$$

لازم به ذکر است که جملات  $W_i$  ( $i=0,1,2,3$ ) به وسیله نرم افزار *Matlab* [39] و با توجه به رابطه بازگشتی به دست آمده تعیین می‌شوند. در خصوص نحوه استخراج رابطه (32) اطلاعات کامل‌تری در مراجع [37-34] ارائه شده است. همواره برای حل معادلات دیفرانسیل و تعیین جواب دقیق آن‌ها به شرایط مرزی در ابتدا و انتهای محدوده معادله نیاز است. از آنجا که معادله حاکم بر ارتعاش آزاد تیر ماهیچه‌ای غیرمحلای از مرتبه چهار است، به چهار شرط مرزی نیاز است. همچنین با جایگذاری شرایط مرزی مربوط به هر دهانه از تیر، چهار ضریب مجهول ( $a_0, a_1, a_2, a_3$ ) قابل محاسبه هستند.

در این مطالعه، اعضای غیرمنشوری با سه نوع شرایط تکیه‌گاهی متفاوت شامل دوسر مفصل، دو سر گیردار و یک سرگیردار - یک سر مفصل در نظر گرفته شده‌اند. مطابق با فرضیات حاکم بر تغییر شکل خمشی تیر اوپلر-برنولی و با استفاده از روابط (23-24) و (32)، شرایط مرزی برای نقاط ابتدایی و انتهایی تیر ( $x=0, x=L$ ) به صورت زیر تعریف می‌گردند:

- شرایط مرزی دوسر گیردار:

$$\begin{cases} W(x)|_{x=0} = W(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} \rightarrow W(0) = a_0 W_0(0) + a_1 W_1(0) + a_2 W_2(0) + a_3 W_3(0) = 0 \\ W'(x)|_{x=0} = W'(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} \rightarrow W'(0) = \frac{1}{L} (a_0 W_0'(0) + a_1 W_1'(0) + a_2 W_2'(0) + a_3 W_3'(0)) = 0 \end{cases} \quad \text{ابتدا:} \quad (1-33)$$

$$\begin{cases} W(x)|_{x=L} = W(\varepsilon)|_{\varepsilon=1} \rightarrow W(1) = a_0 W_0(1) + a_1 W_1(1) + a_2 W_2(1) + a_3 W_3(1) = 0 \\ W'(x)|_{x=L} = W'(\varepsilon)|_{\varepsilon=1} \rightarrow W'(1) = \frac{1}{L} (a_0 W_0'(1) + a_1 W_1'(1) + a_2 W_2'(1) + a_3 W_3'(1)) = 0 \end{cases} \quad \text{انتها:} \quad (2-33)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} W_0(0) & W_1(0) & W_2(0) & W_3(0) \\ W_0'(0) & W_1'(0) & W_2'(0) & W_3'(0) \\ W_0(1) & W_1(1) & W_2(1) & W_3(1) \\ W_0'(1) & W_1'(1) & W_2'(1) & W_3'(1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (34)$$

شرایط مرزی یکسرگیردار - یکسر مفصل:

$$\begin{cases} W(x)|_{x=0} = W(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} \rightarrow W(0) = a_0 W_0(0) + a_1 W_1(0) + a_2 W_2(0) + a_3 W_3(0) = 0 \\ W'(x)|_{x=0} = W'(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} \rightarrow W'(0) = \frac{1}{L} (a_0 W_0'(0) + a_1 W_1'(0) + a_2 W_2'(0) + a_3 W_3'(0)) = 0 \end{cases} \quad \text{ابتدا:} \quad (1-35)$$

$$\begin{cases} W(x)|_{x=L} = W(\varepsilon)|_{\varepsilon=1} \rightarrow W(1) = a_0 W_0(1) + a_1 W_1(1) + a_2 W_2(1) + a_3 W_3(1) = 0 \\ M(x)|_{x=L} = M(\varepsilon)|_{\varepsilon=1} \rightarrow M(1) = \kappa^2 (k_w - \rho \omega^2 A(1)) (a_0 W_0(1) + a_1 W_1(1) + a_2 W_2(1) + a_3 W_3(1)) \\ - \frac{EI(1)}{L^2} (a_0 W_0''(1) + a_1 W_1''(1) + a_2 W_2''(1) + a_3 W_3''(1)) = 0 \end{cases} \quad \text{انتها:} \quad (2-35)$$

$$\begin{bmatrix} W_0(0) & W_1(0) & W_2(0) & W_3(0) \\ W_0'(0) & W_1'(0) & W_2'(0) & W_3'(0) \\ W_0(1) & W_1(1) & W_2(1) & W_3(1) \\ W_0''(1) & W_1''(1) & W_2''(1) & W_3''(1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{ابتدا:} \quad (36)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

شرایط مرزی دوسر مفصل:

$$\begin{cases} W(x)|_{x=0} = W(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} \rightarrow W(0) = a_0 W_0(0) + a_1 W_1(0) + a_2 W_2(0) + a_3 W_3(0) = 0 \\ M(x)|_{x=0} = M(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} \rightarrow M(0) = \kappa^2 (k_w - \rho \omega^2 A(0)) (a_0 W_0(0) + a_1 W_1(0) + a_2 W_2(0) + a_3 W_3(0)) \\ - \frac{EI(0)}{L^2} (a_0 W_0''(0) + a_1 W_1''(0) + a_2 W_2''(0) + a_3 W_3''(0)) = 0 \end{cases} \quad \text{ابتدا:} \quad (1-37)$$

$$\begin{cases} W(x)|_{x=L} = W(\varepsilon)|_{\varepsilon=1} \rightarrow W(1) = a_0 W_0(1) + a_1 W_1(1) + a_2 W_2(1) + a_3 W_3(1) = 0 \\ M(x)|_{x=L} = M(\varepsilon)|_{\varepsilon=1} \rightarrow M(1) = \kappa^2 (k_w - \rho \omega^2 A(1)) (a_0 W_0(1) + a_1 W_1(1) + a_2 W_2(1) + a_3 W_3(1)) \\ - \frac{EI(1)}{L^2} (a_0 W_0''(1) + a_1 W_1''(1) + a_2 W_2''(1) + a_3 W_3''(1)) = 0 \end{cases} \quad \text{انتهای:} \quad (2-37)$$

$$\begin{bmatrix} W_0(0) & W_1(0) & W_2(0) & W_3(0) \\ W_0''(0) & W_1''(0) & W_2''(0) & W_3''(0) \\ W_0(1) & W_1(1) & W_2(1) & W_3(1) \\ W_0''(1) & W_1''(1) & W_2''(1) & W_3''(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

با توجه به شرایط مرزی حاکم، دستگاه معادلات  $4 \times 4$  بدست می آید که با حل مسئله مقادیر ویژه، مقدار دقیق فرکانس ارتعاشی تیر تعیین می گردد.

## ۷- نتایج و تشریح آن‌ها

در بخش‌های پیشین، معادله دیفرانسیل ارتعاشات آزاد نانوتیر ماهیچه‌ای متکی بر فونداسیون الاستیک بر پایه مدل کلاسیک اویلر-برنولی و تئوری غیرمحملی اربینگن به دست آمد. پس از آن یک روش نیمه تحلیلی براساس بسط سری‌های توانی برای تعیین نمودن فرکانس ارتعاشی ارائه شد. در این بخش، اثر پارامترهای مختلف مانند پارامتر غیرمحملی، سفتی بستر وینکلر، شرایط تکیه‌گاهی و تغییر ابعاد مقطع روی فرکانس ارتعاشی به دقت بررسی می‌شود. در این پژوهش، ارتعاش آزاد خطی سه نانوتیر غیرممنشوری متفاوت به طول  $L$  و نیم‌رخ مستطیلی مورد بررسی قرار گرفته است، که در شکل ۲ تصویری از چگونگی تغییر مقطع تیر در حالت‌های اول تا سوم نشان داده شده است. توابع حاکم بر تغییرات مساحت و ممان اینرسی نیم‌رخ تیر به صورت توابع توانی و نمایی و به فرم زیر در نظر گرفته شده‌اند:

$$A = A_0 \times (1 - \beta \times x/L) \quad I = I_0 \times (1 - \beta \times x/L)^3 \quad \text{حالت اول:} \quad (39)$$

$$A = A_0 \times (1 - \beta \times x/L)^2 \quad I = I_0 \times (1 - \beta \times x/L)^4 \quad \text{حالت دوم:} \quad (40)$$

$$A = A_0 e^{\alpha x/L} \quad I = I_0 e^{\alpha x/L} \quad \text{حالت سوم:} \quad (41)$$

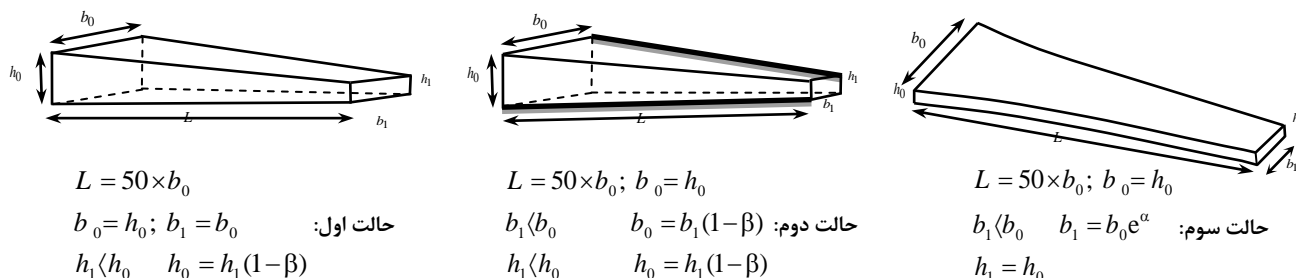
که در آن  $A_0$  و  $I_0$  به ترتیب ممان اینرسی حول محور ضعیف و مساحت نیم‌رخ تیر در ابتدای عضو ( $x=0$ ) هستند که براساس شکل (۲) به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$A_0 = b_0 \times h_0 \quad (1-42)$$

$$I_0 = (1/12) \times b_0 \times h_0^3 \quad (2-42)$$

عبارات در نظر گرفته شده برای ممان اینرسی و مساحت مقطع در مورد اول نظیر حالتی است که عرض مقطع مستطیلی به صورت خطی در امتداد عضو با شیب  $\beta$  کاهش یافته؛ درحالی‌که طول نیم‌رخ ثابت می‌ماند. مورد دوم حالتی است که طول و عرض نیم‌رخ تیر به صورت خطی و به طور همزمان در امتداد عضو با شیب ثابت  $\beta$  کاهش می‌یابند. در حالت سوم، طول مقطع مستطیلی از مقدار ( $b_0$ ) در

سمت چپ مطابق با الگو تابع نمایی ( $b_0 e^{\alpha x/L}$ ) در راستای عضو تغییر می کند، که در آن  $\alpha$  ضریبی منفی است. بنابراین، توابع حاکم بر تغییرات ممان اینرسی و مساحت مقطع عضو مد نظر به صورت توابع نمایی ارائه شده در رابطه (۴۱) تعریف می شوند،



شکل ۲: تغییرات سطح مقطع تیر اویلر-برنولی.

