

Nonlinear analysis of dynamic instability of aircraft wing structure based on first order shear beam theory and differential quadratic solution method

Alireza Pourmoayed^{1*}, Keramat Malakzadehfard²

1- Assistant professor, Department of Mechanical Engineering, Khatamul-Anbiya Air Defense University, Tehran, Iran

2- Professor, Department of Aerospace Engineering, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran

ABSTRACT

In this paper, for the first time, a nonlinear analysis of the dynamic instability of a relatively thick curved structure equivalent to a composite wing layer is performed. For this purpose, the wing structure of the aircraft is considered as a relatively thick curved beam and modelling has been done using first-order shear theory. Van Carmen's large non-linear strain relationships have been used in strain components in a curved line environment. One of the most complex instability modes is axial excitation of the curved beam under a harmonic dynamic load despite a static constant value. These static loads (positive or negative) and dynamic harmonic load coefficient have a significant relationship with static buckling load. Considering the dynamic axial load, the dynamic equations governing the system and the equations of the boundary conditions are obtained using the Hamilton principle and the method of calculating the changes, and to solve them, the generalized numerical differential squaring method is used. Also in this paper, for the first time, by solving the final algebraic nonlinear equations, the stability region of a relatively thick curved beam is determined as changes in the excitation frequency in terms of dynamic load. To determine the effects of different parameters on natural frequencies, critical buckling load and beam stability range, different modes including different linear and nonlinear kinematic models, different values of static load, length to beam thickness ratio and radius of curvature along with beam types Flat and curved composite layers have been considered. As one of the most important results, the results show that considering different combinations of fibbers, the amount of curvature as well as the geometric nonlinearity of the material is important and will have a great impact on the predicted responses for the dynamic instability region.

ARTICLE INFO

Receive Date: 12 February 2022

Revise Date: 20 June 2022

Accept Date: 01 July 2022

Keywords:

Aircraft wing structure
Dynamic instability
Composite beams
Hamilton principle
Critical buckling load

All rights reserved to Iranian Society of Structural Engineering.

doi: <https://doi.org/10.22065/jsce.2022.329070.2727>

*Corresponding author: Alireza Pourmoayed.

Email address: pourmoayed@mut.ac.ir

تحلیل غیرخطی ناپایداری دینامیکی سازه بال هواپیما بر مبنای تئوری تیر برشی مرتبه اول و روش حل تربیع دیفرانسیلی

علیرضا پورموید^{۱*}، کرامت ملک‌زاده فرد^۲

۱- استادیار، دانشکده مکانیک، دانشگاه پدافند هوایی خاتم‌الانبیاء (ص)، تهران، ایران

۲- استاد، دانشکده هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

چکیده

در این مقاله، تحلیل ناپایداری دینامیکی سازه بال هواپیما مورد بررسی قرار گرفته است. برای این منظور سازه بال هواپیما به صورت تیر یکسرگیردار در نظر گرفته شده و با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول مدل‌سازی انجام و سپس از روابط فن-کارمن برای در نظر گرفتن غیرخطی بودن هندسی ماده استفاده شده است. در ادامه با استفاده از اصل همپلتون در روش انرژی، معادلات دیفرانسیلی با مشتقات جزئی و شرایط مرزی تیر استخراج شده‌اند. روش حل عددی تربیع دیفرانسیلی تعمیم‌یافته برای تبدیل این معادلات به فرم متناظر با مشتقات معمولی به کار گرفته شده است. با حل دسته معادلات غیرخطی جبری نهایی، ناحیه پایداری تیر به صورت تغییرات فرکانس تحریک برحسب بار دینامیکی تعیین شده است. برای تعیین اثرات پارامترهای مختلف بر فرکانس‌های طبیعی، بار بحرانی کمانش و محدوده پایداری تیر، حالت‌های مختلفی شامل انواع مدل‌های سینماتیکی خطی و غیرخطی، مقادیر متفاوت بار استاتیکی، نسبت طول به ضخامت تیر و شعاع انحنا به همراه انواع تیرهای چندلایه کامپوزیت مورد توجه قرار گرفته‌اند. به عنوان یکی از مهم‌ترین دستاوردهای حاصل، نتایج نشان می‌دهند که در نظر گرفتن ترکیب‌های متفاوتی از الیاف، میزان خمیدگی و همین‌طور غیرخطی بودن هندسی ماده حائز اهمیت بوده و تأثیر فراوانی بر پاسخ‌های پیش‌بینی شده خواهد داشت.

کلمات کلیدی: سازه بال هواپیما، ناپایداری دینامیکی، تیرهای کامپوزیتی، اصل همپلتون، بار بحرانی کمانش.

شناسه دیجیتال:		سابقه مقاله:				
doi:	https://doi.org/10.22065/jsce.2022.329070.2727	چاپ	انتشار آنلاین	پذیرش	بازنگری	دریافت
	10.22065/jsce.2022.329070.2727	۱۴۰۲/۰۱/۳۱	۱۴۰۱/۰۴/۱۰	۱۴۰۱/۰۴/۱۰	۱۴۰۱/۰۳/۳۰	۱۴۰۰/۱۱/۲۳
علیرضا پورموید pourmoayed@gmail.com					*نویسنده مسئول: پست الکترونیکی:	

۱- مقدمه

بال هواپیما از جمله سیستم‌هایی است که شرایط کاری چالش برانگیزی داشته و احتمال ناپایداری در آن بسیار بالا است. عمدتاً می‌توان علت این امر را در تغییرات زیاد فشار و دما ناشی از تغییر شرایط جو جستجو کرد. از سوی دیگر، تلفات جانی و همین‌طور تبعات روانی به وجود آمده در جامعه به تبع وقوع سوانح هوایی ناشی از ناپایداری بال هواپیما هزینه بالایی به همراه خواهد داشت. به همین دلیل است که لزوم تحلیل پارامترهای مؤثر بر ناپایداری چنین سازه‌هایی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. چن و همکاران [۱] به تحلیل ناپایداری دینامیکی تیرهای دو سر گیردار کامپوزیت چندلایه پرداخته‌اند. تیر موردنظر نازک فرض شده و اثرات میدان پیزوالکتریک نیز در نظر گرفته شده است. آن‌ها پاسخ‌های دینامیکی سیستم را با در نظر گرفتن مدار حلقه بسته، لایه پیزوالکتریک به عنوان عملگر و لایه پیزوالکتریک دیگر به عنوان حسگر کنترل استفاده نمودند و در نتیجه، اثرات بازخورد کنترلی بر ناپایداری دینامیکی را مشخص کردند. در پژوهشی دیگر، چن و همکاران [۲] ناپایداری دینامیکی تیر ویسکوالاستیک با حرکت شتابدار هارمونیک در راستای محوری را بررسی کردند. در این مقاله، شرایط مرزی به صورت گیردار در دو سوی تیر لحاظ شده و به منظور حل مساله، از روش عددی گلرکین استفاده شده است. آریستی زابال [۳] ناپایداری دینامیکی سازه‌های تیر و ستون را بررسی کرده است. در این تحقیق، از مدل دو بعدی با اثرات تغییر شکل‌های برشی، انتقالی و چرخشی استفاده شده است. نیروی یکنواختی در طول سازه وارد می‌شود و شرایط مرزی معینی برای دو سر تیر یا ستون در نظر گرفته شده است. در این مقاله، علاوه بر مشخصات پایداری، فرکانس‌های طبیعی به همراه بار بحرانی کمانش و شکل مودهای مربوط به ارتعاشات و کمانش نیز گزارش شده است. تعیین محدوده پایداری دینامیکی در سازه‌های تولید شده از مواد مرکب چندلایه نیز در ادبیات فنی پیگیری شده است. از میان تحقیقات موجود می‌توان به موارد ذیل اشاره کرد:

جاندراشکارا و همکاران [۴] مساله ارتعاشات آزاد تیرهای کامپوزیت چندلایه را تحلیل نموده‌اند. آن‌ها لایه‌ها را به صورت متقارن در نظر گرفته و اثرات اینرسی چرخشی و تغییر شکل برشی را در محاسبات لحاظ نمودند. از دیگر ویژگی‌های این تحقیق می‌توان به بررسی شرایط مرزی مختلف اشاره کرد. وانگ و همکاران [۵] با استفاده از روش تحلیل ایزو ژئومتریکی^۱، تحلیلی جامع از کمانش تیرهای کامپوزیت با شرایط مرزی مختلف را ارائه نمودند. معادلات مساله بر اساس اصل کار مجازی استخراج شده‌اند. در مثال‌های عددی بررسی شده، انواع تیرهای کامپوزیت چندلایه با تعداد لایه‌ها و زوایای مختلف در نظر گرفته شده است. امام و نایفه [۶] رفتار ارتعاشات آزاد و پسا-کمانش تیرهای کامپوزیت چندلایه را تحلیل نمودند. برای این کار، معادله مرتبه چهارم دیفرانسیلی - انتگرالی غیرخطی به صورت تحلیلی حل شده و پاسخ‌های دقیق ارائه شده است. چنین کاری برای ترکیب‌های مختلفی از شرایط مرزی گیردار و ساده انجام شده است. همچنین، حول اولین پیکربندی کمانش یافته^۲، مساله خطی ارتعاشات تحت کمانش نیز تحلیل شده و پاسخ‌های تحلیلی مربوطه به دست آمده است. کیرال و همکاران [۷] ناحیه پایداری دینامیکی، فرکانس‌های پایه و نیروی بحرانی کمانش در تیرهای کامپوزیت چندلایه با قید یکسر گیردار را تعیین نمودند. این کار به کمک برنامه‌نویسی رایانه‌ای بر مبنای تحلیل اجزاء محدود انجام شده است. همچنین، صحت‌سنجی‌های مختلفی گزارش شده است که شامل مقایسه نتایج با یافته‌های آزمایشگاهی و تحلیل نرم‌افزاری می‌شود. در پژوهشی دیگر، کاراگاک و همکاران [۸] مساله ناپایداری دینامیکی تیرهای چندلایه یکسر گیرداری را تحلیل کرده‌اند که بر روی بستر الاستیک قرار می‌گیرند. مسائل ناپایداری استاتیکی و دینامیکی تیرهای دوار مخروطی شکل توسط چاند و همکاران [۹] بررسی شده است. با ترکیبی از شرایط مرزی گیردار و ساده، تأثیر نیروی محرک خارجی و تغییرات دما در مدل گنجانده شده است. به کمک رهیافت انرژی، مساله فرمول‌بندی شده و سپس از روش گلرکین برای حل معادلات در حوزه مکان استفاده شده است. در انتها نیز مطالعه پارامتری به ازای عوامل مختلف مانند سرعت چرخش و تغییر دما انجام شده است. در خصوص ناپایداری دینامیکی ورق‌های کامپوزیتی نیز تحقیقاتی صورت گرفته که می‌توان به دو مورد ذیل اشاره نمود.

با در نظر گرفتن نواقص هندسی، ناپایداری ورق‌های کامپوزیتی تقویت‌شده با نانولوله کربنی توسط رفیعی و همکاران [۱۰] تحلیل شده است. مساله مورد مطالعه اثرات میدان‌های کوپله مکانیکی، گرمایی و الکتریکی را در محاسبات لحاظ کرده است. در این تحقیق، تئوری

¹ Isogeometric analysis² Buckled configuration

برشی ورق (تئوری میندلین-ریسنر^۳) به همراه مدل غیرخطی با فرضیات فن-کارمن به کار گرفته شده است. به منظور حل مساله، روش گلرکین برای تبدیل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به معادلات دیفرانسیل معمولی و روش تعادل هارمونیک برای تبدیل این معادلات به معادلات متناظر جبری مورد استفاده قرار گرفته‌اند. در تحقیقی دیگر، ارتعاشات اجباری غیرخطی و همین‌طور ناپایداری دینامیکی غیرخطی در ورق‌های کامپوزیت توسط سینگا و دارییا [۱۱] مطالعه شده است. برای مدل‌سازی دقیق‌تر مساله، اثرات هم‌زمان نیروهای فشاری جانبی و داخل صفحه‌ای در نظر گرفته شده است. بر اساس تئوری برشی مرتبه اول و فرضیات غیرخطی فن-کارمن، انواع شرایط مرزی برای ورق لحاظ شده است. در نتیجه، رفتار غیرخطی سازه به کمک تحلیل اجزاء محدود در دامنه مکان به دست آمده است و پاسخ‌های حالت پایدار در دامنه زمان نیز محاسبه شده است. افزون بر آنچه تا به اینجا در مرور ادبیات بیان شد، به منظور مطالعه جامع‌تر در خصوص رفتار مکانیکی انواع سازه‌های مرکب چندلایه در ابعاد بزرگ و کوچک، می‌توان به مقالات [۱۷-۱۲] مراجعه نمود.

با عنایت به مطالب بیان شده در فوق، ملاحظه می‌شود که تحقیقاتی در حوزه پایداری استاتیکی و دینامیکی سازه‌های با هندسه تیر و ساخته شده از مواد ایزوتروپیک، کامپوزیت چندلایه انجام شده است. با این حال، می‌توان اشکال اساسی بر این تحقیقات وارد نمود و آن این که حجم عمده این پژوهش‌ها به تعیین محدوده پایداری بر اساس فرض خطی بودن مدل سینماتیکی اختصاص داده شده‌اند. آنچه در تحقیق حاضر پیشنهاد شده است، مشتمل بر بررسی ناپایداری دینامیکی انواع تیرهای تخت و خمیده نازک و ضخیم ساخته شده از ماده چندلایه کامپوزیتی است. با پیاده‌سازی چنین پژوهشی، تحلیلی جامع و در عین حال کاربردی ارائه می‌شود که اطلاعات مفیدی را در اختیار جامعه علمی و صنعتی قرار می‌دهد که مورد مشابهی برای آن وجود ندارد. نکته حائز اهمیت و هدف از پژوهش حاضر آن است که چنین داده‌هایی در زمینه ناپایداری دینامیکی بال سازه‌های هوایی کاربرد داشته و به این ترتیب، روند تحلیل مساله در حالت کلی و نتایج به دست آمده به طور خاص مورد استفاده خواهد بود.

۲- استخراج معادلات

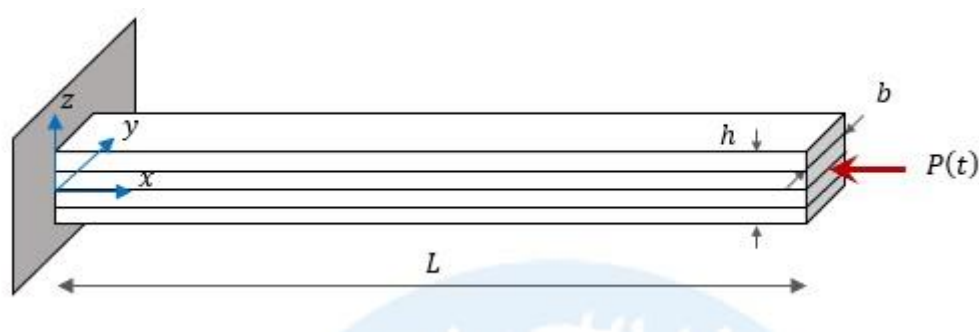
در این بخش، ابتدا هندسه تیر مستقیم و خمیده یکسر گیردار معرفی می‌شود؛ سپس بر اساس تئوری برشی مرتبه اول و با در نظر گرفتن رابطه غیرخطی کرنش - جابجایی، انرژی کرنشی، جنبشی و کار نیروی محوری فرمول‌بندی شده و معادلات حاکم بر تیر چندلایه استخراج می‌شود؛ سپس معادلات حرکت و شرایط مرزی از اصل همیلتون به دست می‌آید؛ و از روش تربیع دیفرانسیلی برای حل معادلات استفاده می‌شود.

