

Upper Bound Stability Analysis of Rock Slopes Considering Hoek-Brown Failure Criterion

Meysam Imani^{1*}, Arsham Amini²

1- Assistant Professor, Geotechnical Engineering Group, Amirkabir University of Technology, Garmsar Campus, Garmsar, Iran

2- M.Sc., Geotechnical Engineering Group, Amirkabir University of Technology, Garmsar Campus, Garmsar, Iran

ABSTRACT

Rock slopes are commonly more stable than soil slopes when subjected to different types of external loadings. Despite the fact that rock masses are commonly stronger than soils, stability analysis is necessary even for rock slopes, since any failure of them may result in a huge loss of lives and wealth. In the present paper, upper bound method of limit analysis is employed for stability analysis of rock slopes obeying Hoek-Brown failure criterion. In many previous studies based on the upper bound method, the nonlinear Hoek-Brown criterion was linearized using a single straight line which resulted in reducing the accuracy of the obtained results. For improving the accuracy of the factor of safety of Hoek-Brown rock slopes, the present paper proposes a multi-tangential technique for linearizing the Hoek-Brown criterion, in which, the nonlinear criterion is replaced by several tangential lines to the main nonlinear criterion. This method results in improving the accuracy of the obtained factor of safety. Using the obtained results, the effect of different important parameters on the factor of safety of rock slopes can be evaluated. Increasing the uniaxial compressive strength of intact rock, Geological strength index and the Hoek-brown constant m_i results in increasing the safety factor, while increasing the disturbance factor and the rock mass density, the slope height and the slope inclination results in decreasing the safety factor. Finally, simple charts are presented which are useful for quick determination of factor of safety and stability number of rock slopes in practical applications.

All rights reserved to Iranian Society of Structural Engineering.

doi: 10.22065/JSCE.2021.265098.2325

*Corresponding author: Meysam Imani

Email address: imani@aut.ac.ir

ARTICLE INFO

Receive Date: 02 January 2021

Revise Date: 11 August 2021

Accept Date: 09 November 2021

Keywords: Rock Slope
Upper Bound Method
Hoek-Brown
Stability Number
Factor of Safety

تحلیل پایداری شیروانی‌های سنگی به روش مرز بالای آنالیز حدی با در نظر گرفتن

معیار خرابی هوک و براون

سید میثم ایمانی^{۱*}، آرشام امینی^۲

۱-استادیار، واحد دانشگاهی گرمسار، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، گرمسار، ایران

۲- کارشناسی ارشد، واحد دانشگاهی گرمسار، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، گرمسار، ایران

چکیده

معمولاً شیروانی‌های سنگی در مقایسه با شیروانی‌های خاکی به دلیل ماهیت سنگی آن‌ها، مقاومت بیشتری داشته و به همین دلیل در برابر بارهای وارد، پایداری بیشتری دارند. اما این مساله به معنی عدم نیاز به تحلیل پایداری این نوع از شیروانی‌ها نیست، بدلیل اینکه بسیاری از پروژه‌های عمرانی در مجاورت شیب‌های سنگی ساخته می‌شوند که در صورت گسیختگی آن، خسارات جانی و مالی شدیدی به همراه خواهد شد. در تحقیق حاضر، به تحلیل پایداری شیروانی‌های سنگی با استفاده از معیار خرابی هوک و براون پرداخته شده و برای این تحلیل پایداری، از روش مرز بالای تحلیل حدی استفاده شده است. در بسیاری از تحقیقات گذشته در پایداری توده‌سنگ‌ها به روش مرز بالا، معیار خرابی هوک و براون خطی‌سازی شده است که این کار منجر به کاهش دقت نتایج بدست آمده می‌شود. نوآوری تحقیق حاضر نسبت به پژوهش‌های قبلی این است که در آن، با استفاده از روش معادل‌سازی چند خطی معیار غیرخطی هوک و براون، روابط جدیدی برای تعیین ضریب اطمینان شیروانی‌های سنگی ارائه شده که منجر به افزایش دقت نتایج شده است. از نتایج این تحقیق می‌توان پارامترهایی که تاثیر مستقیم یا معکوس بر پایداری شیب‌های سنگی دارند را شناسایی کرد و همچنین میزان تاثیر هر یک از این پارامترهای اثرگذار را تعیین کرد. طبق نتایج بدست آمده، بیشتر شدن مقاومت فشاری تک‌محوری سنگ بکر، شاخص مقاومت زمین-شناسی و ثابت m_i هوک و براون منجر به افزایش ضریب اطمینان پایداری و بیشتر شدن فاکتور دست‌خوردگی و وزن مخصوص توده-سنگ، افزایش ارتفاع شیروانی و افزایش زاویه شیروانی نسبت به افق منجر به کاهش ضریب اطمینان پایداری می‌شود. همچنین نمودارهای ساده‌ای در این مقاله ارائه شده‌اند تا بتوان با استفاده از آنها، مقدار عدد پایداری و ضریب اطمینان مربوطه را برای پروژه‌های عملی بدست آورد.