همانگونه که در بخش ۵ توضیح داده شد، جهت حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از روش سری های توانی لازم است تمامی ضرایب موجود در معادله به فرم سری توانی تبدیل شوند. برای تبدیل توابع نمایی حاکم بر مساحت و ممان اینرسی تیر باریک شونده به صورت یک سری متناهی به شکل رابطه زیر:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n \quad (43)$$

بایستی از بسط سری مک لورن استفاده نمود.

$$f(x) = f(0) + f'(0) \frac{x}{1!} + f''(0) \frac{x^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (44)$$

با توجه به روابط (۴۱) و (۴۴)، بسط مک لورن توابع حاکم بر ممان اینرسی و مساحت نیمرخ تیر با مقطع متغیر نمایی برابر است با:

$$I(x) = I_0 + \frac{\alpha}{L} I_0 x + \frac{\alpha^2}{2! L^2} I_0 x^2 - \dots + \frac{\alpha^n}{n! L^n} I_0 x^n + \dots \quad (45)$$

$$A(x) = A_0 + \frac{\alpha}{L} A_0 x + \frac{\alpha^2}{2! L^2} A_0 x^2 - \dots + \frac{\alpha^n}{n! L^n} A_0 x^n + \dots$$

و در انتها فرم سری توانی توابع فوق بصورت رابطه (۴۶) بدست می آید.

$$I(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha^i}{i! L^i} I_0 x^i ; A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha^i}{i! L^i} A_0 x^i \quad (46)$$

با استفاده از مختصات بدون بعد محلی  $\varepsilon$ ، رابطه (۴۶) به صورت ذیل ارائه می شود.

$$I(\varepsilon) = I_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha^i}{i!} \varepsilon^i ; A(\varepsilon) = A_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha^i}{i!} \varepsilon^i \quad (47)$$

در این مقاله، جهت سهولت در ارائه نتایج، مقادیر فرکانس ارتعاشی و سختی بستر ارتجاعی با استفاده از روابط زیر بی بعد شده اند:

$$\bar{\omega} = \omega \sqrt{\frac{\rho A_0 L^4}{EI_0}} \quad \bar{K}_w = \frac{k_w L^4}{EI_0} \quad (48)$$

که در آن،  $\bar{\omega}$  و  $\overline{K_w}$  به ترتیب پارامتر بی بعد فرکانس طبیعی ارتعاش و سختی بستر هستند.

### ۷-۱- بررسی روند همگرایی

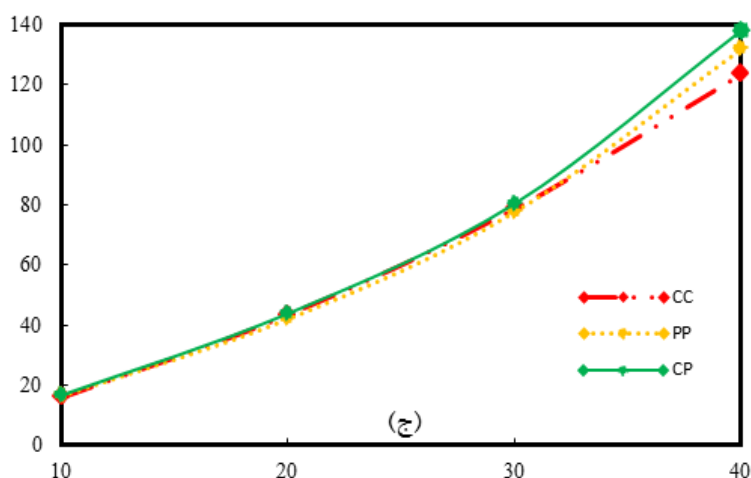
همواره جهت تضمین کیفیت و دقت روش‌های عددی بایستی همگرایی نتایج به دست آمده و حساسیت آن‌ها را نسبت به افزایش تعداد جملات و یا المان‌ها بررسی نمود. بدین منظور، یک تیر با مقطع ثابت و براساس خصوصیات هندسی زیر در نظر گرفته شده است. برای یافتن تعداد جملات مورد نیاز سری جهت همگرایی از  $N=10$  شروع نمودیم و تا  $N=40$  جملات سری را افزایش دادیم. با توجه به نتایج ارائه شده در جدول (۱) مشاهده می‌شود که با در نظر گرفتن ۳۰ جمله در بسط سری توانی نتایج همگرا شده‌اند و دیگر نیازی به افزایش تعداد جملات نمی‌باشد. این بدان معناست که تابع تغییر شکل مناسب جهت تعیین فرکانس طبیعی ارتعاش تیر غیرمحللی بایستی یک چند جمله‌ای از درجه ۳۰ باشد.

در جدول (۱) همچنین زمان لازم برای انجام مراحل محاسباتی در نرم افزار متلب برای سه شرایط مرزی متفاوت: دو سر مفصل، دوسرگیردار و یک سر گیردار - یک سر مفصل نشان داده شده است. به طور مثال برای عضو دو سر مفصل محللی در صورت استفاده از ۲۰ جمله در بسط سری توانی حاکم بر فرم تغییر شکل یافته عضو، واحد پردازش مرکزی (CPU) به ۴۲/۳۱۱ ثانیه زمان نیاز دارد تا فرکانس ارتعاشی بدون بعد را به کمک نرم افزار متلب تعیین نماید. در صورت آنکه تعداد جملات استفاده شده دو برابر شوند یعنی ۴۰ جمله، زمان حل بیش از ۳ برابر می‌شود.

جدول ۱: روند همگرایی نتایج فرکانس طبیعی بدون بعد تیر منشوری با افزایش تعداد جملات سری و زمان حل

$K^2$	تعداد جملات سری (N)	دوسر گیردار		دوسر مفصل		گیردار - مفصل	
		فرکانس طبیعی	زمان حل (S)	فرکانس طبیعی	زمان حل (S)	فرکانس طبیعی	زمان حل (S)
	۱۰	۱۸/۸۲۱	۱۶/۱۱۴	۹/۶۷۳	۱۶/۷۳۴	۱۳/۶۷۶	۱۶/۶۴۲
	۲۰	۲۲/۳۷۳	۴۳/۶۱۵	۹/۸۶۹	۴۲/۳۱۱	۱۵/۴۱۸	۴۳/۸۸۳
	۳۰	۲۲/۳۷۳	۷۸/۸۲۳	۹/۸۶۹	۷۷/۸۴۹	۱۵/۴۱۸	۸۰/۳۲۷
	۴۰	۲۲/۳۷۳	۱۲۳/۴۹۵	۹/۸۶۹	۱۳۱/۹۳۶	۱۵/۴۱۸	۱۳۷/۷۴۸

در شکل (۳) تاثیر افزایش جملات استفاده شده در بسط سری‌های توانی بر زمان مورد نیاز واحد پردازش مرکزی (CPU) جهت انجام مراحل محاسباتی نشان داده شده است. بهترین نمودار برآزش داده شده بایستی به صورت یک چند جمله‌ای با توان ۴ باشد. با توجه به شکل مشخص است که با هر گام در افزایش تعداد جملات سری و به تبع آن بهبود دقت محاسباتی جهت تعیین نمودن فرکانس ارتعاشی، مقدار زمان محاسباتی به شدت افزایش می‌یابد.



شکل ۳: تغییرات زمان محاسبات برحسب بالاترین توان تابع تغییر شکل

## ۷-۲- صحت سنجی

در این بخش با استفاده از نتایج ارائه شده در مراجع موجود، صحت و اعتبار نتایج به دست آمده از روابط نیمه تحلیلی استخراج شده در این پژوهش در حالت خاصی که تیر از تئوری کلاسیک و یا غیرمحملی ارینگن پیروی می کند، مورد بررسی قرار می گیرد. لازم به ذکر است که با توجه به قسمت قبلی مقادیر فرکانس ارتعاشی بدون بعد با استفاده از ۳۰ جمله در بسط سری توانی تعیین می شوند.

## ۷-۲-۱- تیر ماهیچه ای کلاسیک

قبل از ارائه نتایج عددی مربوط به تیر غیرمحملی با مقطع باریک شونده، نیاز است تا صحت و دقت روش سری های توانی در بدست آوردن فرکانس طبیعی تیر ماهیچه ای کلاسیک مورد بررسی قرار گیرد. بدین منظور و در جدول های ۲ و ۳ نتایج حاصل از روش معرفی شده با مقادیر ارائه شده توسط سلطانی و عسگریان [۴۳] مقایسه شده اند. با توجه به جداول ۲ و ۳ این نکته برداشت می شود که روش سری های توانی یک روش دقیق و کارآمد در بدست آوردن فرکانس طبیعی بدون بعد تیر غیرمنشوری کلاسیک است. بطوریکه در بعضی از مقادیر فرکانس طبیعی بطوریکه در بیشتر موارد تحلیل شده میزان درصد خطا نسبت به مرجع [۴۳] کمتر از یک درصد است.