۲-۱- مدل هندسی مورد مطالعه

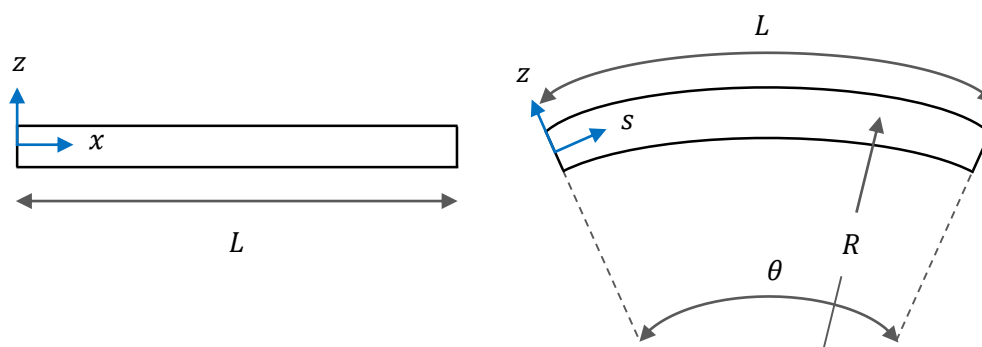
مطابق شکل ۱، تیری با مشخصات سطح مقطع شامل عرض b ، ضخامت h و نیز طول L در نظر گرفته می‌شود. این تیر از جنس مواد مرکب ساخته شده است؛ و به گونه‌ای که دارای لایه‌های مختلفی از فیبر می‌باشد. جنس فیبر از نوع ماده ارتوتروپیک انتخاب شده است و در نتیجه، خواص ماده در جهات گوناگون متفاوت خواهد بود. لذا، مدول الاستیسیته در جهات طولی و عرضی E_{11} و E_{22} ، ضرایب پواسون ν_{12} و ν_{21} ، مدول‌های برشی G_{12} ، G_{23} ، G_{13} و چگالی ρ برای تیر لحاظ می‌شود.

مطابق با شکل ۲، هدف از مطالعه حاضر بررسی رفتار مکانیکی تیر تخت و خمیده در معرض بارگذاری محوری متغیر با زمان است. $P(t)$ این نیروی محوری که منجر به ناپایداری تیر خواهد شد، به صورت هارمونیک اعمال می‌شود. بر اساس نمای دو بعدی نشان داده شده از این تیرها در شکل ۲، ملاحظه می‌شود که متغیرهای مکانیکی تیر تخت (جابجایی، تنش، کرنش) تابعی از مختصات کارتزین x و z هستند. این در حالی است که در تیرهای خمیده، مختصات قطبی s و z در نظر گرفته می‌شود که به ترتیب نشان‌دهنده راستای شعاعی و محیطی هستند. در این حالت، طول تیر برابر است با $L = R\theta$ که R شعاع انحنا بوده و θ زاویه انحنا است.

³ Mindlin-Reissner theory



شکل ۱: شماتیک تیر تخت کامپوزیت چندلایه با شرایط مرزی یکسر گیردار و در معرض ناپایداری دینامیکی



شکل ۲: شماتیک تیرهای تخت و خمیده

۲-۲- معادلات حاکم در تیرهای کامپوزیت چندلایه

برای تعیین معادلات حرکت، تیر خمیده به صورت یک پوسته استوانه‌ای^۴ در نظر گرفته می‌شود که تنش‌ها و کرنش‌ها در راستای طولی آن قابل صرف نظر هستند. در دستگاه $z-y-s$ در شکل ۲ (که y راستای عمود بر صفحه را نشان می‌دهد)، محدوده محورهای مختصات عبارت است از: $0 < s < L$, $0 < y < b$, $-h/2 < z < h/2$. لذا، بر اساس تئوری مرتبه اول برشی، میدان جابجایی تیر برابر است با

$$u_1 = u(s, t) + z\psi(s, t), \quad u_2 = 0, \quad u_3 = w(s, t) \quad (1)$$

با در نظر گرفتن فرضیات غیرخطی فن-کارمن، روابط کرنش - جابجایی خطی با روابط زیر به فرم غیرخطی تبدیل می‌شوند.

$$\varepsilon_{ss} = \frac{\partial u_1}{\partial s} + \frac{1}{R}u_3 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2 = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R} + z\frac{\partial \psi}{\partial s} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2, \quad (2)$$

$$\varepsilon_{sz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial s} + \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{1}{R}u_1\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial s} + \psi - \frac{u}{R}\right)$$

با توجه به روابط ساختاری^۵ زیر

⁴ Cylindrical shell

⁵ Constitutive relations

$$\sigma_{ss} = \bar{Q}_{11}\varepsilon_{ss}, \quad \sigma_{sz} = \bar{Q}_{55}\varepsilon_{sz} \quad (3)$$

نیروها و گشتاورهای منتجه در تیر کامپوزیت به قرار زیر تعریف می‌شوند.

$$N = \int_S \sigma_{ss} dS = A_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 \right) + B_{11} \frac{\partial \psi}{\partial s} \quad (4)$$

$$M = \int_S \sigma_{ss} z dS = B_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 \right) + D_{11} \frac{\partial \psi}{\partial s} \quad (5)$$

$$Q = \int_S \sigma_{sz} dS = A_{55} \left(\frac{\partial w}{\partial s} + \psi - \frac{u}{R} \right) \quad (6)$$

در این روابط، ثوابت الاستیک^۶ در لایه‌ای دلخواه از تیرهای کامپوزیت چندلایه عبارت‌اند از [۱۸، ۱۹]

$$\{A_{11}, B_{11}, D_{11}\} = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{11} \{1, z, z^2\} dz, \quad A_{55} = k_s b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{55} dz \quad (7)$$

در رابطه (۷) ضریب تصحیح برشی بوده و ضرایب سفتی انتقال یافته^۷ به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \quad (8)$$

$$\bar{Q}_{55} = G_{13} \cos^2 \theta + G_{23} \sin^2 \theta \quad (9)$$

که در آن، θ زاویه فیبر با راستای طولی تیر را نشان داده و ضرایب سفتی اولیه برابر هستند با

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{E_{11}\nu_{21}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{E_{22}\nu_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12} \quad (10)$$

چنانچه تیر موردنظر از تعداد N لایه فیبر تشکیل شده باشد، رابطه ثوابت الاستیک به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$A_{11} = b \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{11;k} (h_k - h_{k-1}), \quad B_{11} = \frac{b}{2} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{11;k} (h_k^2 - h_{k-1}^2), \quad D_{11} = \frac{b}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{11;k} (h_k^3 - h_{k-1}^3), \quad (11)$$

$$A_{55} = k_s b \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{55;k} (h_k - h_{k-1}), \quad B_{55} = k_s \frac{b}{2} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{55;k} (h_k^2 - h_{k-1}^2), \quad D_{55} = k_s \frac{b}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{55;k} (h_k^3 - h_{k-1}^3)$$

که $\bar{Q}_{ij;k}$ ضرایب انتقال یافته در لایه k -ام بوده، h_k و h_{k-1} حدود ضخامت لایه هستند.

به این ترتیب، انرژی کرنشی سازه به صورت زیر نوشته می‌شود

⁶ Elastic constants

⁷ Transformed

$$\Pi_s = \frac{1}{2} \int_0^L \int_S (\sigma_{ss} \varepsilon_{ss} + \sigma_{sz} \varepsilon_{sz}) dS ds = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ N \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 \right) + M \frac{\partial \psi}{\partial s} + Q \left(\frac{\partial w}{\partial s} + \psi - \frac{u}{R} \right) \right\} ds \quad (12)$$

همچنین، انرژی جنبشی تیر عبارت است از

$$\Pi_T = \frac{1}{2} \int_0^L \int_S \rho \left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} \right)^2 \right) dS ds = \quad (13)$$

$$\frac{1}{2} \int_0^L \int_S \rho \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} + z \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) dS ds = \frac{1}{2} \int_0^L \left(I_1 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + 2I_2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + I_3 \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 + I_4 \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right) ds$$

که در آن، ضرایب اینرسی^۱ در تیرهای چندلایه طبق روابط زیر نوشته می‌شوند.

$$\{I_1, I_2, I_3\} = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \{1, z, z^2\} dz \quad (14)$$

علاوه بر آن، کار حاصل از نیروی محوری P که در شکل ۱ نشان داده شده است و به ناپایداری سیستم منجر خواهد شد، به شکل

رابطه (۱۵) محاسبه می‌شود

$$\Pi_W = \frac{1}{2} \int_0^L P \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 ds \quad (15)$$

اصل همیلتون بیان می‌دارد که

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(\Pi_T - \Pi_s + \Pi_W) dt = 0 \quad (16)$$

در رابطه (۱۶)، δ نماد تغییرات بوده و t نشان‌دهنده زمان است. با محاسبه تغییرات توابع انرژی نسبت به پارامترهای جابجایی

تیر، معادلات با مشتقات جزئی زیر استخراج می‌شود.

$$\frac{\partial N}{\partial s} + \frac{Q}{R} = I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (17)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \left(N \frac{\partial w}{\partial s} \right) - \frac{N}{R} - P \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = I_4 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (18)$$

$$\frac{\partial M}{\partial s} - Q = I_3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (19)$$