کلمات کلیدی: شیروانی سنگی، روش مرز بالا، هوک و براون، عدد پایداری، ضریب اطمینان

شناسه دیجیتال:		سابقه مقاله:				
doi:	https://doi.org/10.22065/JSCE.2021.265098.2325	چاپ	انتشار آنلاین	پذیرش	بازنگری	دریافت
	10.22065/JSCE.2021.265098.2325	۱۴۰۱/۴/۰۱	۱۴۰۰/۸/۱۸	۱۴۰۰/۸/۱۸	۱۴۰۰/۵/۲۰	۱۳۹۹/۱۰/۳۰
				*نویسنده مسئول:		
				سید میثم ایمانی		
				پست الکترونیکی:		
				imani@aut.ac.ir		

۱- مقدمه

بسیاری از پروژه‌های عمرانی برون شهری نظیر راه و راه‌آهن ممکن است در کنار شیب‌های طبیعی احداث شوند. این شیب‌ها عمدتاً از توده‌سنگ تشکیل شده و بررسی پایداری آنها به منظور حفظ ایمنی تردد وسایل نقلیه در این شریان‌ها، از اهمیت زیادی برخوردار است. امروزه تحلیل پایداری شیروانی‌های سنگی و نحوه پایداری‌سازی آنها مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است. این تحلیل عمدتاً به صورت تعیین یک ضریب اطمینان یا عدد پایداری برای شیروانی مورد نظر است. روش تعادل حدی به عنوان یک روش بسیار متداول در حل مسائل پایداری شناخته می‌شود. از جمله تحقیقات انجام شده به این روش، می‌توان به تحقیق پینگ و همکاران [۱] اشاره کرد. آنها با فرض برقراری معیار هوک و براون برای توده‌سنگ، از پارامترهای مورکولمب معادل برای تحلیل پایداری استفاده کردند و مطابقت خوبی نیز بین نتایج خود با نتایج سایر محققین مشاهده کردند.

یکی از مباحث مهم در بحث شیروانی‌های سنگی، عمق ناحیه دست خورده در توده‌سنگ ناشی از عملیات حفر ترانشه می‌باشد. در عمده تحقیقات گذشته، میزان دست‌خوردگی ایجاد شده در توده‌سنگ توسط فاکتور دست‌خوردگی (D) در نظر گرفته شده است که مقدار آن در کل شیروانی، ثابت فرض شده است. اما در روش ژنگ و همکاران [۲] که بر مبنای روش تعادل حدی استوار است، با لایه لایه در نظر گرفتن شیروانی، ضرایب دست‌خوردگی متفاوتی برای لایه‌های مختلف شیروانی در نظر گرفته شده است. هدف از اینکار این بوده است که در لایه‌های سطحی‌تر شیروانی که بیشتر در معرض دست‌خوردگی ناشی از عملیات حفر ترانشه قرار دارد، امکان در نظر گرفتن فاکتور دست‌خوردگی بزرگتری وجود داشته باشد. نتایج بدست آمده توسط این محققین نشان دهنده اهمیت در نظر گرفتن عمق محدوده دست‌خورده در شیروانی‌های سنگی در محاسبات پایداری می‌باشد.