جدول ۲: مقایسه فرکانس بدون بعد تیر ماهیچه ای با تغییرات خطی ابعاد مقطع (حالت اول و دوم) با نتایج معتبر قبلی

$\beta$	یک سر گیردار- یک سر مفصل						دو سر مفصل					
	حالت اول			حالت دوم			حالت اول			حالت دوم		
	نتایج تحقیق حاضر	مرجع [۴۳]	خطا (%)	نتایج تحقیق حاضر	مرجع [۴۳]	خطا (%)	نتایج تحقیق حاضر	مرجع [۴۳]	خطا (%)	نتایج تحقیق حاضر	مرجع [۴۳]	خطا (%)
۰/۱	۹/۳۶۷	۹/۳۶۸	۰/۰۱۰	۱۴/۸۴۹	۱۴/۸۴۹	۰/۰۰۰	۹/۳۶۲	۹/۳۶۲	۰/۰۱۰	۹/۳۶۸	۹/۳۶۷	۰/۰۱۰
۰/۳	۸/۳۰۱	۸/۳۰۲	۰/۰۱۰	۱۳/۶۴۰	۱۳/۶۴۰	۰/۰۰۰	۸/۲۵۰	۸/۲۵۰	۰/۰۱۰	۸/۳۰۲	۸/۳۰۱	۰/۰۱۰
۰/۵	۷/۱۲۱	۷/۱۲۲	۰/۰۱۰	۱۲/۳۰۰	۱۲/۳۰۰	۰/۰۱۰	۶/۹۵۷	۶/۹۵۶	۰/۰۱۰	۷/۱۲۲	۷/۱۲۱	۰/۰۱۰
۰/۷	۵/۷۴۵	۵/۷۴۵	۰/۰۱۰	۱۰/۷۳۷	۱۰/۷۳۸	۰/۰۰۰	۵/۳۵۹	۵/۳۵۹	۰	۵/۷۴۵	۵/۷۴۵	۰/۰۱۰
۰/۹	۳/۹۶۶	۳/۹۷۶	۰/۰۲۵۱	۸/۸۷۹	۸/۸۷۹	۴/۷۹۹	۳/۰۶۳	۳/۲۱۰	۰/۲۵۱	۳/۹۷۶	۳/۹۶۶	۰/۰۱۰

جدول ۳: مقایسه فرکانس بدون بعد تیر ماهیچه ای با تغییرات تابع نمایی سطح مقطع (حالت سوم) با نتایج معتبر قبلی

$\alpha$	یک سر گیردار- یک سر مفصل			دو سر مفصل		
	نتایج تحقیق حاضر	مرجع [۴۳]	خطا (%)	نتایج تحقیق حاضر	مرجع [۴۳]	خطا (%)
-۲	۹/۴۸۷	۹/۴۸۷	۰/۰۰۰	۱۷/۷۲۰	۱۷/۷۲۰	۰/۰۰۰
-۱/۵	۹/۶۵۳	۹/۶۵۳	۰/۰۰۰	۱۷/۰۹۷	۱۷/۰۹۷	۰/۰۰۰
-۱	۹/۷۷۲	۹/۷۷۲	۰/۰۰۰	۱۶/۵۱۱	۱۶/۵۱۱	۰/۰۰۰
-۰/۵	۹/۸۴۵	۹/۸۴۵	۰/۰۰۰	۱۵/۹۵۵	۱۵/۹۵۵	۰/۰۰۰
۰	۹/۸۶۹	۹/۸۶۹	۰/۰۰۰	۱۵/۴۱۸	۱۵/۴۱۸	۰/۰۰۰

## ۷-۲-۲- نانوتیر ماهیچه ای

در این مرحله، صحت و دقت روش استفاده شده در این تحقیق در تعیین فرکانس ارتعاشی تیر اوپلر-برنولی غیرمحملی مورد ارزیابی قرار می گیرد. در قسمت اول از اثر مقطع متغیر صرف نظر شده و نتایج حاصل با نتایج موجود در دیگر مقالات معتبر مقایسه می شوند. سپس، تاثیر توأم پارامتر غیرمحملی و مقطع متغیر مورد بررسی قرار می گیرد.

بنابراین در بخش اول، مقدار فرکانس ارتعاشی نرمال شده برای تیرهای منشوری با شرایط مرزی و ضرایب ارینگن متفاوت که با استفاده از ۳۰ جمله در بسط سری توانی به دست آمده اند و در جدول ۴ ارائه شده اند. مقادیر به دست آمده با نتایج موجود در سایر مقالات مقایسه شده اند. با توجه به جدول ۴ و مقایسه بین نتایج ارائه شده، می توان نتیجه گیری نمود که روش عددی ارائه شده در مقایسه با سایر نتایج موجود از تطابق و دقت قابل قبولی برخوردار است.

جدول ۴: مقایسه نتایج به دست آمده از روش سری توانی با منابع معتبر قبلی

κ	مرجع	شرایط مرزی	
		دوسر مفصل	گیردار- مفصل
۰	مقاله حاضر	۲۲/۳۷۳	۹/۸۶۹
	مرجع [۱۱]	۲۲/۳۷۳	۹/۸۶۹
	مرجع [۳۸]	۲۲/۳۷۳	۹/۸۶۹
۵	مقاله حاضر	۱۰/۹۹۱	۵/۳۰۰
	مرجع [۱۱]	۱۰/۹۹۱	۵/۳۰۰
	مرجع [۳۸]	۱۰/۹۹۱	۵/۳۰۰
۷	مقاله حاضر	۸/۳۴۳	۴/۰۸۵
	مرجع [۱۱]	-	-
	مرجع [۳۸]	۸/۳۴۳	۴/۰۸۵

در جدول ۵ تغییرات ضریب باریک شوندگی (حالت دوم) و پارامتر غیر محلی ارینگن روی سه مود اول ارتعاشی تیر اویلر - برنولی دوسر مفصل با نتایج تحقیق مرجع [۱۲] مقایسه شده است. همانطور که مشاهده می شود تطابق خوبی بین نتایج به دست آمده با پژوهش انجام شده توسط راجسکاران و خانیکی [۱۲] وجود دارد. لازم به ذکر است که پارامترهای هندسی منظور شده جهت مقایسه نتایج، مطابق با مقاله [۱۲] در نظر گرفته شده اند.

جدول ۵: مقایسه فرکانس بدون بعد تیر ماهیچه ای (ناشی از تغییرات  $\beta$ ,  $\kappa=5$ ) روی سه مود ارتعاشی اول تیر دو سر ساده حالت دوم

$\beta$	مود اول		مود دوم		مود سوم	
	نتایج تحقیق حاضر	مرجع [۱۲]	نتایج تحقیق حاضر	مرجع [۱۲]	نتایج تحقیق حاضر	مرجع [۱۲]
۰	۵/۳۰۰	۵/۳۰۰	۱۱/۹۷۴	۱۱/۹۷۲	۱۸/۴۳۹	۱۸/۴۳۲
۰/۱۲	۴/۷۴۹	۴/۷۴۹	۱۰/۷۴۴	۱۰/۷۲۲	۱۶/۵۳۰	۱۶/۵۲۵
۰/۴	۴/۱۴۸	۴/۱۴۸	۹/۴۳۰	۹/۴۲۹	۱۴/۴۵۶	۱۴/۴۵۲
۰/۶	۳/۴۴۶	۳/۴۴۶	۷/۹۹۲	۷/۹۹۱	۱۲/۱۱۲	۱۲/۱۱۰

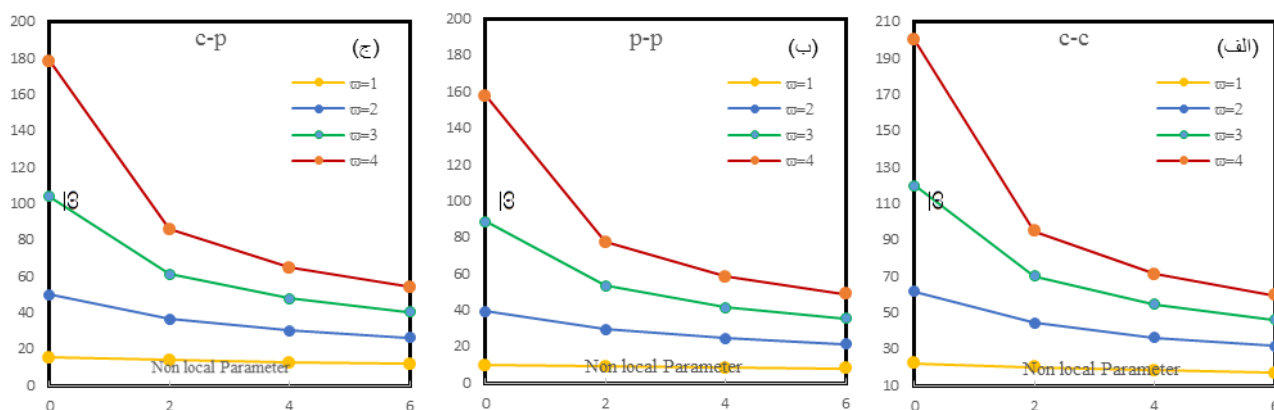
پس از صحت سنجی نتایج و تایید روند همگرایی تحلیل، در ادامه اثر عوامل مختلف مانند شرایط مرزی، پارامتر ارینگن، سختی بستر وینکلر و تغییر ابعاد نیم رخ تیر بر فرکانس طبیعی ارتعاش عضو مد نظر مطالعه می شود.

### ۷-۳- تحلیل نتایج عددی

۷-۳-۱- بررسی تاثیر پارامتر غیر محلی در غیاب بستر الاستیک وینکلر

شکل ۴ منحنی های تغییرات فرکانس طبیعی بدون بعد تیر منشوری با شرایط تکیه گاهی مختلف (دوسر ساده p-p، دوسر گیردار c-c و یک سر گیردار- یک سر ساده c-p) را به ازای مقادیر مختلف پارامتر ارینگن و تغییرات مود ارتعاشی نشان می دهد. روی محور عمودی

و افقی نمودار به ترتیب فرکانس طبیعی بدون بعد و شماره مود ارتعاشی نمایش داده شده است. لازم به ذکر است که با توجه به مراجع [۵-۶] مقادیر پارامتر غیرمحلّی ارینگن در بازه (۰-۴) در نظر گرفته شده است. همان‌طور که از نمودارها مشخص است با افزایش مود ارتعاشی فرکانس نیز افزایش می‌یابد که میزان نرخ افزایش برای حالتی که پارامتر ارینگن صفر است (تئوری الاستیسیته محلّی) بسیار بیشتر از تئوری غیرمحلّی ارینگن است.