شرایط مرزی در دو انتهای تیر نیز عبارت‌اند از

$$N = 0 \quad \text{or} \quad \delta u = 0 \quad @s = 0, L \quad (20)$$

$$N \frac{\partial w}{\partial s} + Q = 0 \quad \text{or} \quad \delta w = 0 \quad @s = 0, L \quad (21)$$

$$M = 0 \quad \text{or} \quad \delta \psi = 0 \quad @s = 0, L \quad (22)$$

با جایگذاری پارامترهای منته، معادلات نهایی حرکت به شکل زیر نوشته می‌شوند

$$A_{11} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) + B_{11} \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} + \frac{A_{55}}{R} \left(\frac{\partial w}{\partial s} + \psi - \frac{u}{R} \right) = I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (23)$$

$$A_{55} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\partial \psi}{\partial s} - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial s} \right) + A_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) + B_{11} \left(\frac{\partial \psi}{\partial s} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} \frac{\partial w}{\partial s} \right) - \frac{A_{11}}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 \right) - \frac{B_{11}}{R} \frac{\partial \psi}{\partial s} - P \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = I_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (24)$$

$$B_{11} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) + D_{11} \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} - A_{55} \left(\frac{\partial w}{\partial s} + \psi - \frac{u}{R} \right) = I_3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (25)$$

همچنین، شرایط مرزی مختلف نیز عبارت است از

تکیه‌گاه گیردار:

$$u = w = \psi = 0 \quad (26)$$

تکیه‌گاه ساده:

$$u = w = B_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 \right) + D_{11} \frac{\partial \psi}{\partial s} = 0 \quad (27)$$

سر آزاد:

$$A_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 \right) + B_{11} \frac{\partial \psi}{\partial s} = A_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{w}{R} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^3 \right) + B_{11} \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial s} + A_{55} \left(\frac{\partial w}{\partial s} + \psi - \frac{u}{R} \right) = \quad (28)$$

$$B_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 \right) + D_{11} \frac{\partial \psi}{\partial s} = 0$$

۲-۳- روش حل

در این تحقیق، برای حل معادلات از روش تربیع دیفرانسیلی استفاده شده است. به این ترتیب، معادلات دیفرانسیلی با مشتقات جزئی به شکل معادلات دیفرانسیلی معمولی در حوزه زمان تبدیل می‌شوند. برای این کار در این روش، از اپراتورهای مشتق‌گیر تعریف شده بهره گرفته می‌شود. این امر مستلزم گسسته‌سازی دامنه تیر است. با در نظر گرفتن n نقطه در طول تیر، توزیع نقاط به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$s_i = \frac{L}{2} \left(1 - \cos \frac{i-1}{n-1} \pi \right), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (29)$$

درجات آزادی سیستم شامل مؤلفه‌های جابجایی در این نقاط هستند. لذا، بردارهای این مؤلفه‌ها عبارت‌اند از

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n]^T, \quad \mathbf{w} = [w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_n]^T, \quad \Psi = [\psi_1 \quad \psi_2 \quad \dots \quad \psi_n]^T, \quad \dots \quad (30)$$

به این ترتیب، مشتق مکانی r -ام برداری مانند \mathbf{u} به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\frac{\partial^r \mathbf{u}}{\partial x^r} = \mathbf{D}^{(r)} \mathbf{u} \quad (31)$$

که در آن، درایه‌های ماتریس ضرایب وزنی از مرتبه اول ($\mathbf{D}^{(1)} = [D_{ij}^{(1)}]$) تا مرتبه‌های بالا ($\mathbf{D}^{(r)} = [D_{ij}^{(r)}]$) به شکل زیر

تعریف می‌شوند

$$D_{ij}^{(1)} = \frac{\prod_{k=1, k \neq i}^n (x_i - x_k)}{(x_i - x_j) \prod_{k=1, k \neq j}^n (x_j - x_k)}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j \quad (32)$$

$$D_{ij}^{(r)} = r \left(D_{ii}^{(r-1)} D_{ij}^{(1)} - \frac{D_{ij}^{(r-1)}}{(\xi_i - \xi_j)} \right), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j, \quad r = 2, \dots, n-1 \quad (33)$$

پس از تعدادی عملیات ریاضی، فرم گسسته‌سازی شده معادلات حرکت تیر چندلایه به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$A_{11} \left(\mathbf{D}^{(2)} \mathbf{u} + \frac{1}{R} \mathbf{D}^{(1)} \mathbf{w} + (\mathbf{D}^{(1)} \mathbf{w}) \circ (\mathbf{D}^{(2)} \mathbf{w}) \right) + B_{11} \mathbf{D}^{(2)} \Psi = I_1 \ddot{\mathbf{u}} + I_2 \ddot{\Psi} \quad (34)$$

$$A_{55} \left(\mathbf{D}^{(2)} \mathbf{w} + \mathbf{D}^{(1)} \Psi - \frac{1}{R} \mathbf{D}^{(1)} \mathbf{u} \right) + A_{11} \left((\mathbf{D}^{(1)} \mathbf{u}) \circ (\mathbf{D}^{(2)} \mathbf{w}) + (\mathbf{D}^{(2)} \mathbf{u}) \circ (\mathbf{D}^{(1)} \mathbf{w}) + \frac{3}{2} (\mathbf{D}^{(1)} \mathbf{w}) \circ (\mathbf{D}^{(1)} \mathbf{w}) \circ (\mathbf{D}^{(2)} \mathbf{w}) \right) \quad (35)$$

$$+ B_{11} \left((\mathbf{D}^{(1)} \Psi) \circ (\mathbf{D}^{(2)} \mathbf{w}) + (\mathbf{D}^{(2)} \Psi) \circ (\mathbf{D}^{(1)} \mathbf{w}) \right) - \frac{A_{11}}{R} \left(\mathbf{D}^{(1)} \mathbf{u} + \frac{1}{R} \mathbf{w} + \frac{1}{2} (\mathbf{D}^{(1)} \mathbf{w}) \circ (\mathbf{D}^{(1)} \mathbf{w}) \right) - \frac{B_{11}}{R} \mathbf{D}^{(1)} \Psi$$

$$- P \mathbf{D}^{(2)} \mathbf{w} = I_1 \ddot{\mathbf{w}}$$

$$B_{11} \left(\mathbf{D}^{(2)} \mathbf{u} + \frac{1}{R} \mathbf{D}^{(1)} \mathbf{w} + (\mathbf{D}^{(1)} \mathbf{w}) \circ (\mathbf{D}^{(2)} \mathbf{w}) \right) + D_{11} \mathbf{D}^{(2)} \Psi - A_{55} \left(\mathbf{D}^{(1)} \mathbf{w} + \Psi - \frac{1}{R} \mathbf{u} \right) = I_3 \ddot{\Psi} + I_2 \ddot{\mathbf{u}} \quad (36)$$

در این روابط، \cdot نماد مشتق زمانی بوده و ضرب هادامارد^۹ \circ بیانگر ضرب درایه به درایه در بردارها است. اکنون معادلات ۳۴ تا ۳۶ را به فرم استاندارد معادلات دافینگ^{۱۰} در مسائل دینامیکی بازنویسی می‌کنیم.

$$M\ddot{q} + (K - PK_g)q = 0 \quad (37)$$

که در رابطه (۳۷)، بردار جابجایی q برابر است با

$$q = \begin{bmatrix} u \\ w \\ \psi \end{bmatrix} \quad (38)$$

همچنین، ماتریس اینرسی M و ماتریس سفتی هندسی K_g به ترتیب عبارت‌اند از

$$M = \begin{bmatrix} I_1 I & 0 & I_2 I \\ 0 & I_1 I & 0 \\ I_2 I & 0 & I_3 I \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$K_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & D^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

که $I = D^{(0)}$ بیانگر ماتریس همانی^{۱۱} است. همچنین، ماتریس سفتی سازه شامل قسمت خطی (K_l) ، قسمت غیرخطی مرتبه دوم (K_{n1}) و غیرخطی مرتبه سوم (K_{n2}) به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$K = K_l + \frac{1}{2} K_{n1} + \frac{1}{3} K_{n2} \quad (41)$$

$$K_l = \begin{bmatrix} A_{11} D^{(2)} & \frac{A_{11}}{R} D^{(1)} & B_{11} D^{(2)} \\ -\left(\frac{A_{11} + A_{55}}{R}\right) D^{(1)} & A_{55} D^{(2)} - \frac{A_{11}}{R^2} D^{(0)} & \left(A_{55} - \frac{B_{11}}{R}\right) D^{(1)} \\ B_{11} D^{(2)} + \frac{A_{55}}{R} D^{(0)} & \left(\frac{B_{11}}{R} - A_{55}\right) D^{(1)} & D_{11} D^{(2)} - A_{55} D^{(0)} \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$K_{n1} = P_1(\langle Q_1 q \rangle Q_2 + \langle Q_2 q \rangle Q_1) \quad (43)$$

$$K_{n2} = P_2(\langle Q_3 q \rangle \langle Q_4 q \rangle Q_5 + \langle Q_5 q \rangle \langle Q_3 q \rangle Q_4 + \langle Q_4 q \rangle \langle Q_5 q \rangle Q_3) \quad (44)$$

