

تحلیل مودال تیرهای بتن آرمه دارای ترک با استفاده از یک تکنیک جدید مبتنی بر

روش اجزای محدود

علی علی جانی^۱، مرتضی خمایی ابدی^۲، جواد رزاقی^{۳*}

۱- استادیار گروه مهندسی مکانیک، واحد بندرانزلی، دانشگاه آزاداسلامی، بندرانزلی، ایران

۲- کارشناس ارشد گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی، دانشگاه گیلان، رشت، ایران

۳- استادیار گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی، دانشگاه گیلان، رشت، ایران

چکیده

در این مقاله، فرکانس‌های دو مود اول تیرهای بتن آرمه‌ی دارای ترک با استفاده از روش اجزای محدود بررسی می‌شود. مدل‌سازی ترک در تحقیق حاضر، بر مبنای شرایط پیوستگی، اصلاح گشتاور دوم سطح و تعیین ضریب شدت تنش در نقطه‌ی ترک انجام می‌گیرد. در این مطالعه، ترک در مود اول شکست (بازشدگی)، با یک فنر پیچشی متناظر، معادل می‌گردد. ضریب سختی این فنر به صورت تابعی از مولفه-ی ضریب شدت تنش، مشخصات هندسی و مادی سطح مقطع ترک‌خورده استخراج می‌شود. در روش حاضر، ماتریس‌های سختی و جرم المان دارای ترک با استفاده از ماتریس‌های تبدیل مستخرج از اعمال شرایط پیوستگی در محل ترک، غنی‌سازی می‌گردند. با جایگذاری ماتریس‌های سختی و جرم اصلاح شده در معادله‌ی مقدار ویژه، فرکانس‌های طبیعی تیر دارای ترک تعیین می‌شوند. در این تحقیق، تاثیر مکان و عمق‌های مختلف ترک در شرایط مرزی متفاوت بر روی مودهای اول و دوم ارتعاش بررسی می‌شود. مقایسه و صحت‌سنجی نتایج فرکانس طبیعی تیر بتن آرمه‌ی دارای ترک با نتایج تحقیقات آزمایشگاهی مراجع معتبر و شبیه‌سازی کامل در نرم افزار آباکوس، نشان دهنده‌ی صحت و دقت مناسب روش حاضر برای تحلیل مودال تیرهای بتن آرمه‌ی دارای ترک می‌باشد. این مقایسه به وضوح دقت روش پیشنهادی برای تعیین فرکانس طبیعی تیرهای بتن آرمه‌ی دارای ترک را نشان می‌دهد.

کلمات کلیدی: تحلیل مودال، تیرهای بتن آرمه، ترک، روش اجزای محدود، فنر پیچشی

سابقه مقاله:

شناسه دیجیتال:

شناسه دیجیتال:	سابقه مقاله:				
doi:	چاپ	انتشار آنلاین	پذیرش	بازنگری	دریافت
10.22065/JSCE.2018.127880.1535					
10.22065/JSCE.2018.127880.1535	۱۳۹۹/۰۱/۱۵	۱۳۹۹/۰۱/۱۵	۱۳۹۷/۰۹/۰۷	۱۳۹۷/۰۷/۲۵	۱۳۹۷/۰۲/۰۴

*نویسنده مسئول:

پست الکترونیکی:

جواد رزاقی
javadr@guilan.ac.ir

A new technique in the modal analysis of cracked reinforced concrete (RC) beams through the finite element method

Ali Alijani¹, Morteza Khomami Abadi², Javad Razzaghi^{*3}

¹ Department of Mechanical Engineering, Bandar Anzali Branch, Islamic Azad University, Bandar Anzali, Iran

² Civil Engineering, Faculty of Engineering, University of Guilan, Rasht, Iran

³ Civil Engineering, Faculty of Engineering, University of Guilan, Rasht, Iran

ABSTRACT

In this paper, the natural frequency of the cracked reinforced concrete (RC) beams in the first and second modes are investigated using the finite element method. In this research, the modelling of the crack is made based on continuity conditions, the correction of the moment of inertia and considering the stress intensity factor (SIF) at the crack point. In this study, the crack in opening mode is corresponded to a rotational spring. The stiffness factor of the spring is derived as a function in terms of the stress intensity factor and geometric and material characteristics of a cracked cross-section. In the present technique, the stiffness and mass matrices of a cracked element are enriched using convert matrices obtained by applying continuity conditions in the crack point. Natural frequencies of the cracked reinforced concrete Euler-Bernoulli beam are determined by inserting enriched stiffness and mass matrices in the eigenvalue equation. The effect of different depths and positions of crack and various boundary conditions are studied on the first and second vibration modes. A comparison between the results of the present work with experimental results and fully simulation in Abaqus clearly demonstrates the accuracy of the proposed technique in the determination of the natural frequency of the cracked reinforced concrete beams.

ARTICLE INFO

Receive Date: 24 April 2018

Revise Date: 17 October 2018

Accept Date: 28 November 2018

Keywords:

Modal Analysis, Reinforced concrete beam, Crack, Finite element method, Rotational spring

All rights reserved to Iranian Society of Structural Engineering.

10.22065/JSCE.2018.127880.1535

*Corresponding author: Javad Razzaghi.

Email address: javadr@guilan.ac.ir

۱- مقدمه

تحلیل و مدل سازی ترک در سازه های بتن آرمه به دلیل تخریب ذاتی و رفتار شبه ترد بتن در مقابل تنش های کششی ناشی از بارگذاری، به شدت حائز اهمیت است. از این رو برای کاهش خسارات احتمالی، بررسی عملکرد و شناخت دقیق رفتار این سازه ها، ضروری به نظر می رسد. شناخت و بررسی عوامل مخرب و نحوه ی عملکرد آن ها امکان پذیر نخواهد بود، مگر آنکه مدل ها و روش های تحلیلی، عددی و عملی دقیقی از رفتار سازه در دسترس باشد. از این رو، ارائه ی روش هایی که بتواند تخمین و تقریبی درست از عملکرد سازه ها، قبل و بعد از ایجاد و گسترش ترک ارائه نماید، همواره مورد نظر محققین بوده است که در اینجا برخی از آنها ارائه می شود.

کاربرد روش اجزای محدود در تحلیل سازه های بتن مسلح اولین بار در سال ۱۹۶۷ توسط نگو و اسکوردلیس [۱] انجام گردید. در ادامه یک برنامه رایانه ای برای بررسی رفتار یک قاب بتن آرمه دارای ترک توسط کریشنامورتی و پانسلووم [۲] ارائه شده است. سپس زندک و بیونگ [۳] با استفاده از روش های پیشین، یک مدل تحلیلی بر مبنای تعیین تنش های سازه، برای محاسبه میزان خیز تیرهای بتن آرمه ی دارای ترک ارائه کردند. از آنجایی که رفتار غیرخطی این سازه ها نقش ویژه ای در تحلیل های استاتیکی و دینامیکی دارد، هو و ویلیام [۴] یکی از اولین مطالعات را پیرامون تحلیل غیرخطی سازه های بتن آرمه ی دارای ترک در سال ۱۹۸۹ انجام دادند. یک مدل مناسب و کارا برای مدل سازی تیرهای بتن آرمه، استفاده از مدل فنر پیچشی است. این روش قابل تعمیم برای مدل سازی ترک در سازه های با بتن الیافی و مقاوم شده با ورق های کامپوزیتی است، که توسط کراوچزوک و استاچوویکز [۵] ارائه شده است. در این روش با تعیین ضرایب شدت تنش، میزان سختی فنر پیچشی تعیین و اصلاح می شود. با پیشرفت علم، بسیاری از روش های عددی مبتنی بر مدل سازی رایانه ای نظیر [۸-۶] برای تحلیل رفتار ترک در سازه های بتن آرمه گسترش یافته است. استفاده از فنر پیچشی به منظور مدل سازی ناپیوستگی ها، برای اولین بار توسط ایروین [۹] مورد استفاده قرار گرفت. پس از آن بسیاری از محققان به بررسی رابطه ی بین عمق ترک و سختی فنر پیچشی پرداختند تا اینکه سرانجام دیماروگوناتس و پاپادیلوس [۹] توانستند رابطه ای بین سختی فنر پیچشی و عمق ترک، ارائه کنند. در راستای کاربردهای این روش، اوکامورا و همکارانش [۱۰] با استفاده از فنر پیچشی رفتار یک ستون دارای ترک با مقطع مستطیلی را بررسی کردند. ریزوس و همکاران [۱۱] با استفاده از مدل فنر، تأثیر ترک و عمق آن را بر روی شکل مود و فرکانس های طبیعی تیر، مورد مطالعه قرار دادند. در یک تحقیق کاربردی، رفتار شکست دینامیکی در پل های بتنی با استفاده از مدل فنر پیچشی، توسط لاو و ژاو [۱۲] ارائه شده است. همچنین در تحقیقی دیگر که توسط لی [۱۳] انجام شده است، به شناسایی ترک خوردگی و مدل سازی آن با استفاده از مدل فنر پیچشی پرداخته شده است. در ادامه، یوکویاما، رزاقی و همکاران و رایس و ویولا [۱۶-۱۴] به ترتیب، با استفاده از ضرایب شدت تنش، میزان سختی فنر پیچشی را برای مدل سازی ترک در تیرهای با مقطع مستطیلی، مستطیلی بتن آرمه، T شکل و ستون ها، تعیین کردند. در یکی از جدیدترین تحقیقات در حوزه ی مدل سازی ترک، علی جانی و همکاران [۱۷] با استفاده از فنرهای پیچشی و فنر خطی و به کمک سه روش تحلیلی، عددی و تقریبی، تیر اویلر برنولی دارای ترک روی بستر الاستیک را مورد تحلیل و بررسی قرار دادند.

به دلیل پیچیدگی های بسیار زیاد تحلیل سازه ها تحت بارگذاری های مختلف، فرض استاتیکی ماندن رفتار سازه در بسیاری از مواقع دور از انتظار است. در نتیجه پیاده سازی سایر روش های تحلیل، نظیر تحلیل مودال و دینامیکی، در توجیه رفتار سازه های دارای ترک، ضروری به نظر می رسد. در این راستا، مجموعه ای از مطالعات جامع روی تحلیل مودال تیرها توسط لیزا و کاتو [۱۸]، راثو [۱۹] و لوگان [۲۰] ارائه شده است. در دیگر مطالعه، رفتار ارتعاشی تیرهای ترک خورده، با استفاده از مشخصات ارتعاشی تیر اویلر-برنولی روی بستر الاستیک، در مرجع [۲۱] بررسی شده است. در همین راستا رفتار دینامیکی یک تیر ترک خورده توسط گودمانسون [۲۲] تحلیل گردید. همچنین یک مدل ارتعاشی با استفاده از فنر پیچشی، برای تحلیل تیر دارای ترک توسط چادوهاری و مایتی [۲۳] ارائه گردید. یکی از کاربردهای اساسی تحلیل مودال و تعیین مقادیر فرکانس های طبیعی، تخمین محل، ابعاد و زاویه ی ترک است. در این راستا، اثرات شکست و آسیب دیدگی روی میزان انعطاف پذیری سازه توسط پاندی و بیسواس [۲۴] مورد بررسی قرار گرفت؛ که در آن با استفاده از تعیین ماتریس انعطاف پذیری در تحلیل مودال، روشی برای تعیین محل ترک خوردگی پیشنهاد و ارائه شده است. در ادامه ل و مایتی [۲۵] با استفاده از اندازه گیری

فرکانس‌های طبیعی تیر تیموشنکو دارای ترک که با یک فنر پیچشی مدل‌سازی شده بود، روش دیگری برای تخمین محل ترک پیشنهاد و ارائه کردند. در ادامه، یک تحلیل مودال بر مبنای روش آزمایشگاهی روی یک تیر دارای ترک توسط سیلویا و گومز [۲۶] انجام شده است. در این تحلیل فرکانس‌های طبیعی در تیر دوسر آزاد ترک‌خورده با تغییر در محل و عمق ترک استخراج می‌شود. علاوه بر تعیین محل ترک، از دیگر کاربردهای تحلیل مودال، تعیین فرکانس‌های طبیعی برای تعیین ابعاد ترک به روش غیرمخرب می‌باشد که توسط کیم و استابس [۲۷] ارائه شده است. در یک تحقیق کاربردی، اثرات ابعاد ترک و محل ترک روی فرکانس‌های طبیعی تیر اویلر-برنولی و تیموشنکو دارای ترک با استفاده از روش انرژی توسط اسوامیداس و همکاران [۲۸] ارزیابی شده است. در همین راستا بررسی عملکرد ترک در یک تحلیل مودال توسط دابلینگ [۲۹] مورد بررسی قرار گرفت و تغییرات مودهای فرکانسی با تغییرات محل و عمق ترک از مراجع [۳۰-۳۲] استخراج گردید. در ادامه، یک روش تحلیلی و آزمایشگاهی برای تعیین محل ترک در تیر یکسر گیردار تحت ارتعاش توسط رادکلیف [۳۳] ارائه شده است. به منظور ارزیابی تأثیرات چندین ترک روی رفتار ارتعاشی سازه، یک تیر یکسر گیردار با چند ترک از نوع بازشونده، تحت تحلیل مودال قرار گرفته و اثرات ترک روی مقادیر فرکانس‌های طبیعی توسط استاچوویکز و کراوکزوک [۳۴] بررسی گردید. در همین راستا شکل مود و مقادیر ویژه فرکانس طبیعی برای تیرهایی با چند ترک تحت اثر نیروی محوری بر اساس تئوری‌های مکانیک شکست، توسط بینیکی [۳۵] محاسبه و ارائه شده است. به طور کلی مدل‌سازی ترک به کمک تئوری‌های مکانیک شکست، با دو روش هندسی و غیر هندسی انجام می‌شود. در مدل‌سازی هندسی، ترک در ابعاد و هندسه‌ای مشخص توسط یک ضعف هندسی در المان‌های سازه ایجاد شده و پارامترهای رفتاری آن، نظیر جبهه ترک^۱، زاویه ترک، مسیر و انرژی رشد ترک و ... معرفی می‌شود. برخی از پرکاربردترین روش‌های مدل‌سازی ترک در این حوزه روش کانتور انتگرال و روش اجزای محدود توسعه یافته می‌باشد. در روش هندسی المان‌ها در محل ترک بریده شده و بازشدگی یا رشد ترک، با توجه به معیارهای انرژی و تعیین ضریب شدت تنش مدل‌سازی می‌شود. روش دیگر برای مدل‌سازی ترک، روش‌های غیرهندسی نظیر مدل ترک‌پخشی است. به طور کلی در روش‌های مدل‌سازی غیر هندسی ترک، دو گام اصلی وجود دارد: گام اول تعیین محل رخداد ترک اولیه و گام دوم تخمین مسیر ترک و جایگزینی آن با یک المان نرم تر است [۳۶]. این روش بر پایه یک مش المان محدود ثابت استوار است و رشد مرحله‌ای ترک نیاز به مش‌بندی مجدد دارد. در این روش ترک زمانی رخ می‌دهد که تنش به حد تنش خرابی برسد و زمانیکه اولین ترک ایجاد شد؛ مکان ترک ذخیره می‌شود و به دنبال آن مسیر ترک پیش بینی می‌گردد. با داشتن مسیر ترک، به جای قرار دادن سختی واقعی مصالح در مسیر ترک خورده، از المان‌هایی با سختی کمتر (نرم تر) استفاده می‌شود [۳۷].