شکل ۴: تاثیر ضریب ارینگن روی فرکانس چهار مود اول ارتعاشی

نتایج بدست آمده حاکی از آنست که با افزایش پارامتر ارینگن مقدار فرکانس ارتعاشی هر چهار مود به شدت کاهش می‌یابد و در نتیجه تیر راحت‌تر به ارتعاش در می‌آید. به عبارت دیگر می‌توان گفته که سختی تیر با شرایط مرزی دو سر مفصل، دو سر گیردار و گیردار-مفصل با پارامتر غیرمحلّی نسبت عکس دارد. همچنین با توجه به نتایج ارائه شده در شکل ۴ قابل استنباط است که تاثیر ضریب غیرمحلّی روی فرکانس طبیعی بیشتر از تعداد مودهای ارتعاشی است. بعلاوه با مقایسه منحنی‌های مربوط به ضریب غیرمحلّی ۰ و ۲ در مودهای ارتعاشی دوم تا چهارم، دیده می‌شود که فرکانس بدون بعد به صورت قابل توجهی کاهش می‌یابد که میزان این تغییرات در مودهای دوم به بعد به وضوح قابل مشاهده می‌باشد. به طور مثال در شرایط تیر یک سر گیردار- یک سر ساده و مود سوم ارتعاشی، با افزایش پارامتر غیرمحلّی از ۰ به ۲ و ۴، مقدار فرکانس به ترتیب به ۴۱/۰۶٪ و ۵۴/۱۱٪ کاهش می‌یابد. این بدان معناست که در مدهای بالاتر تاثیر پارامتر غیرمحلّی قابل چشم‌پوشی نیست. دلیل این امر را می‌توان اینگونه توجیه نمود که در مدل غیرمحلّی فرض می‌شود اتم‌ها بوسیله فنرهای الاستیک به هم متصل شده‌اند و در نتیجه سازه بصورت منعطف‌تری عمل می‌کند، در حالی که در تئوری محلّی سختی فنرها بی‌نهایت است. به طور خلاصه، اگر نیاز به پیش بینی دقیق فرکانس طبیعی میکرو و نانو تیرها باشد، نظریه غیرموضعی باید مورد استفاده قرار گیرد. به عبارت دیگر می‌توان گفت، در صورت صرف نظر نمودن از اثر اندرکنش بین اتم‌ها و یا استفاده از تئوری الاستیسیته محلّی در تحلیل تیرهای مقیاس کوچک، مقادیر فرکانس ارتعاشی بزرگتری بدست می‌آید.

در جدول ۶ به بررسی تغییرات همزمان پارامتر ارینگن ( $\kappa^2$ ) و مقادیر مختلف از ضریب باریک شوندهگی مقطع ( $\beta$ ) برای حالت اول و دوم از تیر ماهیچه‌ای، بدون حضور بستر الاستیک وینکلر با شرایط تکیه‌گاهی: دو سر گیردار، یک سر گیردار- یک سر مفصل و دوسر مفصل پرداخته شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش ضریب باریک شوندهگی مقطع و پارامتر غیرمحلّی، میزان فرکانس تیر کاهش می‌یابد. میزان این کاهش برای شرایط تکیه‌گاهی دو سر گیردار و یک سر گیردار- یک سر مفصل در حالت اول بیشتر از حالت دوم آن می‌باشد. اما در تیر دو سر مفصل کاملاً عکس این قضیه اتفاق می‌افتد و فرکانس نرمال در حالت دوم با سرعت بیشتری کاهش می‌یابد. پس این نتیجه حاصل می‌شود که نرخ تغییرات فرکانس به ازای باریک شوندهگی مقطع و ضرایب ارینگن متفاوت برای تکیه‌گاه‌های مختلف قابل پیش بینی نخواهد بود. همچنین نتایج حاکی از آنست که میزان کاهش فرکانس به ازای مقادیر مختلف پارامتر ارینگن و تغییر ضریب باریک شوندهگی از ۰ به ۰/۸، در تیر با شرایط تکیه‌گاهی دو سر مفصل اندکی بیشتر است.

جدول ۶: بررسی اثر تغییرات ضریب ارینگن و سطح مقطع روی فرکانس ارتعاشی بدون حضور بستر

دو سر مفصل		یک سر گیردار-یک سر مفصل		دو سر گیردار		$\beta$
حالت دوم	حالت اول	حالت دوم	حالت اول	حالت دوم	حالت اول	
۹/۸۶۹	۹/۸۶۹	۱۵/۴۱۸	۱۵/۴۱۸	۲۲/۳۷۳	۲۲/۳۷۳	۰
۸/۸۲۴	۸/۸۴۶	۱۴/۴۷۱	۱۴/۳۵۸	۲۰/۰۹۷	۲۰/۰۷۸	۰/۲
۷/۶۳۱	۷/۷۲۹	۱۳/۴۲۴	۱۲/۹۹	۱۷/۷۲۰	۱۷/۶۳۵	۰/۴
۶/۲۰۸	۶/۴۶۶	۱۲/۲۳۳	۱۱/۵۵۶	۱۵/۱۹۰	۱۴/۹۶۲	۰/۶
۴/۳۸۲	۴/۹۳۰	۱۰/۸۴۴	۹/۸۱۵	۱۲/۴۲۳	۱۱/۸۵۶	۰/۸
۹/۴۱۵	۹/۴۱۵	۱۴/۵۹۹	۱۴/۵۹۹	۲۱/۱۰۹	۲۱/۱۰۹	۰
۸/۴۲۰۸	۸/۴۳۹	۱۳/۶۹۱	۱۳/۴۸۵	۱۸/۹۶۴	۱۸/۹۴۳	۰/۲
۷/۲۸۸	۷/۳۷۵	۱۲/۶۹۶	۱۲/۲۶۸	۱۶/۷۳۲	۱۶/۶۳۶	۰/۴
۵/۹۴۴	۶/۱۷۳	۱۱/۵۷۹	۱۰/۸۹۲	۱۴/۳۶۸	۱۴/۱۰۸	۰/۶
۴/۲۲۰	۴/۷۱۲	۱۰/۳۱۱	۹/۲۱۷	۱۱/۸۱	۱۱/۱۶۲	۰/۸
۹/۰۱۹۵	۹/۰۱۹	۱۳/۸۹۶	۱۳/۸۹۶	۲۰/۰۳۳	۲۰/۰۳۳	۰
۸/۰۶۷۸	۸/۰۸۴	۱۳/۰۲۳	۱۲/۸۲۳	۱۷/۹۹۹	۱۷/۹۷۷	۰/۲
۶/۹۸۹	۷/۰۶۶	۱۲/۰۷۳	۱۱/۶۵۱	۱۵/۸۹	۱۵/۷۸۵	۰/۴
۵/۷۱۱۷	۵/۹۱۷	۱۱/۰۲	۱۰/۳۲۷	۱۳/۶۶۸	۱۳/۳۸۳	۰/۶
۴/۰۷۵۳	۴/۵۲۰	۹/۸۶۰۳	۸/۷۰۴	۱۱/۲۹۴	۱۰/۵۷۷	۰/۸

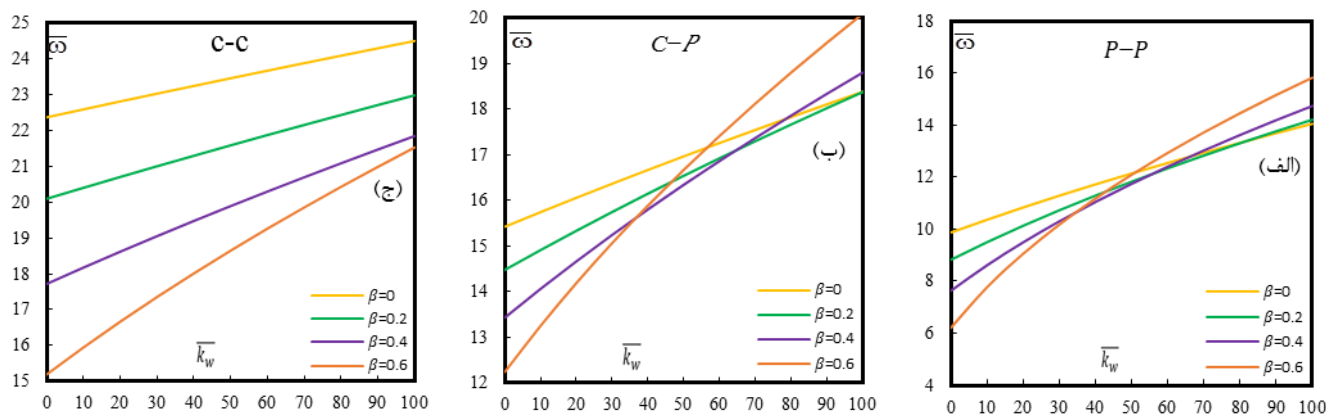
۷-۳-۲- بررسی تاثیر توام پارامتر غیرمحملی و بستر الاستیک