روش کاهش مقاومت به عنوان یکی از روش‌های تحلیل پایداری شیروانی‌ها شناخته می‌شود که در هر دو شیروانی خاکی و سنگی مورد استفاده محققان بوده است. از جمله جدیدترین تحقیقات انجام شده به این روش در مورد شیروانی‌های سنگی، می‌توان به تحقیق وی و همکاران [۳] اشاره کرد. اما بررسی منابع مرتبط نشان می‌دهد که اکثر روش‌هایی که برای تحلیل پایداری شیروانی‌ها وجود دارد، براساس روش تعادل حدی بنا شده‌اند که از جمله می‌توان به روش‌های کومار و همکاران [۴] و رفیعی رنانی و مارتین [۵] اشاره کرد. اما نتایج بدست آمده از این روش ممکن است اندکی گمراه کننده باشد، چون معمولاً مشخص نیست که ضریب اطمینان بدست آمده از آن، دقیقاً متناظر با حالت خرابی شیروانی است، یا مقداری با حالت خرابی آن اختلاف دارد (کوچکتر یا بزرگتر است). با استفاده از روش مرز بالای تحلیل حدی، این محدودیت رفع می‌شود. پاسخ بدست آمده از این روش، مشخصاً مرز بالای بارهای خرابی یا ضریب اطمینان واقعی خواهد بود. بنابراین تحقیقات گسترده‌ای نیز در زمینه تحلیل پایداری شیروانی‌ها با استفاده از روش تحلیل حدی انجام شده است که از آن جمله می‌توان به تحلیل پایداری شیروانی‌های خاکی توسط درسچر و کریستوپولوس [۶] اشاره کرد. با توجه به دشواری استفاده از معیار خرابی غیرخطی، این محققین روشی را پیشنهاد کرده‌اند که در آن به جای استفاده مستقیم از معیار غیرخطی، از خط مماس بر آن استفاده شود، بگونه‌ای که پاسخ بدست آمده از این خط مماس، همواره مرز بالایی از پاسخ واقعی مربوط به معیار غیرخطی می‌باشد. در مورد تحلیل پایداری مسائل سنگی نیز عموماً از معیار غیرخطی هوک و براون استفاده می‌شود. اما با توجه به دشواری بکارگیری شکل واقعی غیرخطی آن، روش‌هایی برای خطی‌سازی این معیار ارائه شده است که از اولین تلاش‌های انجام شده در این زمینه، می‌توان به روش یانگ و همکاران [۷] اشاره کرد که در مورد تحلیل پایداری شیروانی‌های سنگی ارائه شده است. این محققین با فرض عبور سطح لغزش بحرانی از پای شیروانی، تحلیل پایداری را به روش مرز بالای آنالیز حدی انجام دادند. ایشان با در نظر گرفتن یک خط مماس بر پوش غیرخطی هوک و براون، آن را خطی کردند. موقعیت این خط با انجام بهینه‌سازی بگونه‌ای بدست می‌آید که کمترین مقدار ممکن برای ضریب اطمینان پایداری حاصل شود. همچنین این محققین، ارتفاعی از شیروانی که منجر به دستیابی به ضریب اطمینان یک می‌شود را تحت عنوان ارتفاع بحرانی (H_c) نامگذاری کردند و با قرار دادن آن در رابطه ۱، عدد پایداری (N_s) را محاسبه نمودند:

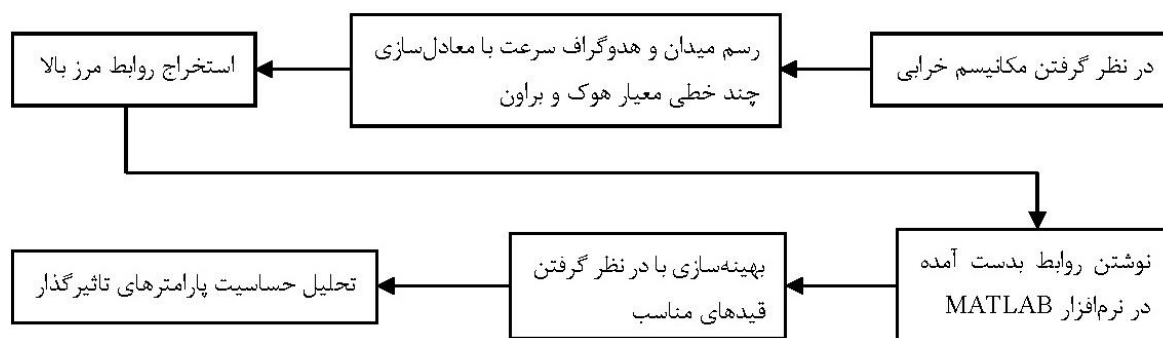
$$N_s = \frac{\gamma H_c}{s^{0.5} \sigma_c} \quad (1)$$