در روابط مربوط به قسمت‌های غیرخطی، $\langle X \rangle$ ماتریس قطری^{۱۲} متناظر با بردار X است. ماتریس‌های ضرایب و اپراتورهای مشتق-گیر به ترتیب عبارت‌اند از:

⁹ Hadamard product

¹⁰ duffing equation

¹¹ identity matrix

¹² diagonal matrix

$$P_1 = \begin{bmatrix} A_{11}I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11}I & A_{11}I & B_{11}I & B_{11}I & -\frac{A_{11}}{2R}I \\ B_{11}I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2}A_{11}I \\ 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & D^{(1)} & 0 \\ D^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & D^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & D^{(1)} \\ 0 & D^{(1)} & 0 \\ 0 & D^{(1)} & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & D^{(2)} & 0 \\ 0 & D^{(2)} & 0 \\ D^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & D^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & D^{(2)} \\ 0 & D^{(1)} & 0 \end{bmatrix}, \quad (46)$$

$$Q_3 = [0 \quad D^{(1)} \quad 0], Q_4 = [0 \quad D^{(1)} \quad 0], Q_5 = [0 \quad D^{(2)} \quad 0]$$

۳- تحلیل ناپایداری دینامیکی

برای تحلیل ناپایداری دینامیکی بال کامپوزیت هواپیما، بار محوری وارده بر تیر یکسر گیردار شامل نیروهای استاتیکی و دینامیکی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۲۰].

$$P = (\alpha + \beta \cos(\Omega t))P_{cr} \quad (47)$$

در رابطه (۴۷)، Ω فرکانس تحریک خارجی است. همچنین، نیروهای استاتیکی و دینامیکی به صورت ضرایبی (α و β) از بار بحرانی کمانش P_{cr} در نظر گرفته شده است. از آنجا که نیروی اعمال شده به صورت هارمونیک است، پیش‌بینی می‌شود که پاسخ زمانی مساله دارای دوره تناوب mT باشد که در آن $T = 2\pi/\Omega$ دوره تناوب و m یک عدد صحیح است. طبق بررسی‌های انجام شده [۲۱]، ملاحظه می‌شود که پاسخ با دوره $2T$ پاسخ غالب در ناپایداری دینامیکی است. بنابراین، می‌توان پاسخ زیر را پیشنهاد نمود

$$q = \bar{q}_1 \cos(\Omega t/2) + \bar{q}_2 \sin(\Omega t/2) \quad (48)$$

با جایگذاری رابطه (۴۸) در معادلات حرکت، داریم

$$\left(-\frac{\Omega^2}{4} \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \left(\alpha + \frac{1}{2}\beta\right)P_{cr}K_g & 0 \\ 0 & \left(\alpha - \frac{1}{2}\beta\right)P_{cr}K_g \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (49)$$

مشاهده می‌شود که معادله ماتریسی - برداری فوق دو رابطه مستقل از یکدیگر را نشان می‌دهد. لذا، فرم نهایی معادلات عبارت‌اند

از

$$\left(-\frac{\Omega^2}{4}M + K - \left(\alpha \pm \frac{1}{2}\beta\right)P_{cr}K_g \right) \bar{q} = 0 \quad (50)$$

به این ترتیب معادله مقدار ویژه رابطه (۵۰) حل شده و فرکانس تحریک Ω محاسبه خواهد شد.

۴- تحلیل نتایج

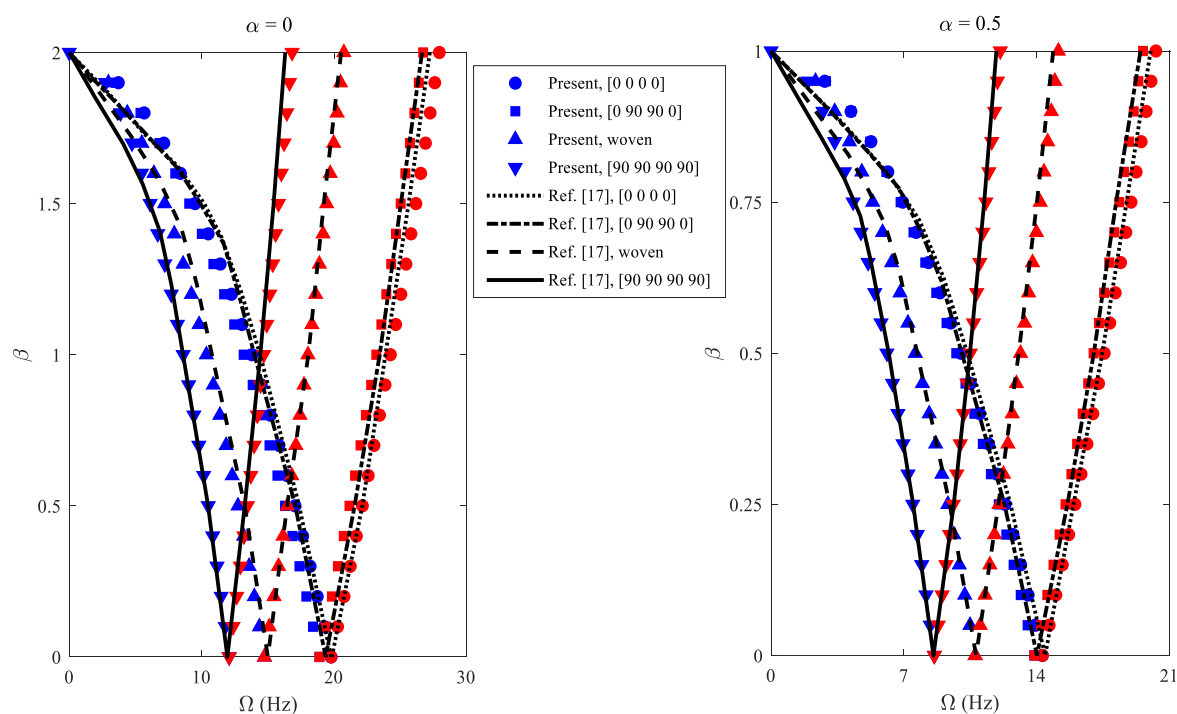
۴-۱- اعتبارسنجی

در این بخش به منظور صحت سنجی تیرهای کامپوزیت چندلایه مورد بررسی قرار گرفته است. برای این منظور در شکل ۳ تغییرات فرکانس تحریک بر حسب مؤلفه دینامیکی بار برای انواع تیرهای کامپوزیت تخت نشان داده شده است. جنس مواد چندلایه شامل فیبرهای [0/0/0/0]، [0/90/90/0]، [90/90/90/90] و مواد بافته شده^{۱۳} با ضرایب الاستیک و پارامترهای هندسی زیر است.

$$E_{11} = 40.51 \text{ GPa}, E_{22} = 13.69 \text{ GPa}, G_{12} = G_{13} = G_{23} = 3.1 \text{ GPa}, \nu = 0.22, \rho = 1830 \text{ kg/m}^3$$

$$L = 300 \text{ mm}, b = 19 \text{ mm}, h = 1.2 \text{ mm}$$

برای اطمینان از صحت محاسبات صورت گرفته، نتایج با مقاله [۷] نیز مقایسه شده است. برای این منظور، از غیرخطی بودن هندسی صرف نظر شده و مدل سینماتیکی خطی در نظر گرفته شده است. مشاهده می شود که به ازای مقادیر مختلف ضریب بار استاتیکی، $\alpha = 0.5$ و $\alpha = 0$ نتایج حاضر تطابق مناسبی با مرجع [۷] دارند



شکل ۳: مقایسه ناحیه پایداری حاصل از مطالعه حاضر و مقاله [۷] در تیرهای چندلایه

پارامترهای این ماده عبارتند از [۴]

$$E_{11} = 145 \text{ GPa}, E_{22} = 9.6 \text{ GPa}, G_{12} = G_{13} = 4.1 \text{ GPa}, G_{23} = 3.4 \text{ GPa}, \nu = 0.3, \rho = 1520 \text{ kg/m}^3$$

همچنین سطح مقطع تیر به صورت مربعی ($b/h = 1$) بوده و ضخامت آن $h = 1 \text{ cm}$ لحاظ می شود.