شکل ۵ بیانگر تغییرات فرکانس طبیعی بدون بعد تیر ماهیچه‌ای محلی با شرایط تکیه‌گاهی دوسر ساده (p-p)، یک سر گیردار-یک سر ساده (c-p) و دو سر گیردار (c-c) برحسب سختی بستر الاستیک وینکلر برای مقادیر متفاوت ضریب باریک شونده  $(\beta)$  است. همانطور که مشاهده می‌شود، رابطه فرکانس نرمال شده و بستر الاستیک وینکلر برای ضریب باریک شدگی مقطع بصورت غیرخطی است. با توجه به تمام نمودارها افزایش سختی بستر، افزایش فرکانس ارتعاشی را در پی دارد. در صورتی که براساس جدول ۶ این نتیجه بدست آمد که افزایش ضریب باریک شونده بدون لحاظ کردن اثر بستر الاستیک، فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. اما نتایج ارائه شده در منحنی‌ها شکل ۵ حاکی از آنست که افزایش سختی بستر بر اثرات کاهش ناشی از تغییرات مقطع غلبه می‌کند و فرکانس نرمال افزایش می‌یابد. یعنی امکان ارتعاش در تیر سخت تر می‌شود. از طرفی از تمام نمودارها این نکته برداشت می‌شود که با افزایش  $\beta$ ، شیب خط تغییرات فرکانس بیشتر می‌شود و باعث تلاقی منحنی‌ها در یک نقطه می‌گردد. این موضوع در منحنی با ضریب باریک شونده  $0/6$  به وضوح قابل مشاهده است. دلیل آن این است که با افزایش ضریب باریک شونده، سختی خمشی (سفتی) عضو کاهش می‌یابد که به معنی افزایش خیز و یا کاهش فرکانس سیستم است. بنابراین، مقدار ثابت فنری وینکلر تاثیرگذاری بیشتری روی فرکانس ارتعاشی تیر با مقطع متغیر دارد. ضمناً به دلیل کمتر بودن میزان سفتی تیر دو سر مفصل نسبت به دو شرایط تکیه‌گاهی دیگر، نرخ افزایش فرکانس ارتعاشی نانو تیر دو سر مفصل نسبت به سختی بستر وینکلر بسیار بیشتر است. به طوری که به ازای ضریب باریک شونده  $0/4$ ، با افزایش ثابت فنری بستر از  $0$  به  $100$ ، میزان فرکانس در تیر دوسر ساده  $93\%$ ، یک سر گیردار- یک سر ساده  $40\%$  و تیر با تکیه‌گاه دو سر گیردار  $21/50\%$  افزایش می‌یابد. ذکر این نکته ضروری است که مقادیر سختی ثابت فنری وینکلر در این مقاله در بازه  $(0-100)$  در نظر گرفته شده است [۴۰-۴۲].

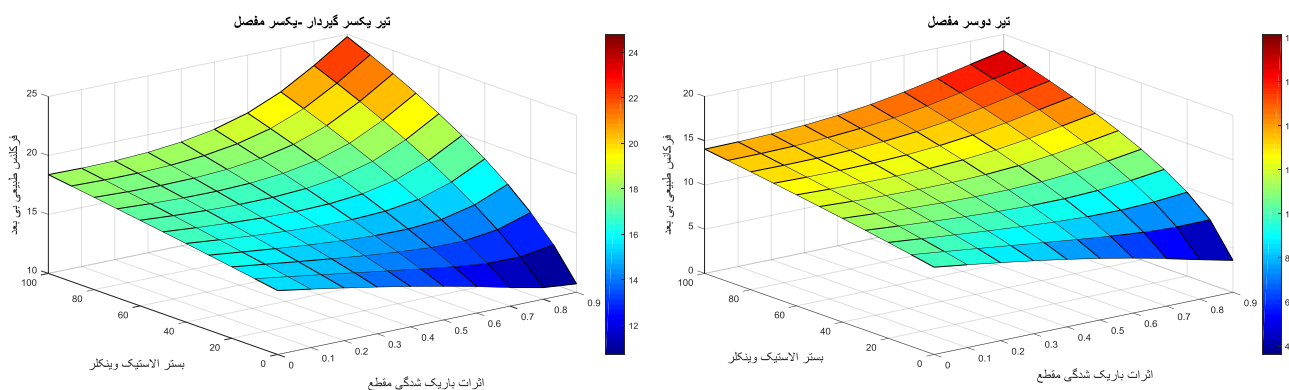
نتایج حاصل شده در قسمت قبل به صورت مناسبتری در نمودارهای شکل ۶ نمایش داده شده‌اند. در شکل ۶ تغییرات فرکانس طبیعی بدون بعد به ازای تغییرات نیمرخ مستطیلی (حالت دوم) و ثابت بستر الاستیک وینکلر روی تیر کلاسیک با شرایط مرزی یک سر گیردار- یک سر مفصل و دو سر مفصل مورد بررسی قرار گرفته شده است. روی محور طولی و عرضی نمودار به ترتیب ضریب باریک شدگی مقطع  $(\beta)$  و سفتی بستر الاستیک وینکلر  $(\bar{K}_{\nu\nu})$  نمایش داده شده است. مشاهده نشان می‌دهد که در صورت عدم حضور فونداسیون الاستیک  $(\bar{K}_{\nu\nu} = 0)$ ، برای هر دو شرایط مرزی، فرکانس طبیعی بدون بعد با افزایش ضریب باریک شدگی مقطع  $(\beta)$  به صورت پیوسته



کاهش می‌یابد. همان‌طور که از نمودارها مشخص است با افزایش ثابت فنری بستر الاستیک وینکلر و به ازای ضریب باریک شدگی ثابت، میزان فرکانس بدون بعد افزایش می‌یابد که میزان نرخ افزایش برای تیر دو سر مفصل بیشتر از تیر یک سر گیردار - یک سر مفصل است. همان‌طور که از نمودارهای رسم شده مشخص است، میزان تغییرات فرکانس ارتعاشی با مقطع متغیر نسبت به پارامتر سختی بستر وینکلر برای ضریب باریک شدگی مختلف، متفاوت است. به این صورت که با افزایش ضریب باریک شدگی از ۰ تا ۰/۹ و به تبع آن کاهش بیشتر سختی تیر، نرخ تغییرات فرکانس طبیعی نسبت به پارامتر سختی بستر وینکلر افزایش می‌یابد.



شکل ۵: بررسی تغییرات سطح مقطع (حالت دوم) و بستر وینکلر بر فرکانس بدون بعد تیر ماهیچه‌ای محلی.



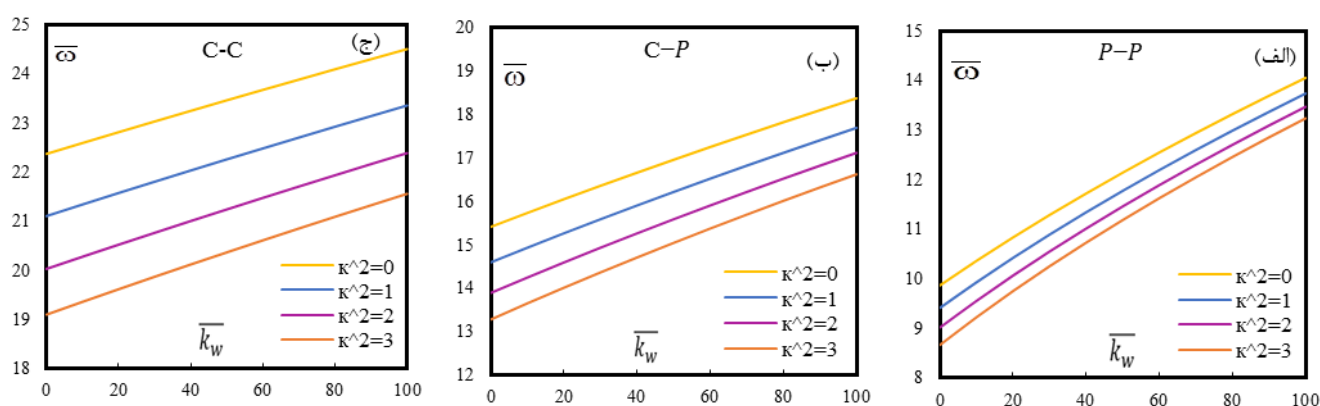
شکل ۶: بررسی تغییرات سطح مقطع (حالت دوم) و بستر الاستیک روی فرکانس ارتعاشی بی بعد

در جدول ۷ به بررسی اثرات  $\alpha$  و بستر الاستیک وینکلر بر روی تیر با شرایط مرزی: دوسر ساده، دوسرگیردار و یک سر گیردار - یک سر ساده با مقطع متغیر نمای پرداخته شده است. با توجه به داده‌های مندرج در جدول دو نتیجه مورد انتظار مشاهده می‌شود. نخست آنکه، با کاهش  $\alpha$  و ثابت بودن سختی فنر بستر، میزان فرکانس بی بعد در تمام شرایط تکیه‌گاهی کاهش می‌یابد. این در حالی است که در هر تیر با افزایش مقدار بستر الاستیک وینکلر و ثابت بودن  $\alpha$ ، فرکانس طبیعی ارتعاش افزایش می‌یابد. همچنین با توجه به نتایج بدست آمده این نکته حاصل می‌شود که میزان حساسیت مودهای ارتعاشی بالاتر نسبت به تغییرات سختی بستر کمتر است، بطوریکه در حالت  $\alpha = -0/1$  و تغییر پارامتر بدون بعد ثابت فنری بستر از ۵۰ به ۱۰۰، نرخ افزایش مود ارتعاشی اول تا سوم برای تیر دوسر ساده به ترتیب ۱۶/۲۱٪، ۱/۶۱۹٪ و ۰/۳۳٪ است. همچنین نتایج حاکی از آنست که تیر دوسر ساده بیشترین و تیر گیردار - ساده کمترین میزان افزایش فرکانس را به خود اختصاص داده‌اند.