در مقاله‌ی حاضر، تحلیل مودال تیرهای بتن‌آرمه‌ی دارای ترک با استفاده از مدل‌سازی به کمک یک فنر پیچشی به روش اجزای محدود انجام می‌شود. در این تحقیق رفتار ارتعاشی تیر بتن‌آرمه‌ی دارای ترک، تحت ارتعاش آزاد در سه شرایط مرزی دو سر ساده، دو سر گیردار و یکسر آزاد مورد تحلیل و بررسی قرار می‌گیرد. به طوریکه اثرات تغییر محل و عمق ترک روی فرکانس‌های طبیعی و اشکال مودی تیر تحقیق می‌شود. در روش اجزای محدود، مدل‌سازی آرماتورها با استفاده از اصلاح ممان اینرسی مقاطع کامل و ترک‌خورده و اصلاح مقدار ضریب شدت تنش انجام می‌شود. در پژوهش حاضر، مدل‌سازی ترک به صورت هندسی و با استفاده از روش کانتور انتگرال در نرم افزار آباکوس و همچنین به کمک ایجاد یک ضعف هندسی و وارد کردن مدل فنر پیچشی و استخراج معادلات بر پایه‌ی روش اجزای محدود انجام شده است. مدل‌سازی تیر بتن‌آرمه در نرم افزار آباکوس به صورت سه بعدی و با استفاده از قید محاط شده^۲ برای میلگردهای طولی و عرضی انجام می‌گردد. در اینجا، به دلیل استفاده از معادلات پایه اجزای محدود خطی برای مدل‌سازی ترک، از رفتار غیرخطی بتن صرف نظر شده و مدل‌سازی مادی و هندسی مصالح در نرم افزار آباکوس در محدوده خطی در نظر گرفته می‌شود. در این پژوهش مود اول شکست (بازشدگی) مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته و در نهایت نتایج حاصل از روش اجزای محدود ارائه شده با نتایج حاصل از شبیه‌سازی رایانه‌ای در نرم افزار آباکوس و نتایج مراجع معتبر [۳۸] و [۳۹] مقایسه و صحت‌سنجی می‌گردد. در تحقیق حاضر با استفاده از چارچوب روش عددی مقاله‌ی [۱۷]، تحلیل مودال جایگزین تحلیل استاتیکی شده و فرکانس‌های طبیعی تیر بتن‌آرمه استخراج می‌گردد. همچنین

^۱ Crack front^۲ Embedded Constraint

ویژگی‌های مادی و هندسی تیر بتن آرمه، به ترتیب با در نظر گرفتن شرایط مادی بتن و فولاد و همچنین اصلاح ممان اینرسی مقطع سالم و ترک‌دار، مدل‌سازی شده است که از جنبه‌های تمایز مطالعه حاضر با تحقیقات پیشین محسوب می‌شود.

۲- فرضیات و روش‌های تحلیل

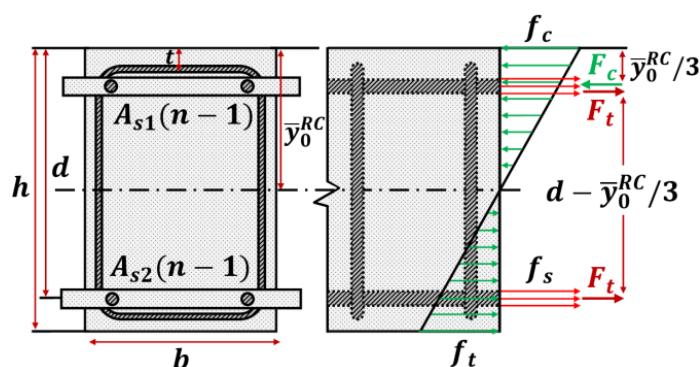
در این تحقیق معادلات پایه‌ای تیرها با صرف نظر کردن از اثرات نیروی برشی و اینرسی دورانی بر مبنای تئوری تیر اویلر-برنولی استخراج شده است. در این روش از المان‌های یک‌بعدی و توابع شکل هرمیتی مطابق با مرجع [۱۷] استفاده شده است. در روش حاضر ماتریس سختی المان‌های تیر بدون ترک خوردگی با استفاده از معادله‌ی انرژی پتانسیل مطابق رابطه (۱-۱) به صورت زیر تعیین می‌گردد.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{l_e} E_c I_0^{RC} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^T \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx, w = [N]u \quad (1-1)$$

$$K_{St} = E_c I_0^{RC} \int_0^{l_e} [N'']^T [N''] dx \quad (1-2)$$

که در آن‌ها، U انرژی کرنشی، l_e طول المان ترک‌دار، E_c مدول الاستیسیته بتن، I_0^{RC} گشتاور دوم سطح مقطع کامل (ترک نخورده)، w جابجایی گره‌ها، x محور طولی، N تابع شکل، u بردار جابجایی بر حسب گره‌های اصلی، K_{St} ماتریس سختی تیر بتن آرمه اویلر-برنولی استاندارد، تعریف می‌شود.

با توجه به آنکه سختی المان به صورت تابعی از ممان اینرسی مقطع تعریف می‌گردد. در نتیجه با توجه به شکل (۱) تغییرات محل تار خنثی و ممان اینرسی ناشی از آرماتورهای طولی در تیر بتن آرمه‌ی بدون ترک به صورت رابطه‌ی (۱-۲) تعریف می‌گردد.



شکل ۱: مقطع تبدیل یافته استاندارد تیر بتن آرمه

$$\bar{y}_0^{RC} = \frac{bh \left(\frac{h}{2} \right) + [A_{s1}(n-1)d] + [A_{s2}(n-1)t]}{bh + [(n-1)(A_{s1} + A_{s2})]} \quad (2-1)$$

$$I_0^{RC} = \frac{bh^3}{12} + bh \left(\frac{h}{2} - \bar{y}_0^{RC} \right)^2 + A_{s1}(n-1)(d - \bar{y}_0^{RC})^2 + A_{s2}(n-1)(\bar{y}_0^{RC} - t)^2 \quad (2-2)$$

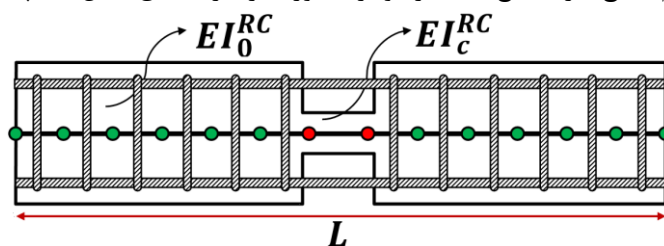
که در آن‌ها، \bar{y}_0^{RC} محل تارخنثی مقطع کامل (بدون ترک) تیر بتن آرمه، b ضخامت تیر، h ارتفاع تیر، A_{s1} و A_{s2} به ترتیب مساحت سطح مقطع میلگردهای فوقانی و تحتانی، d فاصله میلگردهای طولی تا دورترین تار فشاری بتن، t فاصله میلگرد تا سطح خارجی بتن (کاور)، تعریف می‌شود. همچنین مدول الاستیسیته مقطع بتن آرمه به صورت مدول الاستیسیته معادل بتن (مقطع تبدیل یافته)، مطابق رابطه‌ی زیر تعیین می‌گردد.

$$E_c = (3300\sqrt{f_c} + 6900)(\gamma_c/23)^{3/2} \quad (3-1)$$

$$n = E_s/E_c \quad (3-2)$$

که در آن، f_c مقاومت فشاری بتن، γ_c وزن مخصوص بتن و E_s مدول الاستیسیته فولاد تعریف می‌شود.

در این تحقیق از ضرایب شدت تنش به عنوان معیاری برای مدل سازی ترک استفاده شده است. به طور کلی این روش بر اساس تغییرات انرژی کرنشی و تغییرات گشتاور دوم سطح، در مقاطع استاندارد و ترک خورده از تیر، مطابق شکل (۲) پایه ریزی می شود.



شکل ۲: المان بندی تیر بتن آرمه دارای ترک میانی

در این روش، ترک با یک ضعف هندسی معادل با عمق ترک در نظر گرفته می شود. مدول خمشی تیر با توجه به محل قرارگیری و ابعاد آرماتورها در دو مقطع کامل و دارای ترک مطابق شکل (۳) اصلاح و ارائه می گردد. در روش حاضر، انرژی آزاد شده بر اساس روابط پیشنهاد شده توسط اروین و کایس [۴۰] و یوکویاما [۲۱] به مقدار ضریب شدت تنش مرتبط می شود. این ضریب برای تیر بتن آرمه با مقطع مستطیلی تحت خمش خالص به صورت رابطه ی (۴-۱) و (۴-۲) و (۴-۳) به دست می آید.

$$K_{IM} = M(x) \sqrt{\frac{1}{b} \left(\frac{1}{I_0^{RC}} - \frac{1}{I_c^{RC}} \right)} \quad [۴۰] \quad (۴-۱)$$

$$K_{IM} = \frac{6M}{bh^2} \sqrt{\pi a} F_M(\xi) \quad \text{for } 0 \leq \xi \leq 0.6, \quad \xi = \frac{a}{h} \quad [۲۱] \quad (۴-۲)$$

که در آن

$$F_M(\xi) = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi \xi} \right) \tan \frac{\pi \xi}{2} \frac{0.923 + 0.199 [1 - \sin(\frac{\pi \xi}{2})]^4}{\cos(\frac{\pi \xi}{2})}} \quad [۲۱] \quad (۴-۳)$$

روابط فوق علی رغم دقت مناسب، در عمق های ترک بیشتر از ۰٫۶ ارتفاع تیر، پاسخ دقیقی برای ضریب شدت تنش ارائه نمی کنند. رابطه ی ضریب شدت تنش برای عمق های ترک بیشتر از ۰٫۶ ارتفاع تیر، به صورت رابطه (۴-۴) ارائه می شود.

$$K_{IM} = \frac{3.99M}{bh\sqrt{h}\sqrt{(1-\xi)^3}} \quad \text{for } 0.6 < \xi < 1.0 \quad [۲۱] \quad (۴-۴)$$

با استفاده از روابط فوق، سختی فنر پیچشی به صورت تابعی از ضریب شدت تنش مطابق با رابطه (۴-۵) تعریف می شود.

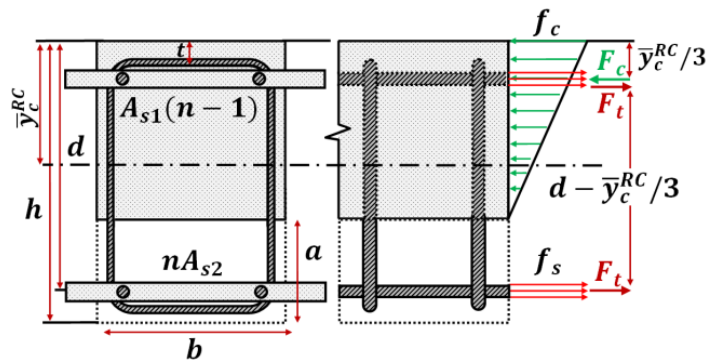
$$\frac{1}{k_{sp}} = \frac{2b(1-\nu^2)}{E} \int_0^a \left(\frac{K_{IM}}{M} \right)^2 da \quad (۴-۵)$$

که در آن، K_{IM} ضریب شدت تنش، M ممان خمشی و I_c^{RC} مطابق شکل (۳) به صورت گشتاور دوم سطح در مقطع ترک خورده بتن آرمه تعریف شده و مقدار آن از روابط زیر استخراج می گردد.

$$\bar{y}_c^{RC} = \frac{Y_1/2}{nA_{s1} + nA_{s2} - ab + bh - A_{s1} - A_{s2}} \quad (۵-۱)$$

$$Y_1 = 2nA_{s1}d + 2nA_{s2}t + a^2b - 2abh + bh^2 - 2A_{s1}d - 2A_{s2}t \quad (۵-۲)$$

$$I_c^{RC} = \frac{b(h-a)^3}{12} + b(h-a) \left(\frac{(h-a)}{2} - \bar{y}_c^{RC} \right)^2 + A_{s2}n(d - \bar{y}_c^{RC})^2 + A_{s1}(n-1)(\bar{y}_c^{RC} - t)^2 \quad (5-3)$$



شکل ۳: مقطع تبدیل یافته تیر بتن آرمه دارای ترک

که در آن، \bar{y}_c^{RC} محل تارخشی در مقطع تیر بتن آرمه ترک دار، Y_1 متغیر تعریف شده و a طول ترک نامگذاری می شود.