¹³ woven material

۲-۴- بررسی اثرات پارامترهای مختلف بر پایداری دینامیکی تیر

پیش از بررسی اثرات پارامترهای مختلف بر پایداری دینامیکی تیر، روند همگرایی^{۱۴} پاسخها در روش تربیع دیفرانسیلی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. جدول ۱ فرکانس پایه^{۱۵} بدون بعد و نیز بار کمانش بدون بعد در سه مورد از تیرهای چهار لایه کامپوزیتی را ارائه کرده است. در هر مورد، روند تغییرات پاسخهای به دست آمده با افزایش تعداد نقاط گسسته سازی شده در روش حل موجود بررسی می‌شود. با توجه به اعداد گزارش شده، می‌توان نتیجه گرفت که با اتخاذ $n = 40$ در روش تربیع دیفرانسیلی، پاسخهایی همگرا و بهینه تولید خواهد شد. در جدول ۲ بررسی جامعی از نحوه تغییرات فرکانس طبیعی و بار بحرانی کمانش در انواع تیرهای کامپوزیت تخت پیاده‌سازی شده است. برای این منظور، تیرهای دو، سه و چهار لایه در انواع عمودی^{۱۶} و زاویه‌ای^{۱۷} با زاویه‌های مختلف فیبر شامل ۰، ۱۵، ۳۰، ۴۵، ۶۰، ۷۵ و ۹۰ درجه در نظر گرفته شده‌اند. همچنین با تغییر نسبت طول به ضخامت، فرکانس پایه و بار کمانش تیرهای ضخیم ($L/h = 8$) و نازک ($L/h = 100$) مورد تحلیل قرار می‌گیرد.

جدول ۱: مطالعه روند همگرایی پاسخها در تیرهای چندلایه؛ $L/h = 20$

fundamental frequency ($\omega L^2 \sqrt{\rho/E_{11} h^2}$)							
ply angle	n						
	20	25	30	35	40	45	50
[0/0/0/0]	1.004	1.0246	1.0350	1.0391	1.0402	1.0402	1.042
[0/90/90/0]	0.9442	0.9637	0.9735	0.9774	0.9784	0.9784	0.9784
[45/-45/-45/45]	0.5716	0.5774	0.5797	0.5803	0.5803	0.5803	0.5803
critical buckling load ($P_{cr} L^2 / E_{11} b h^3 \times 1e4$)							
ply angle	n						
	20	25	30	35	40	45	50
[0/0/0/0]	3.3486	3.4175	3.4526	3.4665	3.4700	3.4700	3.4700
[0/90/90/0]	3.0220	3.0527	3.0649	3.0680	3.0680	3.0680	3.0680
[45/-45/-45/45]	1.0315	1.0528	1.0635	1.0678	1.0689	1.0689	1.0689

با مقایسه مقادیر به دست آمده با مراجع مرتبط موجود در این حوزه، مانند مقاله [۵]، می‌توان به صحت روند تغییرات پی برد. مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت طول به ضخامت تیر، فرکانس بی‌بعد و نیز بار بحرانی بی‌بعد محاسبه شده نیز افزایش می‌یابد. همچنین با بالا رفتن زاویه فیبرها در تیرهای کامپوزیت چندلایه متقارن (مانند $[\theta/-\theta/-\theta/\theta]$) و نامتقارن (مانند $[\theta/-\theta/\theta/-\theta]$)، فرکانس پایه و نیز بار کمانش کاهش می‌یابند. نکته حائز اهمیت دیگر آنکه با فرض یکسان بودن زوایای فیبرها، تعداد لایه‌ها تأثیر چندانی

¹⁴ convergence

¹⁵ fundamental frequency

¹⁶ cross-ply

¹⁷ angle-ply

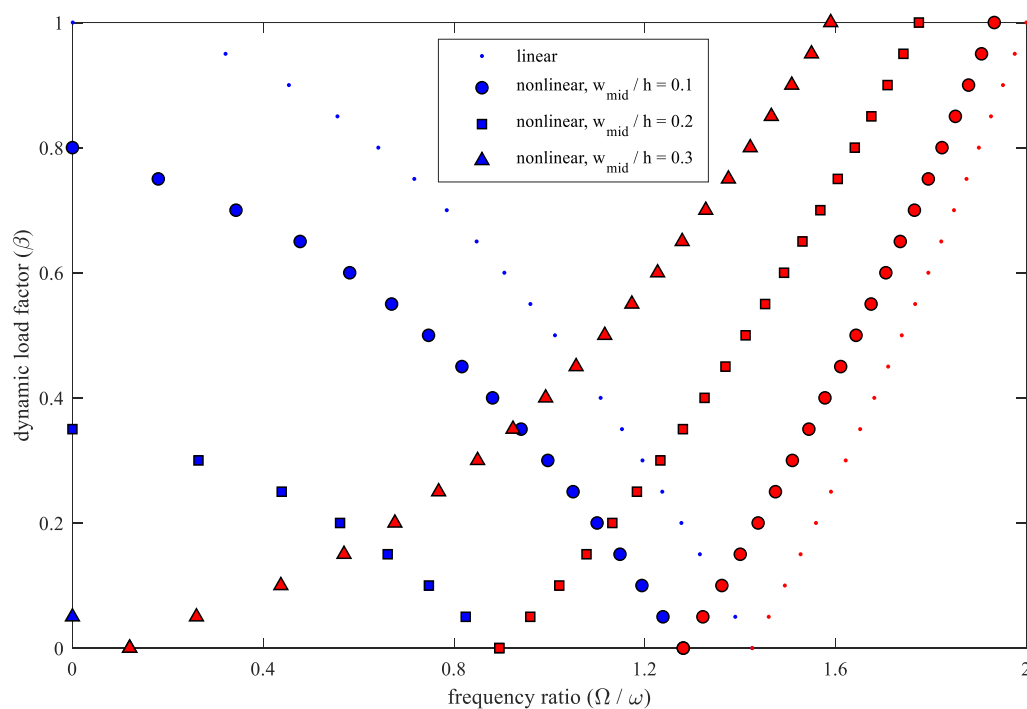
بر پارامترهای ارتعاشی و پایداری تیر نخواهد داشت. به طور مثال، ملاحظه می‌شود که پاسخ‌های به دست آمده در تیرهای $[\theta/-\theta/\theta]$ و $[\theta/-\theta/-\theta/\theta]$ تقریب یکسان هستند.

جدول ۲: فرکانس طبیعی و بار بحرانی کمانش در تیرهای چندلایه

type of composite beam (ply angle)	fundamental frequency ($\omega L^2 \sqrt{\rho/E_{11}h^2}$)				critical buckling load ($P_{cr}L^2/E_{11}bh^3 \times 1e4$)			
	L/h				L/h			
	8	15	50	100	8	15	50	100
cross-ply								
[0/90]	0.487	0.501	0.506	0.506	0.588	0.606	0.613	0.613
[0/90/0]	0.917	1.00	1.041	1.044	2.207	2.487	2.607	2.615
[0/90/90/0]	0.883	0.962	0.996	0.999	2.037	2.282	2.385	2.393
angle-ply (2-layer)								
[0/0]	0.936	1.023	1.060	1.063	2.294	2.579	2.700	2.709
[15/-15]	0.889	0.963	0.995	0.997	2.053	2.281	2.377	2.383
[30/-30]	0.754	0.799	0.818	0.819	1.446	1.560	1.605	1.608
[45/-45]	0.558	0.577	0.584	0.585	0.773	0.806	0.818	0.819
[60/-60]	0.370	0.376	0.378	0.378	0.334	0.341	0.343	0.343
[75/-75]	0.279	0.282	0.283	0.284	0.190	0.192	0.192	0.192
[90/-90]	0.270	0.273	0.274	0.274	0.177	0.179	0.179	0.179
angle-ply (3-layer)								
[0/0/0]	0.936	1.023	1.060	1.063	2.294	2.579	2.700	2.709
[15/-15/15]	0.889	0.963	0.995	0.997	2.053	2.281	2.377	2.383
[30/-30/30]	0.754	0.799	0.818	0.819	1.446	1.560	1.605	1.608
[45/-45/45]	0.558	0.577	0.584	0.585	0.773	0.806	0.818	0.819
[60/-60/60]	0.370	0.376	0.378	0.378	0.334	0.341	0.343	0.343
[75/-75/75]	0.279	0.282	0.283	0.284	0.190	0.192	0.192	0.192
[90/-90/90]	0.270	0.273	0.274	0.274	0.177	0.179	0.179	0.179
angle-ply (4-layer)								
[0/0/0/0]	0.936	1.023	1.060	1.063	2.294	2.579	2.700	2.709
[15/-15/-15/15]	0.889	0.963	0.995	0.997	2.053	2.281	2.377	2.383
[30/-30/-30/30]	0.754	0.799	0.818	0.819	1.446	1.560	1.605	1.608
[45/-45/-45/45]	0.558	0.577	0.584	0.585	0.773	0.806	0.818	0.819
[60/-60/-60/60]	0.370	0.376	0.378	0.378	0.334	0.341	0.343	0.343
[75/-75/-75/75]	0.279	0.282	0.283	0.284	0.190	0.192	0.192	0.192