جدول ۷: اثر تغییرات  $\alpha$  و بستر الاستیک وینکلر روی سه شکل مود ارتعاشی اول

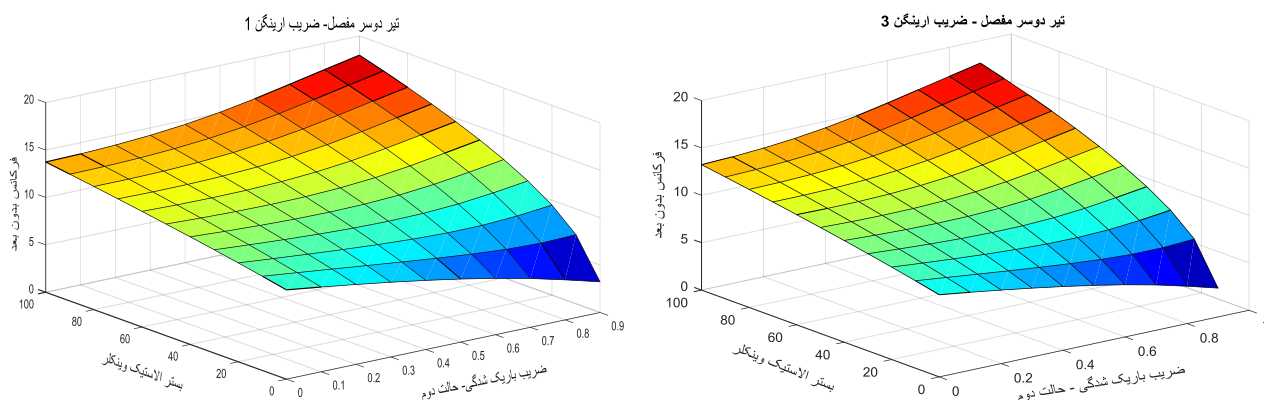
شرایط مرزی									$\bar{k}_w$	$\alpha$
گیردار-ساده			دوسر گیردار			دو سر ساده				
$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_1$		
۱۰۴/۱۳۰	۵۰/۰۶۶	۱۵/۵۲۴	۱۲۰/۲۰۰	۶۱/۶۷۵	۲۲/۳۷۵	۸۸/۸۱۲	۳۹/۴۷۹	۹/۸۶۹۶	۰	
۱۰۴/۲۶۰	۵۰/۳۲۸	۱۶/۳۵۴	۱۲۰/۳۱۰	۶۱/۸۸۷	۲۲/۹۵۵	۸۸/۹۶	۳۹/۸۱۱	۱۱/۱۲۱	۲۵	
۱۰۴/۳۹۰	۵۰/۵۸۹	۱۷/۱۴۴	۱۲۰/۴۲۰	۶۲/۱۰۰	۲۳/۵۲	۸۹/۱۰۸	۴۰/۱۴۰	۱۲/۲۴۵	۵۰	
۱۰۴/۵۱۰	۵۰/۸۴۹	۱۷/۸۹۹	۱۲۰/۵۲۰	۶۲/۳۱۱	۲۴/۰۷۲	۸۹/۲۵۵	۴۰/۴۶۶	۱۳/۲۷۵	۷۵	-۰/۱
۱۰۴/۶۴۰	۵۱/۱۰۸	۱۸/۶۲۴	۱۲۰/۶۳۰	۶۲/۵۲۱	۲۴/۶۱۲	۸۹/۴۰۳	۴۰/۷۹۰	۱۴/۲۳۱	۱۰۰	
۱۰۴/۷۰	۵۰/۴۹۹	۱۵/۹۵۵	۱۲۰/۶۴۰	۶۱/۷۲۰	۲۲/۴۰۸	۸۸/۸۵۱	۳۹/۵۰۱	۹/۸۴۵۴	۰	
۱۰۴/۸۶۰	۵۰/۸۲۱	۱۶/۹۶۵	۱۲۰/۷۷۰	۶۱/۹۸۱	۲۳/۱۱۵	۸۹/۰۳۳	۳۹/۹۱۰	۱۱/۳۵۸	۲۵	
۱۰۵/۰۱۰	۵۱/۱۴۲	۱۷/۹۱۸	۱۲۰/۸۹۰	۶۲/۲۴۱	۲۳/۸۰۱	۸۹/۲۱۵	۴۰/۳۱۴	۱۲/۶۹۱	۵۰	-۰/۵
۱۰۵/۱۶۰	۵۱/۴۶	۱۸/۸۲۳	۱۲۱/۰۲۰	۶۲/۵۰۰	۲۴/۴۶۷	۸۹/۳۹۷	۴۰/۷۱۴	۱۳/۸۹۶	۷۵	
۱۰۵/۳۱۰	۵۱/۷۷۷	۱۹/۶۸۶	۱۲۱/۱۵۰	۶۲/۷۵۸	۲۵/۱۱۶	۸۹/۵۷۸	۴۱/۱۱۱	۱۵/۰۰۵	۱۰۰	
۱۰۵/۴۵۰	۵۱/۱۰۳	۱۶/۵۱۱	۱۲۱/۱۶۰	۶۱/۸۶۶	۲۲/۵۱۲	۸۸/۹۶۸	۳۹/۵۷	۹/۷۷۲۹	۰	
۱۰۵/۶۶۰	۵۱/۵۲۵	۱۷/۸۰۴	۱۲۱/۳۳۰	۲/۲۰۱۶	۲۳/۴۱۹	۸۹/۲۰۹	۴۰/۱۰۹	۱۱/۶۸۶	۲۵	
۱۰۵/۸۶۰	۵۱/۹۴۵	۱۹/۰۰۷	۱۲۱/۵۰۰	۲/۵۴	۲۴/۲۹۱	۸۹/۴۴۹	۴۰/۶۴۱	۱۳/۳۲۴	۵۰	-۱
۱۰۶/۰۶۰	۵۲/۳۶۲	۲۰/۱۳۸	۶۳/۲۱۴	۶۲/۸۷۸	۲۵/۱۳۳	۸۹/۶۸۹	۴۱/۱۶۶	۱۴/۷۷۹	۷۵	
۱۰۶/۲۶۰	۵۲/۷۷۵	۲۱/۲۰۸	۱۲۱/۸۵۰	۶۳/۲۱۴	۲۵/۹۴۸	۸۹/۹۲۸	۴۱/۶۸۶	۱۶/۱۰۱	۱۰۰	
۱۰۶/۹۸۰	۵۲/۵۲۷	۱۷/۷۲	۱۲۱/۸۹۰	۶۲/۴۲۴	۲۲/۹۳۸	۸۹/۳۹۹	۳۹/۸۵۲	۹/۴۸۷۳	۰	
۱۰۷/۳۶۰	۵۳/۲۸۳	۱۹/۸۳۵	۱۲۲/۲۲۰	۶۳/۰۲۵	۲۴/۴۳۴	۸۹/۸۴۵	۴۰/۸۳۵	۱۲/۵۱۵	۲۵	
۱۰۷/۷۳۰	۵۴/۰۳۲	۲۱/۷۳۳	۱۲۲/۵۵۰	۶۳/۶۲۲	۲۵/۸۳۹	۹۰/۲۸۹	۴۱/۸۰۱	۱۴/۹۱۶	۵۰	-۲
۱۰۸/۱۱۰	۵۴/۷۷۳	۲۳/۴۶۸	۱۲۲/۸۷۰	۶۴/۲۱۴	۲۷/۱۶۶	۹۰/۷۳۲	۴۲/۷۵۱	۱۶/۹۵۷	۷۵	
۱۰۸/۴۸۰	۵۵/۵۰۷	۲۵/۰۷۳	۱۲۳/۲۰۰	۶۴/۸۰۲	۲۸/۴۲۷	۹۱/۱۷۴	۴۳/۶۸۶	۱۸/۷۵۹	۱۰۰	

در نمودارهای شکل ۷ اثرات پارامتر غیرمحملی ارینگن و سختی بستر الاستیک وینکلر روی فرکانس طبیعی ارتعاش تیر با مقطع ثابت و شرایط تکیه‌گاه‌های متفاوت: دو سر مفصل (p-p)، یک سر گیردار- یک سر مفصل (c-p) و دو سر گیردار (c-c)، مورد بررسی قرار گرفته است. همانطور که در شکل‌ها دیده می‌شود در تمام شرایط تکیه‌گاهی مدنظر، روند تغییرات فرکانس طبیعی نرمال شده با افزایش سختی بستر الاستیک وینکلر صعودی است ولی میزان نرخ افزایش آن بسته به نوع شرایط مرزی متفاوت می‌باشد. به طور مثال، نرخ افزایش فرکانس ارتعاشی برای تیر دو سر مفصل اندکی بیشتر از تیر یک سر گیردار- یک سر مفصل و دو سر گیردار است. دلیل آن اینست که سختی (سفتی) تیر دو سر ساده از دو مورد دیگر کمتر است و افزایش ثابت فنری وینکلر تاثیر بیشتری روی آن دارد. از طرفی با ثابت بودن مقادیر سختی بستر و افزایش پارامتر غیرمحملی ارینگن مشاهده می‌شود که نرخ کاهش فرکانس طبیعی تیر دو سر گیردار بیشتر از سایر شرایط تکیه‌گاهی می‌باشد و تیر یک سر گیردار- یک سر ساده و دو سر ساده به ترتیب در جایگاه‌های بعدی قرار دارند. همان‌طور که در این شکل‌ها دیده می‌شود، رابطه فرکانس ارتعاشی نرمال شده با ثابت فنری وینکلر برای تیر منشوری و در نظر گرفتن اثرات غیرمحملی، به صورت غیرخطی است.



شکل ۷: اثر تغییرات پارامتر ارینگن و بستر وینکلر بر فرکانس سازه.

شکل ۸ شرایط موجود در شکل ۶ را برای تیر غیرمحملی دو سر ساده با دو ضریب ارینگن متفاوت بررسی می‌کند. همانطور که از نمودارها مشخص است با افزایش ضریب باریک شدگی، فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. در شرایطی که فونداسیون الاستیک وجود ندارد ( $\bar{k}_w = 0$ )، میزان این کاهش در تیر با پارامتر غیرمحملی ۱ نسبت به شکل با پارامتر غیرمحملی ۳ بیشتر است. زیرا ضریب غیرمحملی ارینگن روی تیرهای نرم‌تر اثرات کمتری دارد و ارتعاش عضو به ازای مقادیر بیشتری صورت می‌گیرد. از طرفی انتظار داریم با افزایش سختی بستر از انعطاف عضو کاسته شود و مقدار فرکانس طبیعی افزایش یابد که شکل‌ها نیز گویای این حقیقت هستند و به ازای مقادیر یکسان ضریب باریک شدگی، با افزایش سختی بستر میزان فرکانس در هر دو عضو افزایش پیدا می‌کند و نرخ افزایش فرکانس در تیر با مقدار ضریب غیرمحملی ۳ نسبت به تیر با ضریب غیرمحملی ۱ بیشتر است. همچنین به وضوح قابل مشاهده است که تاثیر بستر الاستیک وینکلر بر فرکانس بدون بعد بیشتر از تاثیر ضریب باریک شدگی مقطع است. مقایسه شکل‌های ۶ و ۸ نشان می‌دهد که نمودارها از نظر ظاهری با یکدیگر مشابه هستند، اما از نظر کمی تئوری الاستیسیته غیرمحملی ارینگن فرکانس ارتعاشی بدون بعد کوچکتری را نسبت به شرایط مشابه در نظریه کلاسیک محلی بدست می‌دهد.