۳- فرمول بندی تحلیل مودال بر مبنای روش اجزای محدود

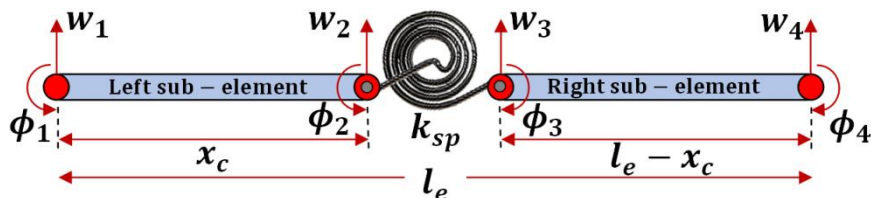
در تحلیل مودال، فرکانس های طبیعی تیر بتن آرمه ی دارای ترک بر اساس اصول اجزای محدود از معادله ی مقدار ویژه زیر استخراج می گردد.

$$|K_{st+c}^{RC} - \omega^2 M_{st+c}^{RC}| = 0 \quad (6)$$

که در آن K_{st+c}^{RC} و M_{st+c}^{RC} به ترتیب ماتریس سختی و جرم سرهم شده ی تیر با در نظر گرفتن اثرات ترک و تغییرات ناشی از حضور آرماتورها و ω فرکانس طبیعی است.

۳-۱- استخراج ماتریس سختی المان دارای ترک

ماتریس سختی المان های بدون ترک، مطابق ماتریس سختی استاندارد، بر مبنای تئوری تیر اویلر-برنولی و با در نظر گرفتن اثرات آرماتورها، مطابق رابطه ی (۲-۱) به دست می آید. در اینجا به منظور استخراج ماتریس سختی المان دارای ترک، روشی بر مبنای بهبود روش اجزای محدود [۱۷] برای مدل سازی ناپیوستگی ها و ترک خوردگی به کار گرفته می شود. در این روش، المان دارای ترک مطابق شکل (۴) با دو ریز المان و یک فنر پیچشی معادل سازی می شود.



شکل ۴: مدل سازی المان دارای ترک با استفاده از فنر پیچشی

در شکل (۴)، w_{1-4} میزان خیز گره های المان، ϕ_{1-4} میزان دوران گره های المان، x_c محل ترک در المان و k_{sp} سختی فنر پیچشی، تعریف می شود.

در اینجا ضمن بازنویسی معادلات پیوستگی در محل ترک و وارد نمودن تأثیر سختی فنر پیچشی، مشاهده می شود که تغییرات شیب در گره های ۲ و ۳ برابر نبوده و شیب در گره ی ۲ به صورت تابعی از ضریب سختی فنر مطابق رابطه ی (۷-۱) بیان می شود.

$$w_2'(x_0) + \psi(w_2''(x_0)) = w_3'(0) \quad (7-1)$$

که در آن، ψ نسبت مدول خمشی به سختی فنر تعریف شده و به صورت معادله (7-2) ارائه می‌شود.

$$\psi = \frac{E_c I_0^{RC}}{k_{sp}} \quad (7-2)$$

برای محاسبه‌ی سختی المان دارای ترک، علاوه بر تعیین یک ماتریس سختی برای هر ریز المان، لازم است که میزان سختی فنر پیچشی برحسب عمق ترک مشخص شود. در نتیجه ماتریس سختی المان ترک‌خورده به صورت مجموع سه ماتریس سختی تعریف می‌شود. که برای محاسبه‌ی هر کدام از آن‌ها از قوانین انرژی استفاده می‌گردد.

$$U_c = U_L + U_R + U_s \quad (8)$$

که در آن، U_s, U_R, U_L, U_c به ترتیب انرژی کرنشی المان دارای ترک، انرژی کرنشی ریز المان سمت چپ، انرژی کرنشی ریز المان سمت راست و انرژی کرنشی فنر تعریف می‌شود.

انرژی کرنشی ریز المان سمت چپ و راست فنر پیچشی با استفاده از تعیین معادله‌ی خیز بر حسب توابع شکل هرمیتی و جایگذاری آن‌ها در معادله‌ی پایه‌ی انرژی مطابق روابط (9-1) و (9-2) تعیین می‌شود.

$$U_L = \frac{1}{2} \{u_L\}^T [k_L] \{u_L\} \quad (9-1)$$

$$U_R = \frac{1}{2} \{u_R\}^T [k_R] \{u_R\} \quad (9-2)$$

که در آن

$$\{u_L\}^T = \{w_1 \phi_1 w_2 \phi_2\} \quad (10-1)$$

$$\{u_R\}^T = \{w_3 \phi_3 w_4 \phi_4\} \quad (10-2)$$

نهایتاً ماتریس سختی ریز المان سمت چپ مطابق رابطه (11) ارائه می‌شود.

$$k_L^{RC} = \frac{E_c I_c^{RC}}{x_c^3} \begin{bmatrix} 12 & 6x_c & -12 & 6x_c \\ 6x_c & 4x_c^2 & -6x_c & 2x_c^2 \\ -12 & -6x_c & 12 & -6x_c \\ 6x_c & 2x_c^2 & -6x_c & 4x_c^2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

به‌طور مشابه با جایگذاری $l_e - x_c$ به جای x_c در معادله‌ی (11) ماتریس سختی ریز المان سمت راست (k_R^{RC}) تعیین می‌گردد.

برای سرهم کردن ماتریس سختی ریز المان‌ها، انرژی کرنشی محاسبه شده بر حسب جایجایی گره‌های ریز المان (گره‌های ۲ و ۳)، توسط ماتریس‌های انتقال $C_{L(R)}$ ، بر حسب جایجایی گره‌های ریز المان پایه (گره‌های ۱ و ۴) مطابق رابطه‌ی (12) بازنویسی و ارائه می‌شود.

$$u_{L(R)} = C_{L(R)} u \quad (12)$$

که در آن ماتریس تبدیل برای ریز المان سمت چپ و راست ($C_{L(R)}$) به صورت زیر ارائه می‌گردد.

$$C_{L(R)} = \begin{bmatrix} C_{L(R)}^{11} & C_{L(R)}^{12} & C_{L(R)}^{13} & C_{L(R)}^{14} \\ C_{L(R)}^{21} & C_{L(R)}^{22} & C_{L(R)}^{23} & C_{L(R)}^{24} \\ C_{L(R)}^{31} & C_{L(R)}^{32} & C_{L(R)}^{33} & C_{L(R)}^{34} \\ C_{L(R)}^{41} & C_{L(R)}^{42} & C_{L(R)}^{43} & C_{L(R)}^{44} \end{bmatrix} \quad (13)$$

درایه‌های ماتریس تبدیل فوق در بخش اول و دوم ضمیمه آورده شده است.

با جایگذاری رابطه‌ی (۱۲) در روابط محاسبه‌ی انرژی کرنشی ریز المان‌ها (روابط ۹)، انرژی کرنشی ریز المان سمت چپ و راست برحسب گره‌های المان پایه به صورت رابطه (۱۴) محاسبه می‌شود.

$$U_{L(R)} = \frac{1}{2} \{u\}^T [C_{L(R)}]^T [k_{L(R)}^{RC}] [C_{L(R)}] \{u\} \quad (14)$$

در اینجا به منظور محاسبه‌ی انرژی فنر پیچشی، رابطه (۱۵) برحسب میزان دوران در دو طرف فنر پیچشی ارائه می‌شود.

$$U_s = \frac{1}{2} k_s \Delta \phi^2 = \frac{1}{2} k_s (\phi_3 - \phi_2)^T (\phi_3 - \phi_2) \quad (15)$$

بدین ترتیب، میزان دوران گره‌های دو طرف فنر پیچشی (گره‌های ۲ و ۳) با استفاده از ماتریس تبدیل ارائه شده، بر حسب دوران نقاط گره‌های المان پایه بازنویسی و ارائه می‌شوند.

$$\phi_2 = \{C_L^{41} \ C_L^{42} \ C_L^{43} \ C_L^{44}\} u \quad (16-1)$$

$$\phi_3 = \{C_R^{21} \ C_R^{22} \ C_R^{23} \ C_R^{24}\} u \quad (16-2)$$

با جایگذاری روابط فوق در رابطه (۱۵)، انرژی کرنشی فنر پیچشی مطابق رابطه (۱۷) ارائه می‌گردد.

$$U_s = \frac{1}{2} \{u\}^T k_s \{C_M\}^T \{C_M\} \{u\} \quad (17)$$

که در آن

$$\{C_M\} = \{C_R^{21} - C_L^{41} \ C_R^{22} - C_L^{42} \ C_R^{23} - C_L^{43} \ C_R^{24} - C_L^{44}\} \quad (18)$$

نهایتاً ماتریس سختی اصلاح‌شده‌ی ریز المان‌های سمت چپ و راست و فنر پیچشی به ترتیب برابر است با:

$$K_L^{RC} = [C_L]^T [k_L^{RC}] [C_L] \quad (19-1)$$

$$K_R^{RC} = [C_R]^T [k_R^{RC}] [C_R] \quad (19-2)$$

$$K_s = k_{sp} \{C_M\}^T \{C_M\} \quad (19-3)$$

با مشخص بودن ضریب سختی فنر پیچشی (k_{sp}) از رابطه (۷-۲) و با جایگذاری روابط (۱۴) و (۱۵) در رابطه (۸) ماتریس سختی المان دارای ترک به صورت رابطه (۲۰) محاسبه و ارائه می‌گردد.

$$K_c^{RC} = K_L^{RC} + K_R^{RC} + K_s \quad (20)$$

نهایتاً با ترکیب ماتریس سختی المان‌های استاندارد بتن‌آرمه و ماتریس سختی المان ترک‌خورده، ماتریس سختی نهایی سازه (K_{st+c}^{RC}) استخراج می‌شود.

۳-۲- استخراج ماتریس جرم المان دارای ترک

در المان‌های بدون ترک، ماتریس جرم با استفاده از روش انرژی، مطابق [۱۰] تعیین می‌گردد. انرژی جنبشی در این حالت برابر است با:

$$T = \frac{1}{2} \int \rho_c \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dv = \frac{1}{2} \int_0^{x_c} \rho_c \dot{w}^T \dot{w} dv \quad (21)$$

که در آن، ρ_c چگالی معادل مقطع بتن آرمه، \dot{w} مشتق خیز (سرعت حرکت) گره‌های المان، تعریف می‌شود. با استفاده از معادله (۲۱)، ماتریس جرم المان‌های استاندارد تیر بتن آرمه به صورت رابطه (۲۲) تعیین می‌گردد.

$$M_{st}^{RC} = \int_0^{l_e} \rho_c [N]^T [N] dv \quad (22)$$

مطابق آنچه برای تعیین ماتریس سختی المان ترک خورده ارائه شده است، در اینجا برای تعیین ماتریس جرم المان ترک خورده، انرژی جنبشی ریز المان‌های چپ و راست فنر پیچشی تعیین شده و با یکدیگر جمع می‌شوند. در این حالت از جرم فنر صرف نظر می‌گردد. در نتیجه انرژی جنبشی ریز المان دارای ترک به صورت معادله (۲۳) ارائه می‌شود.

$$T_c^{RC} = T_L^{RC} + T_R^{RC} \quad (23)$$

که در آن انرژی جنبشی ریز المان سمت چپ (T_L^{RC}) و راست (T_R^{RC}) با توسعه‌ی رابطه‌ی (۱-۱) و مشتقات زمانی خیز ریز المان‌ها به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$\dot{w}_{L(R)}(x) = N_{1L(R)} \dot{w}_2 + N_{2L(R)} \dot{\phi}_2 + N_{3L(R)} \dot{w}_3 + N_{4L(R)} \dot{\phi}_3 \quad (24)$$

که در آن $\dot{\phi}$ مشتق دوران (سرعت زاویه‌ای) گره‌های المان تعریف می‌گردد. بدین ترتیب ماتریس جرم ریز المان سمت چپ به صورت زیر ارائه می‌شود.

$$m_L^{RC} = \frac{\rho_c A^{RC}}{x_c} \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & \frac{11}{210} x_c & \frac{9}{70} & -\frac{13}{420} x_c \\ \frac{11}{210} x_c & \frac{1}{105} x_c^2 & \frac{13}{420} x_c & -\frac{1}{140} x_c^2 \\ \frac{9}{70} & \frac{13}{420} x_c & \frac{13}{35} & -\frac{11}{210} x_c \\ -\frac{13}{420} x_c & -\frac{1}{140} x_c^2 & -\frac{11}{210} x_c & \frac{1}{105} x_c^2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

که در آن A^{RC} مساحت سطح مقطع تیر بتن آرمه فرض می‌شود. ماتریس جرم ریز المان سمت راست (m_R^{RC}) با جایگذاری $\beta_c = l_e - x_c$ به جای x_c در معادله‌ی (۲۵) استخراج می‌شود. انرژی جنبشی اصلاح شده ریز المان سمت چپ بر اساس میزان سرعت گره‌های اصلی به صورت معادله (۲۶) تعیین می‌گردد.

$$T_L^{RC} = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^T [C_L]^T [m_L^{RC}] [C_L] \{\dot{u}\} \quad (26)$$

که در آن \dot{u} بردار سرعت بر حسب گره‌های اصلی تعریف می‌شود. به‌طور مشابه انرژی جنبشی اصلاح شده برای ریز المان سمت راست به صورت رابطه (۲۶) قابل ارائه می‌باشد.

$$T_R^{RC} = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^T [C_R]^T [m_R^{RC}] [C_R] \{\dot{u}\} \quad (27)$$

در نتیجه ماتریس جرم اصلاح شده برای ریز المان‌های سمت چپ و راست، به ترتیب مطابق معادله (۲۸) و (۲۹) تعیین می‌گردد.

$$M_L^{RC} = [C_L]^T [m_L^{RC}] [C_L] \quad (28)$$

$$M_R^{RC} = [C_R]^T [m_R^{RC}] [C_R] \quad (29)$$

بنابراین ماتریس جرم کلی المان دارای ترک مطابق رابطه (۳۰) تعیین می‌شود.

$$M_c^{RC} = M_L^{RC} + M_R^{RC} \quad (30)$$

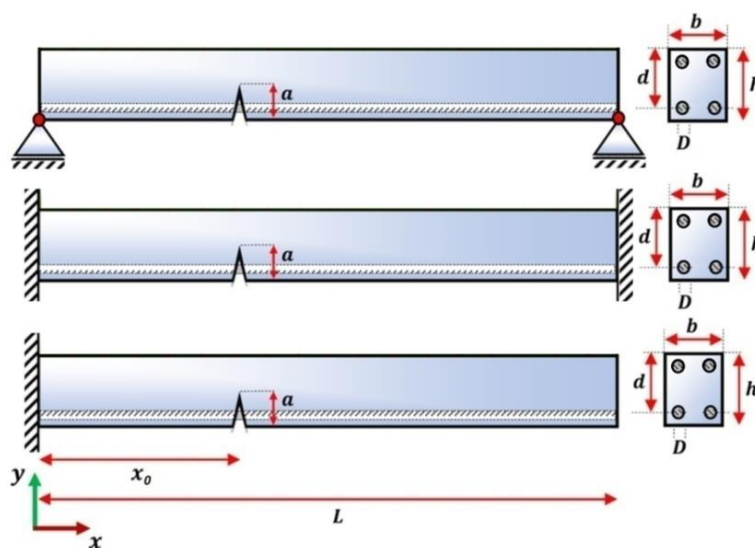
در ادامه ماتریس جرم المان‌های استاندارد بتن آرمه (بدون ترک) با ماتریس جرم المان ترک‌خورده سرهم بندی شده و ماتریس جرم نهایی سازه (M_{st+c}^{RC}) تشکیل می‌شود. در نتیجه نهایتاً فرکانس‌های طبیعی تیر دارای ترک تحت ارتعاش آزاد، با جایگذاری ماتریس جرم و سختی نهایی تیر بتن آرمه‌ی دارای ترک در رابطه‌ی (۶) استخراج می‌گردد.