[90/-90/-90/90]	0.270	0.273	0.274	0.274	0.177	0.179	0.179	0.179
[15/-15/15/-15]	0.889	0.963	0.995	0.997	2.053	2.281	2.377	2.383
[30/-30/30/-30]	0.754	0.799	0.818	0.819	1.446	1.560	1.605	1.608
[45/-45/45/-45]	0.558	0.577	0.584	0.585	0.773	0.806	0.818	0.819
[60/-60/60/-60]	0.370	0.376	0.378	0.378	0.334	0.341	0.343	0.343
[75/-75/75/-75]	0.279	0.282	0.283	0.284	0.190	0.192	0.192	0.192
[90/-90/90/-90]	0.270	0.273	0.274	0.274	0.177	0.179	0.179	0.179

شکل ۴ به تعیین محدوده ناپایداری تیرهای چندلایه بر اساس مدل‌های خطی و غیرخطی سینماتیکی اختصاص داده شده است. می‌دانیم که به کمک تحلیل غیرخطی، می‌توان تغییر شکل‌های بزرگ در سازه را به دست آورد. برای این منظور، جابجایی عرضی مشخصی برای میانه تیر یکسر گیردار (w_{mid}) در نظر گرفته شده است و مقادیر فرکانسی متناظر با آن به دست می‌آید.



شکل ۴: اثرات غیرخطی بودن هندسی بر محدوده پایداری تیر چندلایه؛

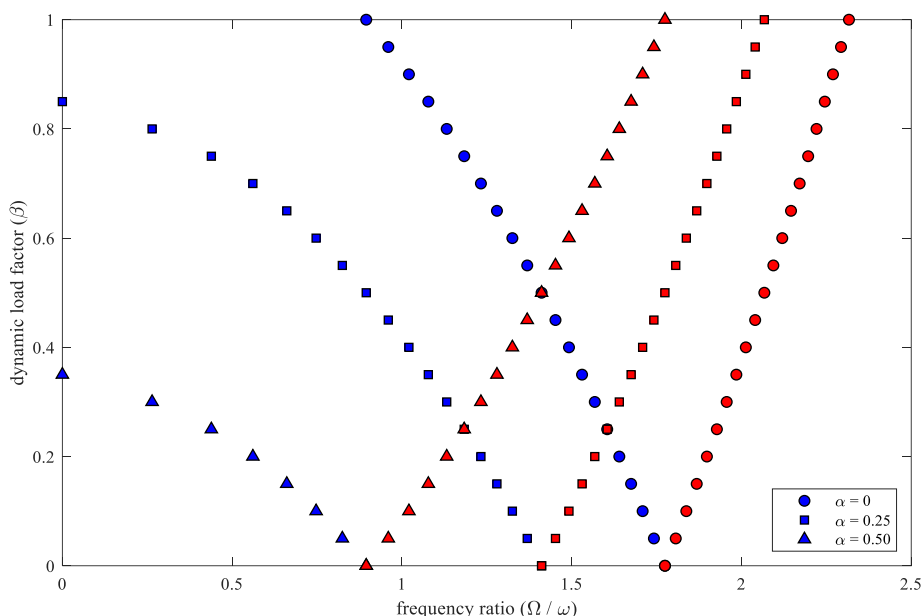
$$[45/-45/-45/45], L/h = 20, \alpha = 0.5$$

مشاهده می‌شود که با در نظر گرفتن روابط غیرخطی کرنش - جابجایی، فرکانس ناپایداری دینامیکی تیر افزایش می‌یابد. این امر نشان‌دهنده آن است که رفتار ماده موردنظر از نوع سفت شوندگی^{۱۸} است؛ به این معنا که با افزایش دامنه حرکت فرکانس نیز افزایش می‌یابد. لذا هنگامی که سازه بال هواپیما در معرض بارگذاری دینامیکی محوری قرار گرفته و تغییر شکل‌های بزرگی را تجربه کند، استفاده از

¹⁸ hardening

مدل غیرخطی هندسی ضروری خواهد بود. لازم به ذکر است که در مقابل، نوع نرم‌شوندگی^{۱۹} رفتار ماده عبارت است از آنکه افزایش میزان جابجایی با کاهش فرکانس تحریک همراه باشد.

در شکل ۵ اثرات ضریب بار استاتیکی بر محدوده پایداری تیر کامپوزیت یکسر گیردار بررسی شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش مقادیر بار استاتیکی، فرکانس‌های ناپایداری دینامیکی کاهش قابل‌ملاحظه‌ای دارند. به طور مثال، در نبود مؤلفه دینامیکی بار ($\beta = 0$) دیده می‌شود که فرکانس تحریک در حالت $\alpha = 0.75$ به مقدار نیمی از فرکانس پایه تیر ($\alpha = 0$) کاهش خواهد یافت. همچنین لازم به ذکر است که با افزایش α ، فاصله دو شاخه سمت چپ و راست به شکل ملموسی افزایش می‌یابد که بیانگر افزایش محدوده ناپایداری تیر است.

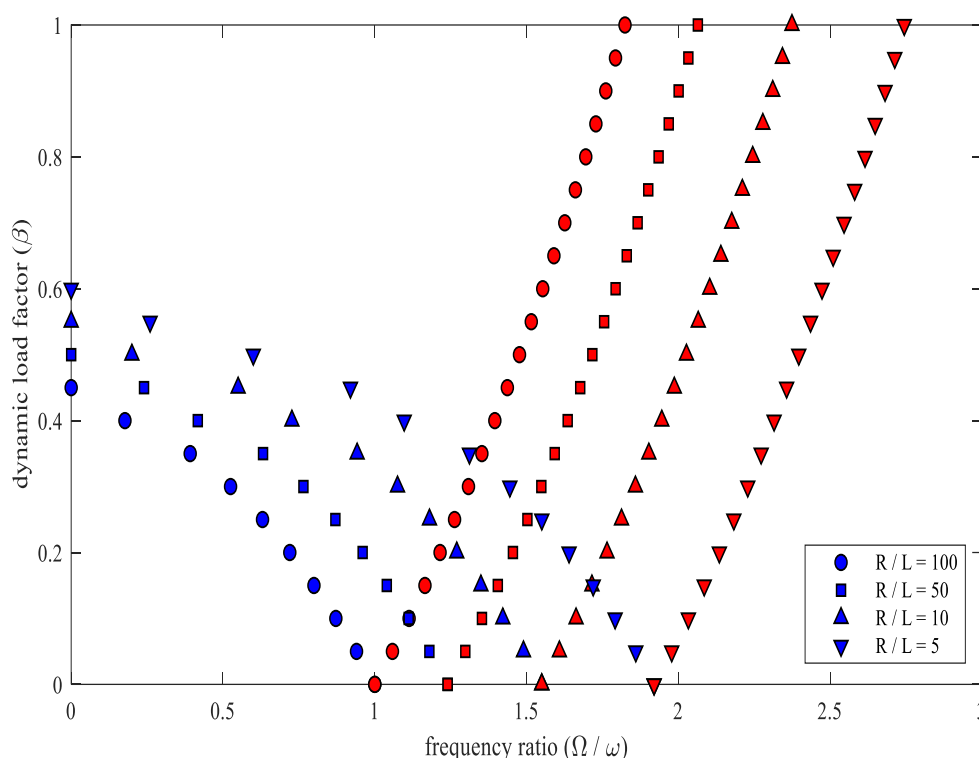


شکل ۵: اثرات ضریب بار استاتیکی بر محدوده پایداری تیر چندلایه؛

$$[45/-45/-45/45] \quad L/h = 20 \quad w_{mid}/h = 0.2$$

شکل ۶ به بررسی اثرات انحنا در تیرهای خمیده کامپوزیت چندلایه اختصاص داده شده است. تغییرات نسبت شعاع به طول تیر از مقدار $R/L = 100$ که نشان‌دهنده تیر تخت بوده تا مقدار $R/L = 5$ که تیر با انحنای نسبتاً بالا را نشان می‌دهد، در نظر گرفته شده است. به این ترتیب ملاحظه می‌شود که لحاظ کردن انحنای تیر تأثیر قابل‌ملاحظه‌ای بر تعیین ناحیه ناپایداری سازه خواهد داشت.