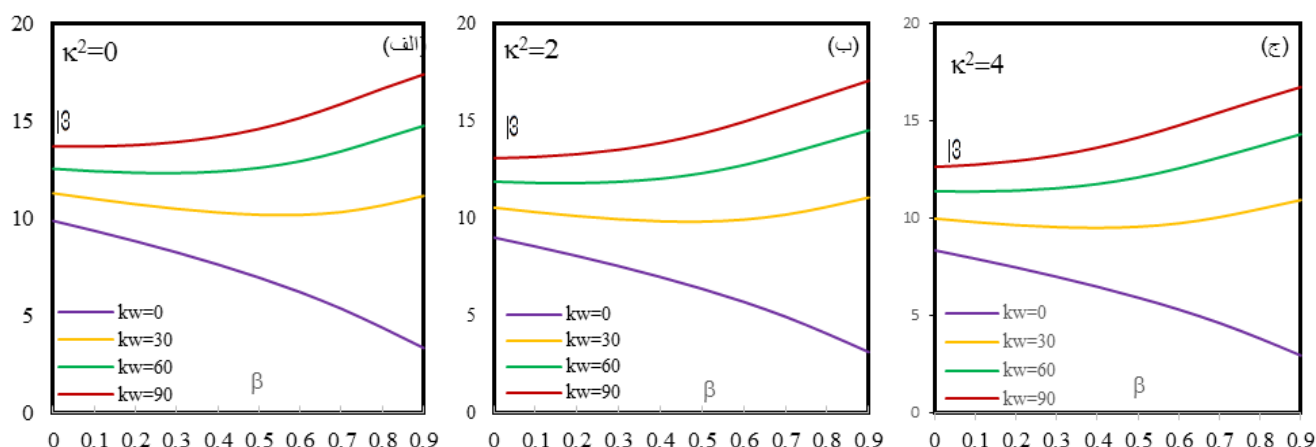


شکل ۸: بررسی تغییرات سطح مقطع (حالت دوم)، بستر الاستیک و ضریب ارینگن روی فرکانس ارتعاشی بدون بعد

برای بررسی دقیق‌تر اثر همزمان مقطع متغیر، سختی فونداسیون وینکلر و پارامتر غیرمحملی، نمودارهای فرکانس ارتعاشی بدون بعد تیر ماهچه‌ای (حالت دوم) با شرایط مرزی دو سر ساده بر حسب ضریب باریک شدگی مقطع به ازای مقادیر مختلف سختی فونداسیون وینکلر ( $\bar{k}_w = 0, 30, 60, 90$ ) و برای سه ضریب ارینگن متفاوت ( $\kappa^2 = 0, 2, 4$ ) در شکل ۹ رسم شده‌اند. نخستین نکته‌ای که در نمودارهای شکل ۹ مشاهده می‌شود آن است که با افزایش سختی فنر بستر الاستیک، مقدار فرکانس ارتعاشی تیر با مقادیر مختلف از ضریب باریک

شدگی و پارامتر غیرمحملی به شدت افزایش می‌یابد. این موضوع مورد انتظار نیز هست، زیرا بستر وینکلر به طور مستقیم سختی سیستم را افزایش می‌دهد. همچنین نمودارهای شکل ۹ نشان می‌دهند که نظریه مدول الاستیسیته غیرمحملی در مقایسه با تئوری کلاسیک محلی، به ویژه در ضرایب باریک شدگی کوچک، فرکانس ارتعاشی به مراتب کوچکتری را پیش‌بینی می‌کند. همانطور که از نمودارها مشخص است در حالتی که سختی بستر الاستیک صفر است، با افزایش ضریب باریک شدگی نیمرخ مستطیلی مقدار فرکانس بدون بعد سازه کاهش می‌یابد. زیرا با باریک شدن مقطع عضو، امکان ارتعاش آن راحت‌تر می‌شود. درحالی‌که روند تغییرات فرکانس ارتعاشی تیر ماهیچه‌ای متکی بر بستر الاستیک وینکلر با افزایش ضریب باریک شدگی مقطع صعودی است. ضمناً هرچه میزان ضریب باریک شدگی افزایش می‌یابد، تاثیر فونداسیون وینکلر بر سختی کلی سیستم به صورت چشمگیری افزایش می‌یابد. با توجه به شکل ۹ ذکر موارد زیر ضروری است:

در حالتی که سختی بستر صفر است. به ازای تغییرات ضریب باریک شدگی (۰ تا ۰/۹) و با افزایش پارامتر غیرمحملی از ۰ به ۲ و ۴، نرخ کاهش فرکانس در منحنی‌های (الف) تا (ج) به ترتیب ۶۶/۰۸٪، ۶۵/۲۵٪ و ۶۴/۰۶٪ است. این بدان معناست که به ازای افزایش ضریب ارینگن، کاهش فرکانس با باریک‌تر شدن عضو شدت کمتری صورت می‌گیرد. همچنین، در حالتی که تیر روی بستر الاستیک مستقر است. شدت افزایش فرکانس در عضو با ضریب ارینگن بالاتر، بیشتر است. زیرا افزایش پارامتر غیرمحملی سبب نرمی هرچه بیشتر عضو می‌گردد و تاثیر بستر وینکلر روی عضو نرم‌تر بیشتر است. نتیجه‌گیری کلی که می‌توان از این قسمت گرفت اینست که: به ازای تغییرات ضریب باریک شدگی مقطع و سفتی بستر الاستیک، همچنین افزایش ضریب ارینگن، فرکانس ارتعاشی با شدت بیشتری افزایش می‌یابد. اما اگر تاثیر بستر حذف گردد، افزایش ضریب ارینگن باعث کاهش شدت تغییرات فرکانس می‌شود.



شکل ۹: بررسی تغییرات سطح مقطع (حالت دوم)، بستر الاستیک و ضریب ارینگن روی فرکانس ارتعاشی بی بعد

## ۸- نتیجه گیری

در این مقاله، اثرات بستر الاستیک وینکلر در بازه (۰-۱۰۰) و پارامتر غیرمحملی (۰-۴) بر روی فرکانس طبیعی ارتعاش تیر اویلر - برنولی ماهیچه‌ای مورد بررسی قرار گرفته است و تمام نتایج مبتنی بر بازه مذکور می‌باشد. نتایج بدست آمده از این تحقیق را می‌توان به صورت زیر جمع‌بندی کرد:

- روش نیمه تحلیلی بسط سری‌های توانی یک روش کارآمد، دقیق و سریع برای حل معادلات دیفرانسیل با ضرایب متغیر است. در این پژوهش با افزایش تعداد جملات سری به ۳۰ جمله، همگرایی نتایج حاصل گردید. اما در حالت تیر با مقطع متغیر افزایش تعداد جملات سری به ۴۰ نتایج دقیقی را ارائه می‌کند.

\* اثرات مقطع ماهیچه‌ای:

- نتایج نشان می‌دهد که با افزایش ضریب باریک شوندگی  $(\alpha, \beta)$  در هر دو حالت تغییرات خطی و نمایی نیم‌رخ، میزان فرکانس ارتعاشی کاهش می‌یابد که این رفتار به دلیل کاهش سفتی تیر ناشی از کوچک شدن مقطع در طول آن است.
- \* اثرات تئوری الاستیسیته غیرمحلّی ارینگن:
- افزایش پارامتر غیرمحلّی ارینگن باعث کاهش میزان سفتی تیر و در نتیجه کاهش فرکانس طبیعی نانو تیر می‌شود، که این مقدار کاهش برای تیر دو سر مفصل کمتر از یک سر گیردار - یک سر مفصل و دو سر گیردار است.
- مقدار سفتی تیر مقیاس کوچک با شرایط تکیه‌گاهی دو سر مفصل، یک سر گیردار - یک سر مفصل و دو سر گیردار با پارامتر غیرمحلّی نسبت عکس دارد.
- تاثیر پارامتر غیرمحلّی در مودهای بالاتر بسیار بیشتر است و نمی‌توان از اثرات آن چشم‌پوشی نمود.
- در مدل غیرمحلّی فرض می‌شود اتم‌ها بوسیله فنرهای الاستیک به هم متصل شده‌اند و در نتیجه سازه بصورت منعطف‌تری عمل می‌کند، در حالی که در تئوری محلّی سختی فنرها بی‌نهایت است. در نتیجه، مقادیر فرکانس ارتعاشی بدست آمده از تئوری الاستیسیته غیرمحلّی نسبت به تئوری الاستیسیته محلّی (کلاسیک) کوچکتر است.
- \* اثرات بستر الاستیک وینکلر:
- روند تغییرات فرکانس طبیعی بدون بعد نانو تیر منشوری و غیرمنشوری با افزایش سختی بستر الاستیک وینکلر به صورت غیرخطی و صعودی است که این به دلیل تاثیرگذاری مستقیم ثابت فنری وینکلر روی مقدار سفتی تیر و در نتیجه مقدار خیز و فرکانس ارتعاشی سیستم است.
- نتایج بدست آمده نشان دادند که نرخ افزایش فرکانس طبیعی بدون بعد نانو تیر مستقر بر فونداسیون الاستیک بسته به نوع شرایط مرزی، مقدار ضریب باریک شدگی و پارامتر غیرمحلّی متفاوت است.
- در تیرهای منشوری، با افزایش ثابت فنری وینکلر نسبت فرکانس غیرمحلّی به محلّی کاهش می‌یابد.
- نتایج نشان داد که اثر بستر الاستیک وینکلر در بازه  $(0-100)$  بر فرکانس ارتعاشی بدون بعد از تاثیر سایر عوامل مدنظر همچون پارامتر ارینگن  $(0-4)$  و ضریب باریک شدگی مقطع بسیار بیشتر است. به عبارت دیگر در اثر حضور این بستر، تاثیر سایر عوامل مذکور بر رفتار ارتعاش آزاد نانو تیر با مقطع متغیر کمتر می‌شود.
- با افزایش ضریب باریک شدگی و پارامتر ارینگن، نرخ افزایش فرکانس ارتعاشی نسبت به پارامتر سختی بستر افزایش می‌یابد. که این به دلیل تاثیرگذاری بیشتر ثابت فنری وینکلر روی مقدار سفتی (الاستیسیته) نانوتیرهای نرم و منعطف‌تر است.