۴- بحث و نتایج

در این بخش، ابتدا صحت و دقت روش مدل‌سازی ارائه شده برای تیرهای بتن آرمه‌ی دارای ترک تحت ارتعاشات آزاد مورد تحلیل و بررسی قرار می‌گیرد؛ سپس نتایج حاصل از تحلیل مودال تیر بتن آرمه‌ی دارای ترک در قالب چند مثال کاربردی بررسی می‌شود. در این پژوهش، اثرات تغییر عمق و محل ترک روی پاسخ فرکانس‌های طبیعی تیر بتن آرمه‌ی دارای ترک در سه شرایط مرزی دو سر ساده، دو سر گیردار و گیردار آزاد بررسی می‌شود. در تحقیق حاضر مقادیر فرکانس طبیعی در دو مود اول و دوم ارتعاش با استفاده از روش اجزای محدود حاضر، مراجع معتبر و مدل‌سازی در نرم افزار آباکوس مقایسه و بررسی می‌گردد.

۴-۱- مطالعه موردی

در اینجا صحت و دقت روش اجزای محدود حاضر با استفاده از یک مطالعه‌ی موردی بررسی و ارزیابی می‌گردد. در این بخش مشخصات مادی، هندسی و نحوه‌ی آرماتورگذاری تیر بتن آرمه دارای ترک تحت سه شرایط مرزی مطابق شکل (۵) ارائه می‌شود. در این مطالعه به دلیل استفاده از تئوری تیر اوپلر-برنولی، از اثرات نیروی برشی و آرماتورهای عرضی (خاموت) در معادلات صرف نظر شده است در حالی که در مدل‌سازی سه بعدی در نرم افزار آباکوس اثرات نیروی برشی و خاموت‌ها در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه در ابتدا باید به این نکته توجه شود که بخشی از اختلاف پاسخ فرکانس طبیعی دو روش اجزای محدود حاضر و شبیه‌سازی آباکوس می‌تواند ناشی از این ساده‌سازی باشد.



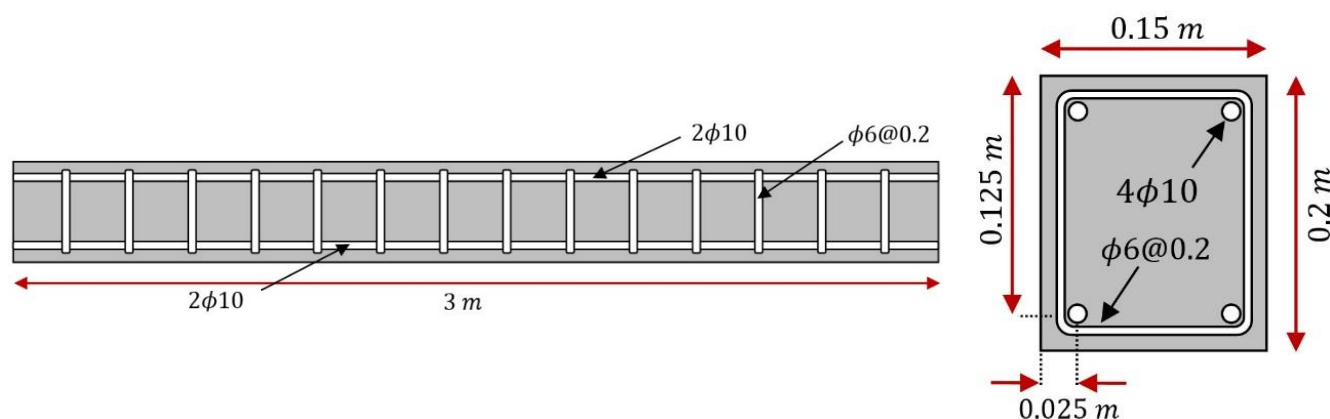
شکل ۵: شرایط تکیه گاهی تیرهای دارای ترک

مشخصات مادی و هندسی تیر مطابق جدول (۱) ارائه می‌شود.

جدول ۱: ویژگی‌های هندسی و مادی تیر بتن آرمه‌ی دارای ترک

مشخصات مادی	مشخصات هندسی
$E_c = 2.5e10 \text{ N/m}^2$	$L = 3 \text{ m}$
$E_s = 2.0e11 \text{ N/m}^2$	$h = 0.2 \text{ m}$
$\nu_c = 0.25$	$b = 0.15 \text{ m}$
$\nu_s = 0.3$	$d = 0.125 \text{ m}$
$\gamma_c = 2400 \text{ N/m}^3$	$D = 4\phi 10 \text{ m}$
$\gamma_s = 7850 \text{ N/m}^3$	$A_{s1,2} = \pi D^2 / 4 \text{ m}^2$
$f_c = 25 \text{ MPa}$	$a/h = 0.0 - 0.9$
$f_y = 240 \text{ MPa}$	$x_0/L = 0 - 1$
$f_u = 400 \text{ MPa}$	

در این مطالعه، مشخصات هندسی در خصوص نحوه‌ی آرماتورگذاری در تیر بتن آرمه به صورت شکل (۶) ارائه می‌شود.

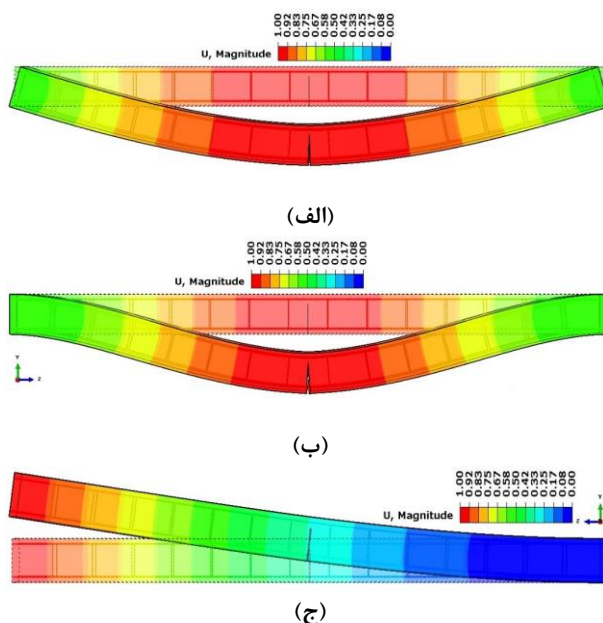


شکل ۶: مشخصات هندسی شرایط آرماتورگذاری

۴-۲- مدل‌سازی در نرم افزار آباکوس

در این مقاله، مدل‌سازی تیر بتن آرمه‌ی دارای ترک در محیط نرم افزار آباکوس با استفاده از روش کانتور انتگرال انجام می‌شود. در این روش یک شبکه‌ی المانی اطراف نوک ترک ایجاد می‌گردد. بدین منظور در ابتدا یک دایره به مرکز نوک ترک و به شعاع مشخص ترسیم می‌شود. مقدار این شعاع به اندازه‌ی یک ضلع المان چهاروجهی در حالت تغییر شکل نیافته، است. در این مرحله نرم‌افزار آباکوس بر اساس دایره‌ی ترسیم شده، نواحی معینی را پیرامون نوک ترک معرفی می‌کند که به آن‌ها اصطلاحاً کانتور گفته می‌شود. نرم‌افزار آباکوس بر اساس این نواحی یا همان کانتورها، ضرایب شدت تنش را بر پایه‌ی روابط انتگرال تعیین می‌نماید که به واسطه‌ی آن انرژی آزاد شده ناشی از ناپیوستگی تعیین شده و ترک مدل‌سازی می‌شود. در تحلیل مودال، با صرف نظر کردن از نیروهای خارجی، و معرفی مودهای ارتعاش سازه، مقادیر ویژه فرکانس طبیعی تیر بتن آرمه استخراج می‌شود. در نرم افزار آباکوس، مدل‌سازی عملکرد میلگردها در بتن، با استفاده از قید

محاط شده انجام شده است. اشکال مودی تیر بتن آرمه ترک‌دار در دو وضعیت اولیه (نقطه چین کم رنگ) و ثانویه تحت شرایط مرزی مختلف در نرم افزار آباکوس مطابق شکل (۷-الف) الی شکل (۷-ج) در مود اول ارتعاش ارائه می‌گردد.

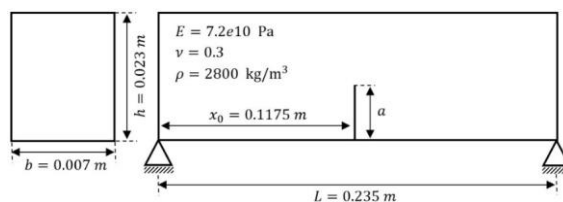


شکل ۷: مود اول ارتعاش تیر بتن آرمه دارای ترک تحت شرایط مرزی (الف) دو سر ساده (ب) دوسرگیردار (ج) یکسر گیردار

۴-۳- صحت سنجی و مقایسه نتایج

۴-۳-۱- صحت سنجی

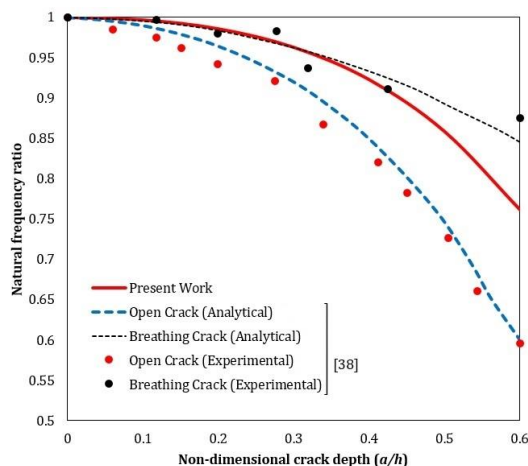
در این بخش نتایج حاصل از روش ارائه شده برای تعیین فرکانس‌های طبیعی تیر دارای ترک با نتایج حاصل از تحقیقات آزمایشگاهی مراجع [۳۸] و [۳۹] اعتبارسنجی می‌شود. از آنجاکه در دو مرجع مذکور علاوه بر ارائه روابط تحلیلی برای تعیین فرکانس‌های طبیعی تیرهای دارای ترک، تحقیقات آزمایشگاهی نیز انجام شده است؛ مقایسه نتایج تحقیق حاضر (تحلیل عددی) با نتایج تحلیلی و آزمایشگاهی به خوبی دقت روش اجزای محدود حاضر را نشان می‌دهد. مطابق با شکل (۸) تیر دارای ترک با مشخصات مادی و هندسی مشخص در شرایط مرزی دو سر ساده تحت آنالیز مودال قرار می‌گیرد؛ که در آن تغییرات فرکانس طبیعی تیر با افزایش عمق ترک در دو حالت "ترک بازشدگی"^۳ و "ترک باز و بسته شونده"^۴، با نتایج حاصل از تحقیق حاضر بررسی می‌شود.