¹⁹ softening



شکل ۶: اثرات شعاع انحنای بر محدوده پایداری تیر چندلایه؛

$$[45/-45/-45/45], L/h = 20, w_{mid}/h = 0.2, \alpha = 0.5$$

۵- نتیجه گیری

در این پژوهش به بررسی ناپایداری دینامیکی سازه بال هواپیما که به صورت یک تیر یکسر گیردار مدل سازی گردیده پرداخته شده است. برای این منظور پس از استخراج روابط مربوطه، ابتدا نتایج مطالعه حاضر با مراجع مرتبط مقایسه گردیده است. سپس، تأثیرات انواع پارامترهای مؤثر همانند غیرخطی بودن هندسی، مؤلفه استاتیکی بار، نسبت طول به ضخامت تیر و میزان انحنا بر ناحیه پایداری، فرکانسهای طبیعی و بار بحرانی کمانش در تیر یکسر گیردار بررسی می شود. مطابق انتظار، در نتایج عددی به دست آمده مشاهده می شود که با افزایش شعاع انحنای مدل تیر خمیده به تیر تخت نزدیک می شود. از این رو، برای تحلیل غیرخطی تیر تخت که منجر به پاسخهای با دقت مناسب شود، نسبت شعاع به طول $R/L = 1000$ در نظر گرفته شده است. نتایج حاصل در قالب شکل های ۳ تا ۶ و جداول ۱ و ۲ ارائه شده است که به صورت خلاصه در ذیل آمده است.

- ۱- با افزایش نسبت طول به ضخامت تیر، فرکانس بی بعد و نیز بار بحرانی بی بعد افزایش می یابد.
- ۲- با بالا رفتن زاویه فیبرها در تیرهای کامپوزیت چندلایه متقارن (مانند $[\theta/-\theta/-\theta/\theta]$) و نامتقارن (مانند $[\theta/-\theta/\theta/-\theta]$)، فرکانس پایه و نیز بار کمانش کاهش می یابند.
- ۳- با فرض یکسان بودن زوایای فیبرها، تعداد لایهها تأثیر چندانی بر پارامترهای ارتعاشی و پایداری تیر نخواهد داشت.
- ۴- با در نظر گرفتن روابط غیرخطی کرنش - جابجایی، فرکانس ناپایداری دینامیکی تیر افزایش می یابد.
- ۵- با افزایش مقادیر بار استاتیکی، فرکانسهای ناپایداری دینامیکی کاهش قابل ملاحظه ای دارند.
- ۶- لحاظ کردن انحنای تیر تأثیر قابل ملاحظه ای بر تعیین ناحیه ناپایداری سازه خواهد داشت.

مراجع

- [1] Chen, L. W., Lin, C. Y., and Wang, C. C., (2002), "Dynamic stability analysis and control of a composite beam with piezoelectric layers", *Composite Structures*, 56(1), pp. 97-109.
- [2] Chen, L. Q., Yang, X. D., and Cheng, C. J., (2004), "Dynamic stability of an axially accelerating viscoelastic beam", *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 23(4), pp. 659-666.
- [3] Aristizabal-Ochoa, J. D., (2007), "Static and dynamic stability of uniform shear beam-columns under generalized boundary conditions", *Journal of Sound and Vibration*, 307(1-2), pp. 69-88.
- [4] Chandrashekhara, K., Krishnamurthy, K., and Roy, S., (1990), "Free vibration of composite beams including rotary inertia and shear deformation", *Composite Structures*, 14(4), pp. 269-279.
- [5] Wang, X., Zhu, X., and Hu, P., (2015), "Isogeometric finite element method for buckling analysis of generally laminated composite beams with different boundary conditions", *International Journal of Mechanical Sciences*, 104, pp. 190-199.
- [6] Emam, S. A., and Nayfeh, A. H., (2009), "Postbuckling and free vibrations of composite beams", *Composite Structures*, 88(4), pp. 636-642.
- [7] Kiral, B. G., Kiral, Z., and Ozturk, H., (2015), "Stability analysis of delaminated composite beams", *Composites Part B: Engineering*, 79, pp. 406-418.
- [8] Karaagac, C., ÖZTÜRK, H., and Sabuncu, M., (2007), "Lateral dynamic stability analysis of a cantilever laminated composite beam with an elastic support", *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 7(03), pp. 377-402.
- [9] Chand, R. R., Behera, P. K., Pradhan, M., and Dash, P., (2019), "Study of Static and Dynamic Stability of an Exponentially Tapered Revolving Beam Exposed to a Variable Temperature Grade under Axial Loading", *International Journal of Acoustics and Vibration*, 24(3), pp. 504-510.
- [10] Rafiee, M., He, X. Q., and Liew, K. M., (2014), "Non-linear dynamic stability of piezoelectric functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates with initial geometric imperfection", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 59, pp. 37-51.
- [11] Singha, M. K., and Daripa, R., (2009), "Nonlinear vibration and dynamic stability analysis of composite plates", *Journal of Sound and Vibration*, 328(4-5), pp. 541-554.
- [12] Sahmani, S., and Bahrami, M., (2015), "Size-dependent dynamic stability analysis of microbeams actuated by piezoelectric voltage based on strain gradient elasticity theory", *Journal of Mechanical Science and Technology*, 29(1), pp. 325-333.
- [13] Lim, C. W., Wang, C. M., and Kitipornchai, S., (1997), "Timoshenko curved beam bending solutions in terms of Euler-Bernoulli solutions", *Archive of Applied Mechanics*, 67(3), pp. 179-190.
- [14] Wang, J., Shen, H., Zhang, B., and Liu, J., (2018), "Studies on the dynamic stability of an axially moving nanobeam based on the nonlocal strain gradient theory", *Modern Physics Letters B*, 32(16), pp. 1850167.
- [15] Pavlović, I., Pavlović, R., Ćirić, I., and Karličić, D., (2015), "Dynamic stability of nonlocal Voigt-Kelvin viscoelastic Rayleigh beams", *Applied Mathematical Modelling*, 39(22), pp. 6941-6950.
- [16] Saffari, S., Hashemian M., and Toghraie, D., (2017), "Dynamic stability of functionally graded nanobeam based on nonlocal Timoshenko theory considering surface effects", *Physica B: Condensed Matter*, 520, pp. 97-105.
- [17] Vatan Can, S., Cankaya, P., Ozturk, H., and Sabuncu, M., (2020), "Vibration and dynamic stability analysis of curved beam with suspended spring-mass systems", *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, pp. 1-15.
- [18] Ansari, R., and Gholami, R., (2015), "Dynamic stability of embedded single walled carbon nanotubes including thermal effects", *Iranian Journal of Science and Technology Transactions of Mechanical Engineering*, 39, pp. 153-161.
- [19] Zamanzadeh, M., Rezaadeh, G., Jafarsadeghi-Poornaki, I., and Shabani, R., (2013), "Static and dynamic stability modeling of a capacitive FGM micro-beam in presence of temperature changes", *Applied Mathematical Modelling*, 37(10-11), pp. 6964-6978.

- [20] Fu, Y., Wang, J., and Mao, Y., (2012), "Nonlinear analysis of buckling, free vibration and dynamic stability for the piezoelectric functionally graded beams in thermal environment", *Applied Mathematical Modelling*, 36(9), pp. 4324-4340.
- [21] Zheng, X., Zhang, J., and Zhou, Y., (2005), "Dynamic stability of a cantilever conductive plate in transverse impulsive magnetic field", *International Journal of Solids and Structures*, 42(8), pp. 2417-2430.