## مراجع

- [1] Eringen, A.C. (1983), On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *Journal of Applied Physics*, 54, 4703-4710.
- [2] Sundeck, L. (2003), Column Buckling of Multiwalled Carbon Nanotubes Using Nonlocal Continuum Mechanics, *Journal of Applied Physics*, 94 (11), 7281-7287.
- [3] Pisano, A. and Fuschi, P. (2003). Closed Form Solution for a Nonlocal Elastic Bar in Tension. *International Journal of Solids and Structures*, 40 (1), 13-23.

- [4] Wang CM, Zhang YY, He, XQ. (2007). Vibration of nonlocal Timoshenko beams. *Nanotechnology*, 18(10). 105401.
- [5] Reddy, J. (2007). Nonlocal Theories for Bending, Buckling and Vibration of Beams, *International Journal of Engineering Science*, 45(2). 288-307.
- [6] Pradhan, S. C. and Sarkar, A. (2009). Analyses of Tapered Fgm Beams with Nonlocal Theory. *Structural Engineering and Mechanics*, 32(6). 811-833.
- [7] Pradhan S. C and Phadikar JK. (2009). Bending, Buckling and Vibration Analyses of Nonhomogeneous Nanotubes Using GDQ and Nonlocal Elasticity Theory. *Structural Engineering and Mechanics*, 33(2), 193-213.
- [8] Phadikar, J. and Pradhan, S. (2010). Vibrational Formulation and Finite Element Analysis for Nonlocal Elastic Nano beams and Nano plates. *Computational Materials Science*, 49(3), 492-499.
- [9] Civalek, O. Demir, C. (2011). Bending Analysis of Microtubules Using Nonlocal Euler–Bernoulli Beam Theory, *Applied Mathematical Modelling*, 35, 053- 067.
- [10] Rajarshi, Maitra. Supratik, Bose (2012). Post Buckling Behavior of a Nano Beam Considering Both the Surface and Nonlocal Effects, *International Journal of Advancements in Research & Technology*, 1, 1-5.
- [11] Mohammadimehr, M., Salamis, M. Nasiri, H. Afshari, H. (2014), Thermal effect on deflection, critical buckling load and vibration of nonlocal Euler-Bernoulli beam on Pasternak foundation using Ritz method, *Modares Mechanical Engineering Journal*, 13(11), 64-76 (in Persian)
- [12] Rajasekaran, S., & Khaniki, H. B. (2017). “Bending, buckling and vibration of small-scale tapered beams “. *International Journal of Engineering Science*, 120, 172-188.
- [13] Hosseini Hashemi, S., & Bakhshi Khaniki, H. (2017). “Vibration analysis of a timoshenko non-uniform nanobeam based on nonlocal theory: An analytical solution “. *International Journal of Nano Dimension*, 8(1), 70-81.
- [14] Khaniki, H. B., Hosseini-Hashemi, S., & Nezamabadi, A. (2018). “Buckling analysis of nonuniform nonlocal strain gradient beams using generalized differential quadrature method “. *Alexandria engineering journal*, 57(3), 1361-1368.
- [15] Rajasekaran, S., & Bakhshi Khaniki, H. (2019). “Finite element static and dynamic analysis of axially functionally graded nonuniform small-scale beams based on nonlocal strain gradient theory “. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 26(14), 1245-1259.
- [16] Eltaher, M.A. Amal, E. Alshorbagy, F.F. (2013). Vibration Analysis of Euler–Bernoulli Nanobeams by Using Finite Element Method, *Applied Mathematical Modelling*, 37, 4787- 4799.
- [17] Khaniki, H. B., & Hosseini-Hashemi, S. (2017). “Dynamic transverse vibration characteristics of nonuniform nonlocal strain gradient beams using the generalized differential quadrature method “. *The European Physical Journal Plus*, 132(11), 500.
- [18] Hashemi, S. H., & Khaniki, H. B. (2016). “Analytical solution for free vibration of a variable cross-section nonlocal nanobeam“. *International Journal of Engineering-Transactions B: Applications*, 29(5), 688-696.
- [19] Khaniki, H. B., Hashemi, S. H., & Khaniki, H. B. (2018). “Comparison between using generalized differential quadrature method and analytical solution in analyzing vibration behavior of nonuniform nanobeam systems “. *Characterization and Application of Nanomaterials*, 1(2).
- [20] Torabi, K. Dastgerdi, J.N. (2012). An Analytical Method for Free Vibration Analysis of Timoshenko Beam Theory Applied to Cracked Nanobeams Using a Nonlocal Elasticity Model, *Thin Solid Films*, 520(21), 6595-6602.
- [21] Hasani S. M. R., Mahmoudabadi M. (2018), Compare Elastic Modulus of Nanocomposites Reinforced with CNT in Analytical Methods, Finite Element and Equivalent Spring. *Journal of Structural and Constructional Engineering*. 5(3): 108-119. (In Persian)
- [22] Winkler E. “Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkeit”, Prag Dominicus, 1867.
- [23] Eisenberger M and Clastornik J. (1987) “Vibrations and buckling of a beam on a variable Winkler elastic foundation”, *Journal of Engineering Mechanics, Journal of Sound and Vibration*; 115(2): 233-241.
- [24] Fallah A and Aghdam M. M. (2011). “Nonlinear free vibration and post-buckling analysis of functionally graded beams on nonlinear elastic foundation”, *European Journal of Mechanics A/Solids*, 30: 571-583.

- [25] Tsiatas G.C. (2014) "A new efficient method to evaluate exact stiffness and mass matrices of non-uniform beams resting on an elastic foundation", *Archive of Applied Mechanics*. 84: 615–623.
- [26] Soltani M. and Mohri F., Stability and vibration analyses of tapered columns resting on one or two-parameter elastic foundations, *Numerical methods in civil engineering*, 2 (2016) 57-66.
- [27] A. Shahba, R. Attarnejad, M. Tavanaie Marvi, S. Hajilar, "Free vibration and stability analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beams with classical and non-classical boundary conditions", *Composite: Part B* 42 (4): 801-808, (2011).
- [28] Shvartsman B. and Majak J. (2016) "Numerical method for stability analysis of functionally graded beams on elastic foundation", *Applied Mathematical Modelling*, 44: 3713–3719.
- [29] Hasani S. M. R., Mahmoudabadi M., Danaei R. (2018) Investigating effect of boundary conditions on columns' buckling. *Journal of Structural and Constructional Engineering*. 5(1): 143-156. (In Persian)
- [30] Khaniki, H. B., & Hashemi, S. H. (2017). Free vibration analysis of nonuniform microbeams based on modified couple stress theory: an analytical solution. *International Journal of Engineering-Transactions B: Applications*, 30(2), 311-320.
- [31] Shafiei, N., Kazemi, M., Safi, M., & Ghadiri, M. (2016). Nonlinear vibration of axially functionally graded non-uniform nanobeams. *International Journal of Engineering Science*, 106, 77-94.
- [32] Ebrahimi, F., & Dashti, S. (2015). Free vibration analysis of a rotating non-uniform functionally graded beam. *Steel and Composite Structures*, 19(5), 1279-1298.
- [33] Al-Sadder S. Z., Exact expression for stability functions of a general non-prismatic beam-column member, *Journal of Constructional Steel Research*. 60 (2004) 1561-84.
- [34] Asgarian B., Soltani M., Mohri F. (2013) "Lateral-torsional buckling of tapered thin-walled beams with arbitrary cross-sections". *Thin-Walled Structures*, 62: 96–108.
- [35] Soltani M, Asgarian B and Mohri F. (2014) "Elastic instability and free vibration analyses of tapered thin-walled beams by the power series method", *Journal of Constructional Steel Research*, (96):106-126.
- [36] Soltani M. (2017), "Vibration characteristics of axially loaded tapered Timoshenko beams made of functionally graded materials by the power series method", *Numerical Methods in Civil Engineering*; 2(1): 1-14.
- [37] Soltani M., Asgarian B. (2019) "Finite element formulation for linear stability analysis of axially functionally graded non-prismatic Timoshenko beam". *International Journal of Structural Stability and dynamics*, 19(2): 1950002 (33 pages).
- [38] Ghannadpour S.A.M., Mohammadi B. Fazilati, J. (2013). Bending, Buckling and Vibration Problems of Nonlocal Euler Beams Using Ritz Method, *Composite Structures*, 96, 584-589.
- [39] MATLAB Version 7.6. MathWorks Inc, USA, 2008.
- [40] Liew, K. M., He, X. Q., & Kitipornchai, S. (2006), "Predicting nanovibration of multi-layered graphene sheets embedded in an elastic matrix". *Acta Materialia*., vol. 54, 4229–4236.
- [41] Murmu, T., & Pradhan, S. C. (2009). "Buckling analysis of a single-walled carbon nano-tube embedded in an elastic medium based on nonlocal elasticity and Timoshenko beam theory and using DQM". *Physica E*., vol. 4, p. 1232–1239.
- [42] Khajeansari A., Baradaran G.H., Yvonnet J. (2012) "An explicit solution for bending of nanowires lying on Winkler–Pasternak elastic substrate medium based on the Euler–Bernoulli beam theory". *International Journal of Engineering Science*., vol. 52, p. 115–128.
- [43] Soltani, M., & Asgarian, B. (2019) "New hybrid approach for free vibration and stability analyses of axially functionally graded Euler-Bernoulli beams with variable cross-section resting on uniform Winkler-Pasternak foundation". *Latin American Journal of Solids and Structures*, 16(3).