(الف)

³ Opening Crack

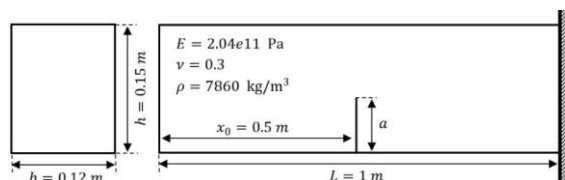
⁴ Breathing Crack



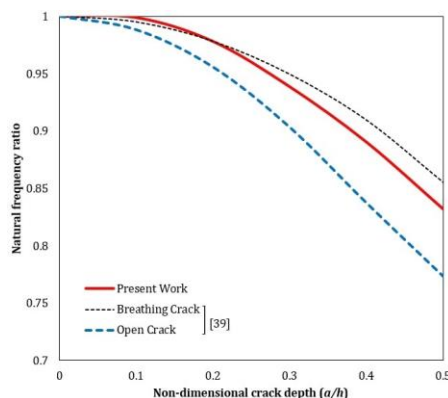
(ب)

شکل ۸: الف) طرح شماتیک تیر دو سر ساده دارای ترک (ب) صحت سنجی تغییرات فرکانس طبیعی تیر با افزایش عمق ترک

بررسی‌ها نشان می‌دهد که نتایج مستخرج از روش اجزای محدود ارائه شده در این تحقیق، بین نتایج حاصل از دو روش مدل‌سازی ترک (بازشدگی و باز و بسته شونده) قرار گرفته و تا عمق ترک حدود ۰.۵ ارتفاع تیر، تقریباً بر نتایج مدل‌سازی "ترک باز و بسته شونده" منطبق است، از آنجاییکه این مدل، یک مدل کامل برای ترک‌های ارتعاشی بوده و اثرات بسته شدن ترک و افزایش سختی سازه را در نظر می‌گیرد، این انطباق به خوبی دقت روش ارائه شده برای تحلیل مودال تیرهای دارای ترک را نشان می‌دهد. یک تحلیل مشابه، مطابق با تحقیقات انجام شده در مرجع [۳۹] به صورت شکل (۹) ارائه می‌شود. در اینجا نتایج تحلیل مودال تیر دارای ترک با مشخصات مادی و هندسی مفروض، در شرایط مرزی یک‌سر آزاد با نتایج حاصل از روش ارائه شده در این پژوهش اعتبارسنجی می‌شود.



(الف)



(ب)

شکل ۹: الف) طرح شماتیک تیر یک‌سر گیردار دارای ترک (ب) صحت سنجی تغییرات فرکانس طبیعی تیر با افزایش عمق ترک

به طور مشابه، نتایج بررسی‌ها نشان دهنده‌ی دقت مناسب روش ارائه شده در مقایسه با نتایج تحلیلی و آزمایشگاهی مستخرج از مرجع [۳۹] می‌باشد. در این حالت بیشینه خطا بین نتایج روش ارائه شده با نتایج مدل "ترک باز و بسته شونده"، ۲,۷ درصد گزارش می‌شود. جدول (۲) نتایج تغییرات فرکانس طبیعی با افزایش عمق ترک را با استفاده از سه مدل "ترک باز شدگی"، "ترک باز و بسته شونده" و "کار حاضر" مقایسه و خطاهای هر یک را ارائه می‌نماید. در این بررسی، خطای شماره ۱، اختلاف مدل "ترک باز شدگی" و "ترک باز و بسته شونده" را نشان می‌دهد و خطای شماره ۲، اختلاف روش مدل‌سازی حاضر و مدل "ترک باز و بسته شونده" در مرجع [۳۹] را تشریح می‌نماید.

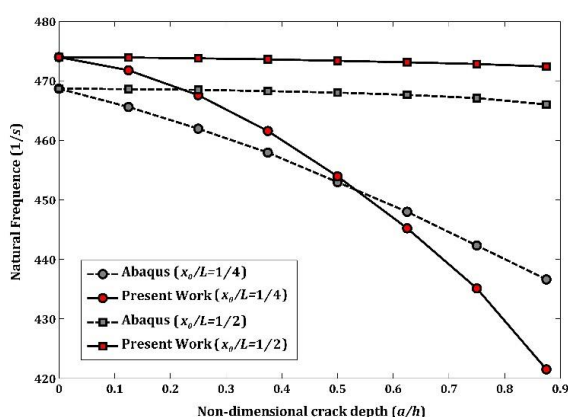
جدول ۲: مقایسه خطاهای سه مدل ترک باز شدگی [۳۹]، ترک باز و بسته شونده [۳۹] و کار حاضر برای تعیین فرکانس‌های طبیعی

a/h	خطا شماره ۲ (%)	خطا شماره ۱ (%)	تحقیق حاضر (ω/ω_0)	مدل ترک باز شدگی (ω/ω_0)	مدل ترک باز و بسته شونده (ω/ω_0)
0	0.0	0.0	1	1	1
0.1	0.4	0.7	0.99892	0.98815	0.99501
0.2	0.0	2.3	0.97816	0.95571	0.97817
0.3	1.1	5.1	0.93866	0.90332	0.94948
0.4	2.1	8.6	0.89045	0.83747	0.90956
0.5	2.7	10.6	0.83214	0.77359	0.85538

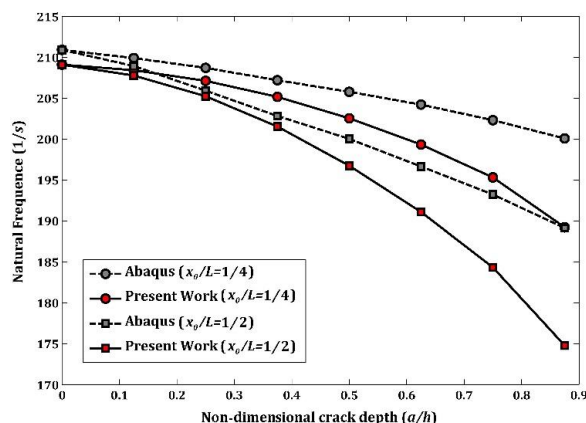
نتایج حاصل از بررسی شکل (۹) و جدول (۲) نشان می‌دهد که مدل "ترک باز شدگی"، در عمق ترک ۰,۵ ارتفاع تیر، حدود ۱۰ درصد با مدل "ترک باز و بسته شونده" اختلاف دارد، از آنجاکه "ترک باز و بسته شونده" به دلیل در نظر گرفتن اثرات سخت شدگی در تحلیل مودال، از دقت بالاتری برخوردار است، اختلاف ۲,۷ درصدی روش حاضر با این مدل، اعتبار تحقیق حاضر را اثبات می‌نماید.

۴-۳-۲- مقایسه اثرات تغییر عمق ترک با نرم افزار آباکوس

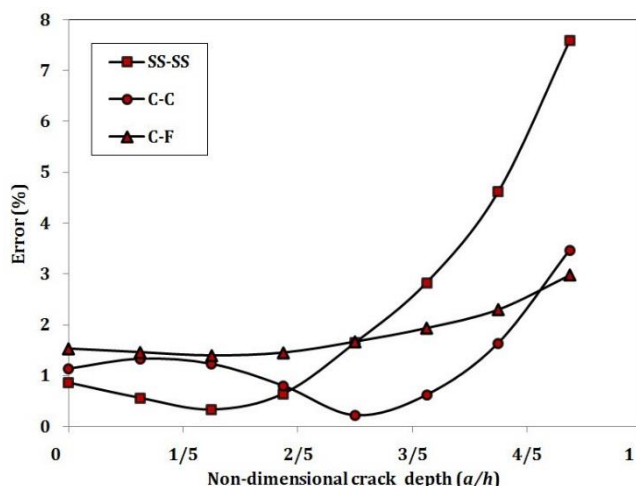
برای بررسی دقت و کارایی مدل پیشنهاد شده، با ثابت فرض کردن محل ترک در دو حالت $(x_0/L = \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ ، تغییرات مقادیر فرکانس طبیعی ناشی از افزایش عمق ترک از صفر تا $\frac{7}{8}h$ ارتفاع مقطع تیر، با استفاده از روش اجزای محدود حاضر و شبیه‌سازی در نرم افزار آباکوس مقایسه و بررسی می‌گردد. در اینجا تیر بتن‌آرمه تحت سه شرایط مرزی دو سر ساده، دو سر گیردار و گیردار آزاد مطابق شکل (۱۰) بررسی می‌گردد.



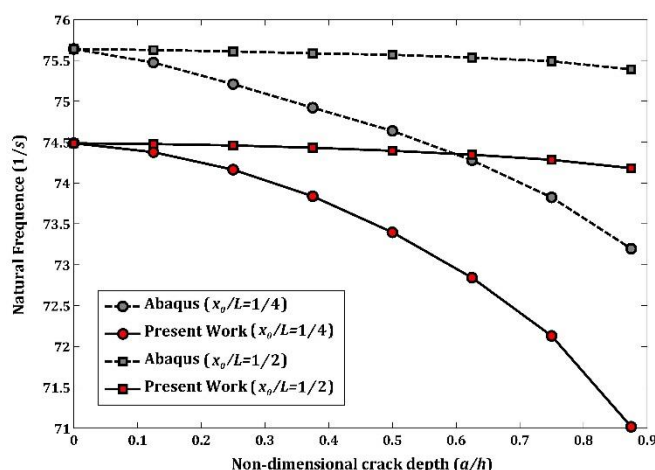
شکل ۱۰-ب: شرایط مرزی دو سر گیردار



شکل ۱۰-الف: شرایط مرزی دو سر ساده



شکل ۱۰-د: بررسی خطاهای دو روش مدل سازی



شکل ۱۰-ج: شرایط مرزی یکسر آزاد

شکل ۱۰: مقایسه تغییرات فرکانس طبیعی و خطاهای ناشی از افزایش عمق ترک در مود اول ارتعاش

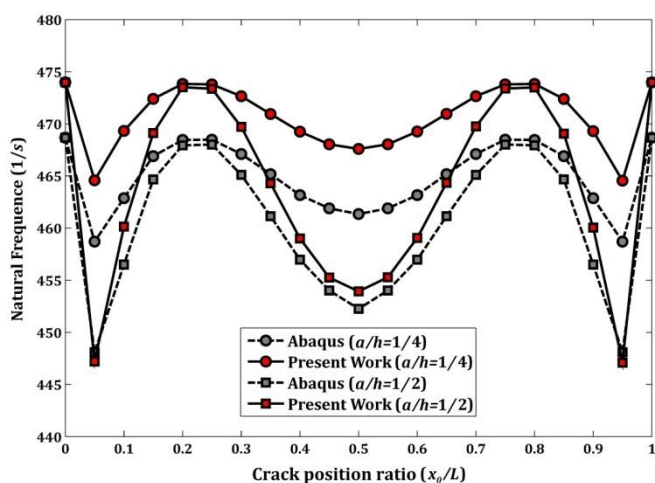
در حالت اول، مقایسه‌ی نتایج حاصل از دو روش مدل‌سازی در شرایط مرزی دو سر ساده مطابق شکل (۱۰-الف) نشان می‌دهد که با افزایش عمق ترک خطای مدل‌سازی افزایش و با تغییر محل ترک از تکیه‌گاه به سمت میانه تیر، خطای ناشی از مقایسه‌ی دو روش کاهش پیدا می‌کند، به طوریکه وقتی ترک در محل $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{2}$ از طول تیر قرار دارد و تا نیمی از ارتفاع مقطع تیر گسترش پیدا می‌کند، میزان خطا به ترتیب ۱،۵۴ و ۱،۶۴ درصد و همچنین بیشینه‌ی خطا وقتیکه عمق $\frac{7}{8}h$ است، به ترتیب ۵،۴۱ و ۷،۵۸ درصد گزارش می‌شود؛ که نشان می‌دهد روش اجزای محدود ارائه شده با دقت مناسب قادر به مدل‌سازی رفتار تیر بتن آرمه‌ی دارای ترک در شرایط مرزی دو سر ساده است. در حالت دوم، تغییرات فرکانس طبیعی در شرایط مرزی دو سر گیردار مطابق شکل (۱۰-ب) ارائه می‌شود. نتایج استخراج شده در این حالت نشان می‌دهد؛ بیشینه‌ی خطا زمانیکه ترک در $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ طول تیر قرار دارد، به ترتیب برابر با ۱،۳۶ و ۳،۴۶ درصد است. در حالت سوم، تغییرات فرکانس طبیعی در شرایط مرزی گیردار آزاد مطابق شکل (۱۰-ج) ارائه می‌شود. در این حالت، مطابق دو حالت پیشین، مقایسه‌ی نتایج حاصل از تغییر عمق ترک روی مقادیر فرکانس طبیعی تیر نشان می‌دهد؛ بیشینه‌ی خطا در حالتی که ترک در $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ طول تیر قرار دارد، به ترتیب برابر با ۱،۶۰ و ۲،۹۷ درصد است. مطابق شکل (۱۰-د)، مقایسه‌ی خطاهای دو روش اجزای محدود ارائه شده و آباکوس، زمانیکه محل ترک در $\frac{1}{4}$ طول تیر قرار دارد، نشان می‌دهد که بیشترین میزان خطا در شرایط مرزی دو سر ساده و کمترین مقدار خطا در شرایط مرزی دو سر گیردار اتفاق می‌افتد. این مقایسه نشان می‌دهد که در شرایط مرزی دو سر ساده و گیردار آزاد همواره با افزایش عمق ترک، مقدار خطا افزایش پیدا می‌کند، در حالیکه در شرایط مرزی دو سر گیردار، تغییرات خطا با افزایش عمق ترک، روندی سینوسی دارد.

۳-۳-۴- مقایسه اثرات تغییر محل ترک

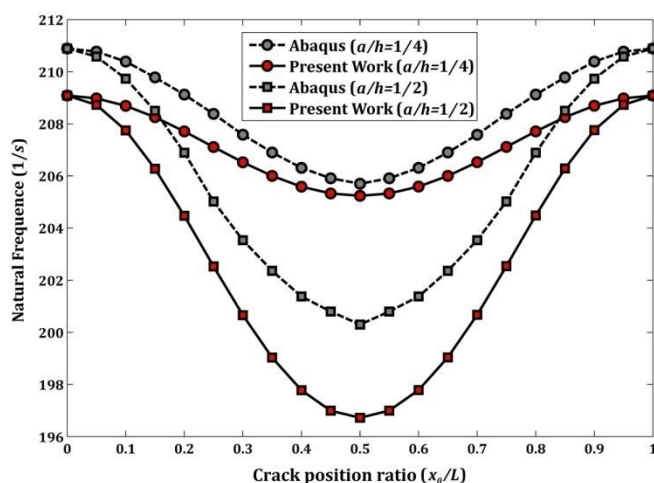
در اینجا دقت مدل پیشنهاد شده، با توجه به تغییرات مقدار فرکانس طبیعی در حالیکه عمق ترک $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ ارتفاع تیر فرض شده است و محل ترک در طول تیر تغییر می‌کند، بررسی می‌شود. مطابق شکل (۱۱) تغییرات مقدار فرکانس طبیعی در مود اول ارتعاش، تحت سه شرایط مرزی با دو روش اجزای محدود حاضر و آباکوس مقایسه می‌گردد. در حالت اول، تغییرات فرکانس طبیعی ناشی از تغییر محل ترک در شرایط مرزی دو سر ساده مطابق شکل (۱۱-الف) ارائه می‌شود. بررسی نتایج در این حالت نشان می‌دهد؛ زمانیکه عمق ترک $\frac{1}{4}$ ارتفاع تیر است، با تغییر محل ترک از تکیه‌گاه تا میانه‌ی تیر میزان خطا کاهش پیدا کرده در حالیکه در عمق ترک $\frac{1}{2}$ ارتفاع تیر، با تغییر محل ترک از

تکیه‌گاه تا میانه‌ی تیر میزان خطا افزایش پیدا می‌کند؛ که دلیل آن اثرات کم نیروی برشی در میانه‌ی تیر در عمق ترک $\frac{1}{4}$ ارتفاع و افزایش اثر نیروهای برشی در عمق ترک $\frac{1}{2}$ ارتفاع تیر ارزیابی می‌گردد. در اینجا، بیشینه‌ی خطا زمانیکه عمق ترک $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ ارتفاع تیر است، به ترتیب ۰٫۸۵ و ۱٫۸۹ درصد گزارش می‌شود. در حالت دوم، تغییرات فرکانس طبیعی ناشی از تغییر محل ترک در شرایط مرزی دو سر گیردار با دو روش مذکور مطابق شکل (۱۱-ب) با یکدیگر مقایسه می‌شوند. بررسی نتایج در این حالت نشان می‌دهد؛ بیشینه‌ی خطا در حالتیکه عمق ترک $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ ارتفاع تیر است، به ترتیب ۱٫۳۹ و ۱٫۱۸ درصد تعیین می‌شود. همچنین در حالت سوم، تغییرات فرکانس طبیعی ناشی از تغییر محل ترک در شرایط مرزی گیردار آزاد مطابق شکل (۱۱-ج) ارائه می‌شود. در این حالت بیشینه‌ی خطا زمانیکه عمق ترک $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ ارتفاع تیر است، به ترتیب ۱٫۵۲ و ۳٫۶۹ درصد گزارش می‌شود.

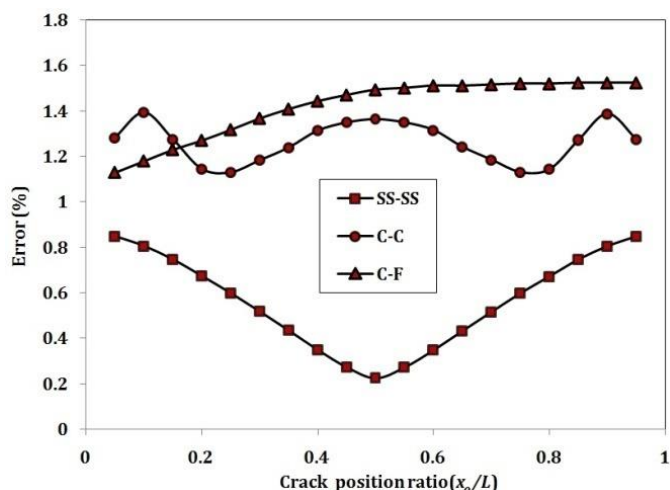
مطابق شکل (۱۱-د)، کم‌ترین میزان خطا بین نتایج دو روش، در شرایط مرزی دو سر ساده مشاهده می‌شود. در این حالت با توجه به تغییر محل ترک از تکیه‌گاه‌ها تا میانه‌ی تیر، همواره میزان خطاها روندی نزولی را دنبال می‌کنند. درحالیکه در شرایط مرزی گیردار آزاد این روند همواره صعودی بوده و بیشینه‌ی خطاها در این شرایط مرزی مشاهده می‌گردد. همچنین در شرایط مرزی دوسر گیردار روند فوق ابتدا نزولی و سپس صعودی دنبال می‌گردد. به‌طوریکه بیشترین خطاها زمانیکه ترک در میانه‌ی تیر قرار دارد استخراج می‌شود. نتایج این بررسی‌ها نشان می‌دهد که روش اجزای محدود ارائه شده برای تخمین رفتار ارتعاشی تیرهای بتن آرمه دارای ترک با تغییر محل ترک در تمامی شرایط مرزی از دقت مناسبی برخوردار است.



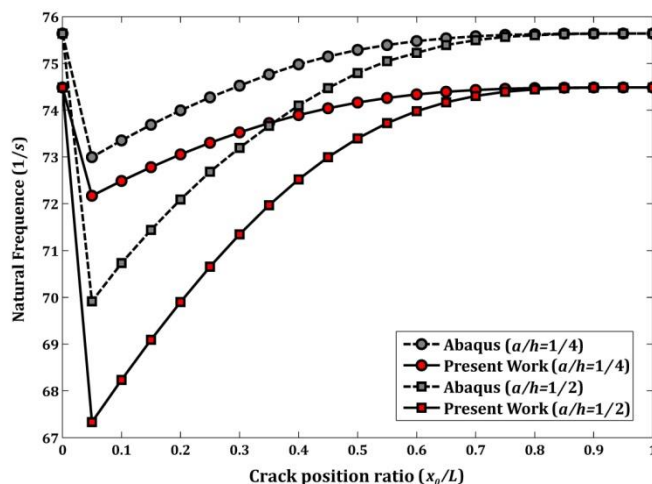
شکل ۱۱-ب: شرایط مرزی دو سر گیردار



شکل ۱۱-الف: شرایط مرزی دو سر ساده



شکل ۱۱-د: بررسی خطاهای دو روش مدل سازی



شکل ۱۱-ج: شرایط مرزی یکسر آزاد

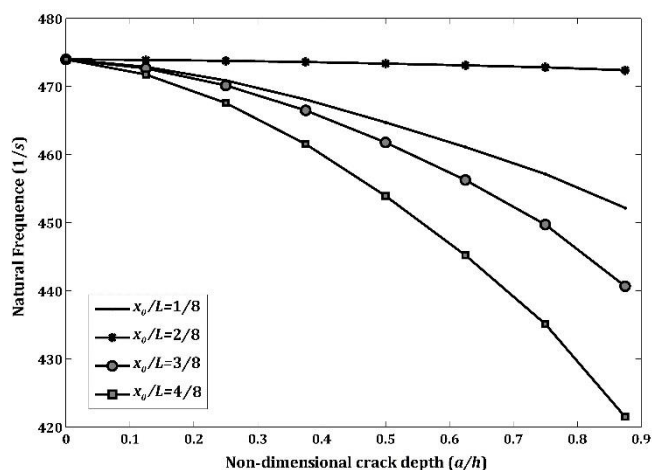
شکل ۱۱: مقایسه تغییرات فرکانس طبیعی و خطاهای ناشی از تغییر محل ترک در مود اول ارتعاش

۴-۴- بررسی اثرات تغییر عمق و محل ترک روی فرکانس‌های طبیعی تیر بتن آرمه

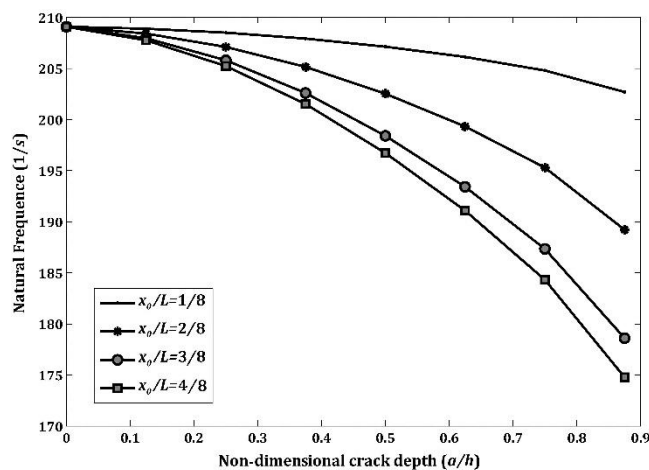
در این بخش یک بحث جامع روی تغییرات فرکانس طبیعی ناشی از تغییر عمق و محل ترک در تیرهای بتن آرمه‌ی دارای ترک انجام می‌شود. به‌طوریکه یکبار محل ترک در ۸ نقطه‌ی ثابت از طول تیر در نظر گرفته می‌شود و عمق ترک به تدریج افزایش پیدا می‌کند. سپس عمق ترک در ۸ مقدار مشخص، ثابت فرض شده و مکان ترک به تدریج در طول تیر بتن آرمه تغییر می‌نماید. نتایج حاصل از این بررسی، رفتار کامل تیر بتن آرمه دارای ترک، در یک تحلیل مودال را تشریح می‌نماید. در اینجا تغییرات فرکانس طبیعی تیر بتن آرمه در شرایط مرزی دو سر ساده، دو سر گیردار و گیردار آزاد به ترتیب مطابق شکل‌های (۱۲-الف) الی (۱۲-ج) ارائه می‌شود. نتایج بررسی‌ها مطابق شکل (۱۲-الف) نشان می‌دهد که همواره با افزایش عمق ترک، فرکانس طبیعی تیر بتن آرمه در شرایط مرزی دو سر ساده کاهش پیدا می‌کند. در این حالت در صورتیکه ترک از تکیه‌گاه به سمت میانه تیر حرکت نماید همواره مقدار فرکانس طبیعی کاهش یافته و مجدداً از میانه به سمت تکیه‌گاه مقدار فرکانس افزایش می‌یابد.

همچنین نتایج بررسی‌ها در حالت دوم (تحت شرایط مرزی دو سر گیردار) مطابق شکل (۱۲-ب)، نشان می‌دهد که همواره با افزایش عمق ترک، فرکانس طبیعی تیر بتن آرمه کاهش پیدا می‌کند. در این حالت در صورتیکه ترک از تکیه‌گاه به سمت میانه تیر حرکت نماید،

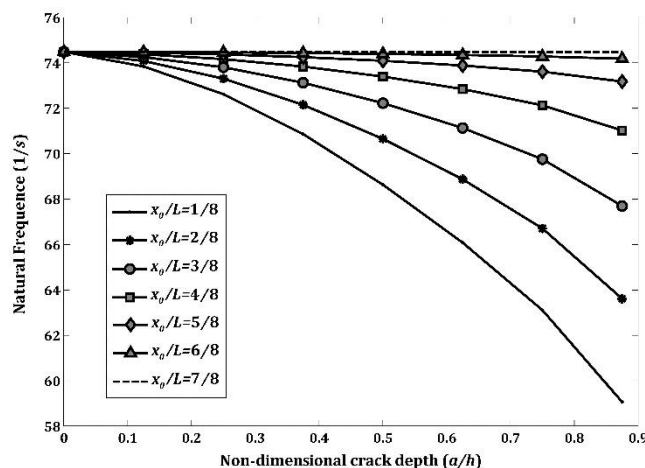
علاوه بر زمانیکه ترک در محل $\frac{1}{4}$ طول تیر قرار دارد و فرکانس تیر دارای ترک به فرکانس تیر بدون ترک نزدیک است، همواره در سایر نقاط، مقدار فرکانس طبیعی تیر با افزایش عمق ترک کاهش پیدا می‌کند.



شکل ۱۲-ب: شرایط مرزی دو سر گیردار



شکل ۱۲-الف: شرایط مرزی دو سر ساده



شکل ۱۲-ج: شرایط مرزی یکسر آزاد

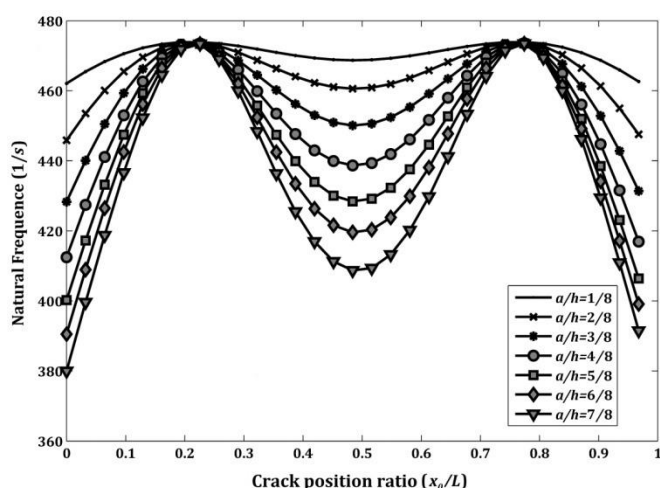
شکل ۱۲: تغییرات فرکانس طبیعی مود اول ارتعاش، ناشی از افزایش عمق ترک در شرایط مرزی مختلف

مشابه دو حالت پیشین، در شرایط مرزی گیردار آزاد، مطابق شکل (۱۲-ج)، همواره با افزایش عمق ترک، فرکانس طبیعی کاهش پیدا می‌کند اما بر خلاف حالات قبل با تغییر محل ترک از تکیه‌گاه گیردار به سمت انتهای آزاد تیر، مقدار فرکانس طبیعی افزایش پیدا می‌کند، به طوریکه وقتی ترک در محل $\frac{6}{8}, \frac{7}{8}$ طول تیر قرار دارد، مقدار فرکانس طبیعی تقریباً به فرکانس طبیعی تیر بدون ترک نزدیک خواهد بود. در ادامه با ثابت فرض کردن عمق ترک در ۸ مقدار مشخص، مکان ترک به تدریج در طول تیر بتن آرمه تغییر می‌نماید. مطابق حالت-های قبل در اینجا تغییرات فرکانس طبیعی تیر بتن آرمه در شرایط مرزی دو سر ساده، دو سرگیردار و گیردار آزاد به ترتیب مطابق شکل (۱۳-الف) الی (۱۳-ج) ارائه می‌شود. نتایج بررسی‌ها نشان می‌دهد که کمترین مقدار فرکانس طبیعی در هر عمق از ترک خوردگی در مود اول، مطابق شکل (۱۳-الف) زمانی به دست می‌آید که ترک در میانه تیر دو سر ساده واقع شده باشد. در این حالت هرچه محل ترک از میانه تیر به سمت تکیه‌گاه‌ها منتقل شود، همواره فرکانس طبیعی افزایش پیدا می‌کند. همچنین بررسی نمودار فرکانس‌های طبیعی در مود دوم مطابق شکل (ض-الف) نشان می‌دهد، زمانی که ترک در میانه و یا در ابتدا و انتهای تیر واقع است، مقدار فرکانس‌های طبیعی

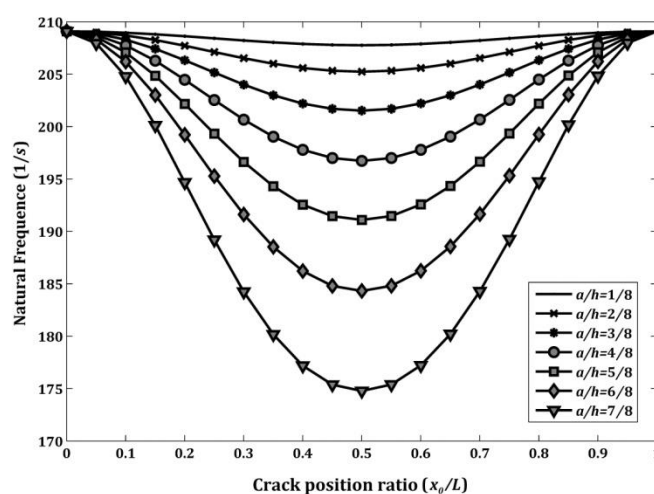
بیشینه و همواره مقداری ثابت، برابر با مقدار فرکانس در کمترین عمق ترک است. چنین روندی برای تغییرات میزان فرکانس‌های طبیعی در سایر مودهای تیردارای ترک نیز قابل بحث است.

بررسی نمودار فرکانس‌های طبیعی مود اول در شرایط مرزی دو سر گیردار نشان می‌دهد که کمترین مقدار فرکانس طبیعی در هر عمق از ترک خوردگی، زمانیکه ترک در میانه و یا در ابتدا و انتهای تیر دو سر گیردار واقع شده باشد اتفاق می‌افتد. مطابق شکل (۱۱-ب) زمانی که ترک در یک پنجم ابتدایی و یا انتهایی تیر واقع شده باشد، مقدار فرکانس‌های طبیعی وابسته به عمق ترک نیست و همواره مقداری ثابت، برابر با مقدار فرکانس در کمترین عمق ترک تعیین می‌شود. با روندی مشابه تغییرات میزان فرکانس‌های طبیعی در مود دوم مطابق شکل (ض-ب) قابل بررسی است. در این حالت کمترین میزان فرکانس در هر عمق از ترک، زمانی اتفاق می‌افتد که ترک در یک پنجم ابتدایی و یا انتهایی تیر واقع شده باشد.

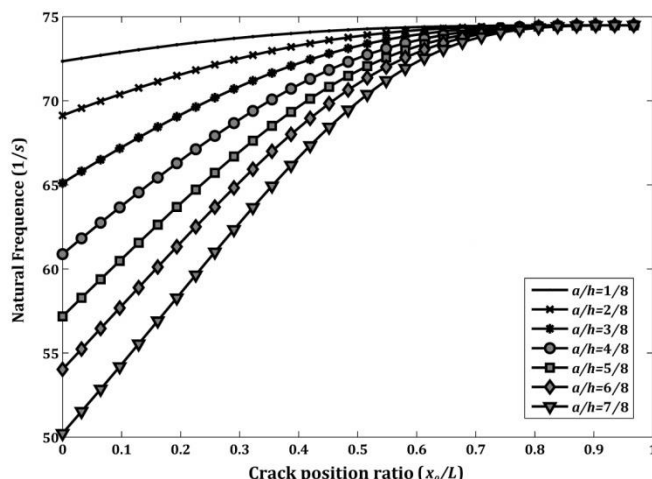
با توجه به شکل (۱۳-ج) مشاهده می‌شود که کمترین میزان فرکانس طبیعی در هر عمقی از ترک خوردگی در تیر گیردار آزاد، زمانی اتفاق می‌افتد که محل ترک کمترین فاصله را تا تکیه گاه داشته باشد. در نتیجه با تغییر محل ترک از محل تکیه گاه به سمت انتهای آزاد همواره مقدار فرکانس طبیعی در مود اول روندی صعودی دارد (افزایش پیدا می‌کند). همچنین مطابق شکل (ض-ج) مشاهده می‌شود، میزان فرکانس‌های طبیعی در تیر گیردار آزاد دارای ترک در مود دوم زمانی کمینه خواهد شد که محل ترک از میانه تیر بگذرد، $(0.6 \leq x_0/L \leq 0.8)$ مطابق آنچه در شرایط مرزی دو سر گیردار گفته شد، در اینجا زمانی که ترک به یک پنجم ابتدایی و یا انتهایی تیر نزدیک می‌شود، مقدار فرکانس‌های طبیعی افزایش پیدا کرده و وابستگی فرکانس به عمق ترک از بین می‌رود.



شکل ۱۳-ب: شرایط مرزی دو سر گیردار



شکل ۱۳-الف: شرایط مرزی دو سر ساده



شکل ۱۳- ج: شرایط مرزی یکسر آزاد

شکل ۱۳: تغییرات فرکانس طبیعی مود اول ارتعاش، ناشی از تغییر محل ترک در شرایط مرزی مختلف

۵- نتیجه گیری

در این مقاله رفتار ارتعاش آزاد تیر بتن آرمه‌ی دارای ترک در شرایط مرزی مختلف تحلیل و بررسی شده است. تحلیل انجام شده بر مبنای یک روش اجزای محدود و اصلاح ممان اینرسی ناشی از حضور میلگردها پایه‌ریزی شده است. در این مطالعه، ترک در تیر بتن آرمه با استفاده از یک فنر پیچشی معادل، مدل‌سازی گردیده است. اثر ترک روی میزان سختی تیر بتن آرمه با غنی‌سازی درایه‌های ماتریس جرم و سختی بر اساس پارامترهای مادی و هندسی ترک اعمال شده است. در مطالعه‌ی حاضر تأثیر عمق و مکان ترک روی فرکانس‌های طبیعی در مود اول و دوم ارتعاش تیر بررسی و نتایج آن با نتایج حاصل از نرم افزار آباکوس و مراجع معتبر مقایسه گردید. بررسی نتایج به دست آمده نشان می‌دهد:

- نرخ کاهش میزان فرکانس‌های طبیعی در نسبت‌های $a/h \geq 0.6$ به شدت افزایش پیدا می‌کند؛ که دلیل آن غیرخطی شدن معادلات و کاهش شدید ممان اینرسی در عمق‌های زیاد ترک ارزیابی می‌گردد.
- با توجه به آنکه تحلیل حاضر یک مدل خطی و یک‌بعدی برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی تیر دارای ترک را ارائه می‌نماید، مشاهده می‌شود این تحلیل در مقایسه با شبیه‌سازی سه‌بعدی در نرم افزار آباکوس از دقت مناسبی با خطای زیر ۸ درصد برخوردار می‌باشد.
- ایجاد ترک در تیر بتن آرمه، موجب کاهش فرکانس‌های طبیعی سازه می‌شود که دلیل آن کاهش ممان اینرسی مقطع می‌باشد. در حالیکه میلگردهای طولی و عرضی به دلیل افزایش ممان اینرسی سازه، فرکانس‌های طبیعی را افزایش می‌دهند. اثر همزمان (ترک و میلگردها) اهمیت معادلات (۲-۲)، (۴-۱) و (۵-۳) را در مدل‌سازی نشان می‌دهد.
- زمانیکه ترک در ابتدا و انتهای تیر دو سر ساده و یا انتهای آزاد تیر یکسر گیردار قرار می‌گیرد، فرکانس طبیعی، تابعی از محل و عمق ترک نبوده و با فرکانس تیر بدون ترک معادل می‌شود.
- مدل عددی و تحلیلی مورد استفاده با دقت مناسب قادر به توجیه رفتار ترک و میلگردها می‌باشد.

مراجع

- [1] Nego, D., Seordelis, A. (1967). Finite element analysis of reinforced concrete beam. *Am. Con. Ins Journal*, Vol. 63, pp. 240-252.
- [2] Krishnamoorthy, C., Panneerselvam, S. A. (1978). FEP-ACSI-a finite element program for nonlinear analysis of reinforced concrete framed structures. *Computer and Structures*, Vol. 9, pp. 451-461.
- [3] Zdenek, P. B., Byung, H. (1984). Deformation of progressively cracking reinforced concrete beams. *Journal of ACI*, Vol. 71, pp. 268-278.
- [4] Hu, H., William, C. (1990). Nonlinear analysis of cracked reinforced concrete. *Journal of ACI*, Vol. 87, pp. 199-207.
- [5] Krawczuk, M., Ostachowicz, W. M. (1995). Modelling and vibration analysis of a cantilever composite beam with a transverse open crack. *Sound and Vibration*, Vol. 183, pp. 69-89.
- [6] Benarbia, D., Benguediab, M., Benguediab, S. (2013). Two-dimensional Analysis of Cracks Propagation in Structures of Concrete. *Journal of Engineering, Technology & Applied Science Research*, Vol. 3, pp. 429-432.
- [7] Subramani, T., Manivannan, R., Kavitha, M. (2014). Crack Identification in Reinforced Concrete Beams Using Ansys Software. *Engineering Research and Applications*, Vol. 4, pp. 133-141.
- [8] Slowik, M., Smarzewski, P. (2014). Numerical Modeling Of Diagonal Cracks In Concrete Beams. *Archives of Civil Engineering*, Vol. 3, pp. 307-322.
- [9] Dimarogonas, A. D., Papadopoulos, C. A. (1983). Vibration of cracked shafts in bending. *Sound and Vibration*, Vol. 91, pp. 583-593.
- [10] Okamura, H., Liu, H. W., Chornng-Shin, C. (1969). A cracked column under compression. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 1, pp. 547-564.
- [11] Rizos, P. F., Aspragathos, N., Dimarogonas, A. D. (1990). Identification of crack location and magnitude in a cantilever beam from the vibration modes, *Sound and Vibration*, Vol. 3, pp. 381-388.
- [12] Law, S. S., Zhu, X. Q. (2004). Dynamic behavior of damaged concrete bridge structures under moving vehicular loads. *Engineering Structures*, Vol. 26, pp. 1279-1293.
- [13] Lee, J. (2010). Identification of a crack in a beam by the boundary element method. *Mechanical Science and Technology*, Vol. 24, pp. 801-804.
- [14] Yokoyama, T., Chen, M. C. (1998). Vibration analysis of edge-cracked beams using a line-spring model. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 59, pp. 403-409.
- [15] Razzaghi, J., Abadi, M. Kh., Alijani, A. (2018). A new approach to finite element modeling of crack in RC beams. *Concrete research quarterly journal*, Vol. 11(2), pp. 42-55.
- [16] Ricci, P., Viola, E. (2006). Stress intensity factors for cracked T-sections and dynamic behavior of T-beams. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 73, pp. 91-111.
- [17] Alijani, A., Mastan-Abadi, M., Darvizeh, A., Kh. Abadi, M. (2018). Theoretical approaches for bending analysis of founded Euler-Bernoulli cracked beams. *Archive of Applied Mechanics*, in press.
- [18] Leissa, A. W. and Qatu, M. S. (2011). *Vibrations of Continuous Systems*. First edition, United States of America: McGraw-Hill, pp. 50-150.
- [19] Rao, S. S. (2011). *Mechanical Vibrations*. Fifth edition, United States of America: Prentice Hall, pp. 22-57.
- [20] Logan, D. L. (2007). *A First Course in the Finite Element Method*. Fourth edition, Canada: Thomson, pp. 78-121.
- [21] Yokoyama, T. (1996). Vibration analysis of Timoshenko beam-columns on two-parameter elastic foundations. *Journal of Computers & Structures*, Vol. 61, pp. 995-1007.
- [22] Gudmundsun, P. (1983). The dynamic behavior of slender structures with cross-sectional cracks. *Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 1, pp. 329-345.
- [23] Chaudhari, T. D., Maiti, S. K. (1999). Modelling of transverse vibration of beam of linearly variable depth with edge crack. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 63, pp. 425-445.
- [24] Pandey, A. K., Biswas, M. (1994). Damage detection in structures using changes in flexibility. *Sound and Vibration*, Vol. 169, pp. 3-17.
- [25] Lele, S. P., Maiti, S. K. (2002). Modeling of transverse vibration of short beams for crack detection and measurement of crack extension. *Sound and Vibration*, Vol. 257, pp. 559-583.

- [26] Silva, J. M., Gomes, A. J. (1990). Experimental dynamic analysis of cracked free-free beams. *Experimental Mechanics*, Vol. 30, pp. 20-25.
- [27] Kim, J. T., Stubbs, N. (2003). Crack detection in beam-type structures using frequency data. *Sound and Vibration*, Vol. 259, pp. 145-160.
- [28] Swamidass, A. S. J., Yang, X. F., Seshadri, R. (2004). Identification of cracking in beam structures using Timoshenko and Euler formulations. *Engineering Mechanics*, Vol. 130, pp. 1297-1308.
- [29] Dodeling, S. W., Farrar, C. R., Prime, M. B. (1998). A summary review of vibration-based damage identification methods. *Shock and Vibration Digest*, Vol. 30, pp. 91-105.
- [30] Cawly, P., Adams, R. D. (1979). The locations of defects in structures from measurements of natural frequencies. *Strain Analysis*, Vol. 14, pp. 49-57.
- [31] Friswell, M. I., Penny, J. E. T., Wilson, D. A. L. (1994). Using vibration data and statistical measures to locate damage in structures. *Experimental Techniques*, Vol. 9, pp. 239-254.
- [32] Narkis, Y. (1994). Identification of crack location in vibrating simply supported beams. *Sound and Vibration*, Vol. 172, pp. 549-558.
- [33] Ratcliffe, C. P. (1997). Damage detection using a modified Laplacian operator on mode shape data. *Sound and Vibration*, Vol. 204, pp. 505-517.
- [34] Ostachowicz, W. M., Krawczuk, M. (1991). Analysis of the cracks on the natural frequencies of a cantilever Beam. *Sound and Vibration*, Vol. 150, pp. 191-201.
- [35] Binici, B. (2005). Vibration of beam with multiple open cracks subjected to axial force. *Sound and Vibration*, Vol. 287, pp. 277-295.
- [36] Hofstetter, G., Meschke, G. (2011). *Damage and Smeared Crack Models*. First edition, Germany: CISM International Centre for Mechanical Sciences, Springer, Vienna, pp. 1-49.
- [37] Borst, R. D., Remmers, J. C., Needleman, A., Angèle Abellan, M. (2004). Discrete vs smeared crack models for concrete fracture: Bridging the gap. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 28(7-8), pp. 583 - 607.
- [38] Chondros, T. G., Dimarogonas, A. D., Yao, J. (2001). Vibration of a beam with a breathing crack. *Journal of Sound and vibration*, Vol. 239(1), pp. 57-67.
- [39] Liu, W., Barkey, M. E. (2018). The Effects of Breathing Behaviour on Crack Growth of a Vibrating Beam. *Shock and Vibration*, <https://doi.org/10.1155/2018/2579419>.
- [40] Irwin, G. R., Kies, J. A. (1954). Critical energy rate analysis of fracture strength. *Journal of Welding*, Vol. 33(1), pp. 193-198.

فهرست علائم

عمق ترک	a	نسبت ضریب الاستیسیته فولاد (میلگرد) به بتن	n
مساحت سطح مقطع تیر بتن آرمه	A^{RC}	توابع شکل	N
مساحت سطح مقطع میلگردهای فوقانی (تحتانی)	$A_{s1(2)}$	ضخامت کاور بتن (فاصله میلگرد تا سطح خارجی بتن)	t
ضخامت تیر	b	انرژی جنبشی	T
قطر میلگردها	D	انرژی جنبشی المان دارای ترک	T_c^{RC}
ماتریس اصلاح ریز المان سمت چپ (راست)	$C_{L(R)}$	انرژی جنبشی ریز المان سمت چپ فنر (راست)	$T_{L(R)}^{RC}$
فاصله میلگردهای طولی تا دورترین تار فشاری بتن	d	بردار جایجایی برحسب گره‌های اصلی	u
مدول الاستیسیته بتن (فولاد)	$E_{c(s)}$	بردار سرعت برحسب گره‌های اصلی	\dot{u}
ارتفاع تیر	h	بردار جایجایی گره‌های ریز المان چپ (راست)	$u_{L(R)}$

انرژی کرنشی	U	گشتاور دوم سطح مقطع کامل (ترک نخورده)	I_0^{RC}
انرژی کرنشی المان دارای ترک	U_c	ممان اینرسی اصلاح شده تیر ترک خورده	I_c^{RC}
انرژی کرنشی ریز المان سمت چپ (راست)	$U_{L(R)}$	ضریب سختی فنر پیچشی	k_{sp}
انرژی کرنشی فنر پیچشی	U_s	ماتریس سختی ریز المان سمت چپ (راست)	$K_{L(R)}^{RC}$
جابجایی گره‌ها	w	ضریب شدت تنش تحت خمش خالص	K_{Im}
سرعت گره‌ها	\dot{w}	ماتریس سختی اصلاح شده فنر پیچشی	K_S
سرعت گره سمت چپ (راست) فنر	$\dot{w}_{L(R)}$	ماتریس سختی تیر بتن آرمه اویلر-برنولی استاندارد	K_{St}
محل ترک در طول تیر	x_0	ماتریس سختی اصلاح شده ریز المان سمت چپ (راست)	$K_{L(R)}^{RC}$
محل فنر پیچشی در المان دارای ترک	x_c	ماتریس سختی اصلاح شده المان دارای ترک	K_c^{RC}
محل تار خنثی مقطع کامل تیر بتن آرمه (ترک نخورده)	\bar{y}_0^{RC}	ماتریس سختی اسمبل شده تیر دارای ترک	K_{st+c}^{RC}
محل تار خنثی مقطع دارای ترک تیر بتن آرمه	\bar{y}_c^{RC}	طول تیر (طول المان دارای ترک)	$L(l_*)$
وزن مخصوص بتن (فولاد)	$\gamma_c(s)$	ماتریس جرم ریز المان سمت چپ (راست)	$m_{L(R)}^{RC}$
نسبت پواسون بتن (فولاد)	$\nu_c(s)$	ممان خمشی	M
چگالی بتن (فولاد)	$\rho_c(s)$	ماتریس جرم استاندارد تیر بتن آرمه بدون ترک	M_{st}^{RC}
شیب	ϕ	ماتریس جرم اصلاح شده ریز المان سمت چپ (راست)	$M_{L(R)}^{RC}$
فرکانس طبیعی	ω	ماتریس جرم اصلاح شده المان دارای ترک	M_c^{RC}
		ماتریس جرم اسمبل شده تیر دارای ترک	M_{st+c}^{RC}

ضمیمه

در بخش اول، هر یک از درایه‌های ماتریس تبدیل C_L با حل دستگاه معادلات پیوستگی، به صورت زیر ارائه می‌شود.

$$C_L^{11} = C_L^{22} = 1 \quad (\text{ض-۱})$$

$$C_L^{12} = C_L^{13} = C_L^{14} = C_L^{21} = C_L^{23} = C_L^{24} = 0 \quad (\text{ض-۲})$$

$$C_L^{31} = \frac{1}{X} (l_\theta^4 + 4l_\theta^3\psi - 3l_\theta^2x_c^2 - 12l_\theta^2x_c\psi + 2l_\theta x_c^3 + 12l_\theta x_c^2\psi - 4x_c^3\psi) \quad (\text{ض-۳})$$

$$C_L^{32} = \frac{1}{X} (l_\theta^4x_c - 2l_\theta^3x_c^2 + 4l_\theta^3x_c\psi + l_\theta^2x_c^3 - 12l_\theta^2x_c^2\psi + 12l_\theta x_c^3\psi - 4x_c^4\psi) \quad (\text{ض-۴})$$

$$C_L^{33} = \frac{1}{X} (3l_\theta^2x_c^2 - 2l_\theta x_c^3 + 4x_c^3\psi) \quad (\text{ض-۵})$$

$$C_L^{34} = \frac{1}{X} (-l_\theta^3x_c^2 + l_\theta^2x_c^3 - 4l_\theta x_c^3\psi + 4x_c^4\psi) \quad (\text{ض-۶})$$

$$C_L^{41} = \frac{1}{X} (-6l_\theta^2x_c + 6l_\theta x_c^2 - 6x_c^2\psi) \quad (\text{ض-۷})$$

$$C_L^{42} = \frac{1}{X} (l_\theta^4 - 4l_\theta^3x_c + 4l_\theta^3\psi + 3l_\theta^2x_c^2 - 12l_\theta^2x_c\psi + 12l_\theta x_c^2\psi - 6x_c^3\psi) \quad (\text{ض-۸})$$

$$C_L^{43} = \frac{1}{X} (6l_\theta^2x_c - 6l_\theta x_c^2 + 6x_c^2\psi) \quad (\text{ض-۹})$$

$$C_L^{44} = \frac{1}{X} (-2l_\theta^3x_c + 3l_\theta^2x_c^2 - 6l_\theta x_c^2\psi + 6x_c^3\psi) \quad (\text{ض-۱۰})$$

در بخش دوم، به‌طور مشابه هر یک از درایه‌های ماتریس تبدیل C_R به صورت زیر ارائه می‌گردد.

$$C_R^{33} = C_R^{44} = 1 \quad (\text{ض-۱۱})$$

$$C_R^{31} = C_R^{32} = C_R^{34} = C_R^{41} = C_R^{42} = C_R^{43} = 0 \quad (\text{ض-۱۲})$$

$$C_R^{11} = \frac{1}{X} (l_\theta^4 + 4l_\theta^3\psi - 3l_\theta^2x_c^2 - 12l_\theta^2x_c\psi + 2l_\theta x_c^3 + 12l_\theta x_c^2\psi - 4x_c^3\psi) \quad (\text{ض-۱۳})$$

$$C_R^{12} = \frac{1}{X} (l_\theta^4x_c - 2l_\theta^3x_c^2 + 4l_\theta^3x_c\psi + l_\theta^2x_c^3 - 12l_\theta^2x_c^2\psi + 12l_\theta x_c^3\psi - 4x_c^4\psi) \quad (\text{ض-۱۴})$$

$$C_R^{13} = \frac{1}{X} (3l_\theta^2x_c^2 - 2l_\theta x_c^3 + 4x_c^3\psi) \quad (\text{ض-۱۵})$$

$$C_R^{14} = \frac{1}{X} (-l_\theta^3x_c^2 + l_\theta^2x_c^3 - 4l_\theta x_c^3\psi + 4x_c^4\psi) \quad (\text{ض-۱۶})$$

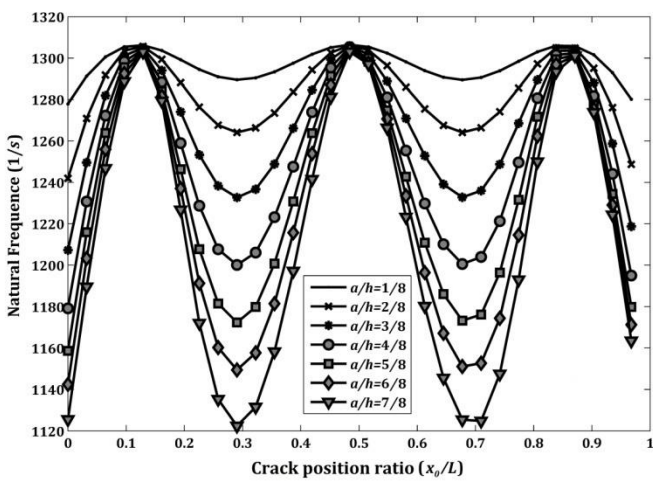
$$C_R^{21} = \frac{1}{X} (-6l_\theta^2x_c - 6l_\theta^2\psi + 6l_\theta x_c^2 + 12l_\theta x_c\psi - 6x_c^2\psi) \quad (\text{ض-۱۷})$$

$$C_R^{22} = \frac{1}{X} (l_\theta^4 - 4l_\theta^3x_c + 3l_\theta^2x_c^2 - 6l_\theta^2x_c\psi + 12l_\theta x_c^2\psi - 6x_c^3\psi) \quad (\text{ض-۱۸})$$

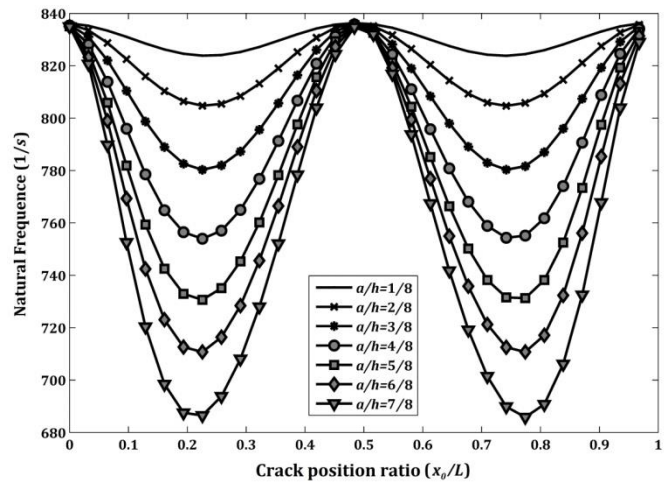
$$C_R^{23} = \frac{1}{X} (6l_\theta^2x_c + 6l_\theta^2\psi - 6l_\theta x_c^2 - 12l_\theta x_c\psi + 6x_c^2\psi) \quad (\text{ض-۱۹})$$

$$C_R^{24} = \frac{1}{X} (-2l_\theta^3x_c - 2l_\theta^3\psi + 3l_\theta^2x_c^2 + 6l_\theta^2x_c\psi - 6l_\theta x_c^2\psi + 6x_c^3\psi) \quad (\text{ض-۲۰})$$

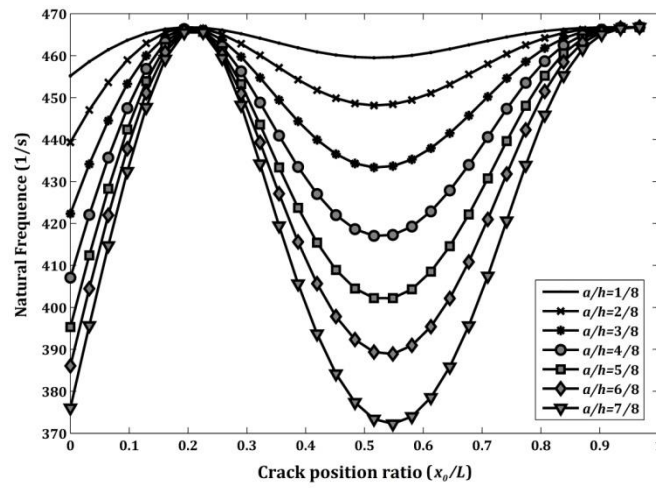
در بخش سوم، نتایج اثرات تغییر محل ترک روی مقادیر فرکانس طبیعی در مود دوم تیر بتن آرمه‌ی دارای ترک در سه شرایط مرزی به صورت شکل‌های (ض-الف) الی (ض-ج) ارائه می‌شود.



شکل ض-ب: شرایط مرزی دو سر گیردار



شکل ض-الف: شرایط مرزی دو سر ساده



شکل ض-ج: شرایط مرزی یکسر آزاد

شکل ض: تغییرات فرکانس طبیعی ناشی از تغییر محل ترک در مود دوم ارتعاش