در تحقیقاتی دیگر، لی و همکاران [۸ و ۹] با فرض عبور سطح لغزش بحرانی از پای شیروانی و با بکارگیری روش‌های مرز بالا و پایین تحلیل حدی، نمودارهای پایداری را برای شیروانی‌های سنگی ارائه دادند. ایشان ضمن ارائه نمودارهای تحلیل پایداری شیروانی، تاثیر

مقادیر مختلف ضریب دست‌خوردگی (D) بر پایداری شیروانی را نیز بررسی کرده و فرض کردند که میزان دست‌خوردگی در لایه‌های بیرونی شیروانی، بیشترین مقدار را داشته و بتدریج با حرکت به سمت لایه‌های داخلی‌تر، مقدار آن کاهش می‌یابد. علاوه بر موارد ذکر شده، تحلیل پایداری لرزه‌ای شیروانی‌های سنگی نیز مورد توجه محققین مختلف قرار گرفته است. تاثیر زلزله به‌صورت افزایش نیروهای مسبب ناپایداری شیب و کاهش مقاومت برشی مصالح میزبان (توده‌سنگ) نمود پیدا می‌کند. اکاموتو [۱۰] توصیه کرده که در بیشتر خاکها، فقط زلزله‌هایی که شتاب بزرگتر از $0.3g$ دارند، سبب کاهش مقاومت برشی خاک می‌شوند. اما با توجه به اینکه مقاومت سنگها عموماً از خاکها بیشتر است و همچنین، شتاب‌های زلزله بزرگتر از $0.3g$ نیز در عمل کمتر رخ می‌دهد، لذا در تحلیل پایداری مسائل سنگی، عموماً از اثر زلزله بر کاهش مقاومت برشی توده‌سنگ چشمپوشی شده و صرفاً تاثیر آن در افزایش نیروهای محرک ناپایداری در نظر گرفته می‌شود. بدیهی است که با در نظر گرفتن چنین اثری، ضریب اطمینان پایداری شیب‌های سنگی در اثر زلزله کاهش می‌یابد که از جمله مهمترین تحقیقات انجام شده در این راستا می‌توان به روشهای سیاد [۱۱] و یانگ [۱۲] اشاره کرد.

همچنین دونالد و چن [۱۳]، روشی را برای تحلیل پایداری شیروانی‌های سنگی و خاکی بر اساس تحلیل مرز بالا ارائه کردند. آنها از مکانیسم خرابی چند گوه‌ای استفاده کردند، بگونه‌ای که محدوده گسیختگی را به چندین گوه مجزا تقسیم کردند. نتایج بدست آمده توسط آنها، با راه حل‌های بسته موجود مقایسه شده است. در این تحقیق هیچ نمودار یا جدول پایداری که بتوان بر اساس آن، ضریب اطمینان یا عدد پایداری را به ازای پارامترهای مقاومتی مختلف برای سنگ و خاک بدست آورد، ارائه نشده است. از جمله دیگر تحقیقات انجام شده در مورد تحلیل پایداری شیروانی‌های سنگی می‌توان به روش میچالفسکی و پارک [۱۴] اشاره کرد. آنها با استفاده از روش مرز بالای آنالیز حدی، شاخص مقاومت زمین‌شناسی (GSI) سنگ را به عنوان یکی از مهمترین و تاثیرگذارترین عوامل در پایداری شیروانی‌های سنگی معرفی کردند. همچنین در تحقیقی دیگر، پارک و میچالفسکی [۱۵] با استفاده از روش مرز بالای آنالیز حدی، ضریب اطمینان و عدد پایداری شیروانی‌های سنگی را در حالت سه بعدی بررسی کردند.

یکی از ایرادات اساسی موجود در روشهای تحلیل پایداری مبتنی بر روش مرز بالا که برای شیروانی‌های سنگی ارائه شده است، نحوه خطی‌سازی معیار غیرخطی هوک و براون است. بررسی‌های انجام شده نشان می‌دهد که این خطی‌سازی با استفاده از مماس کردن یک خط مماس بر معیار غیرخطی انجام می‌شود که موقعیت دقیق این خط، با استفاده از فرآیند بهینه‌سازی بگونه‌ای بدست می‌آید که کمترین مقدار ممکن برای ضریب اطمینان پایداری بدست آید [۱۷]. اما بدیهی است که معادل‌سازی یک معیار غیرخطی با یک خط، دقت کافی ندارد و پاسخ‌های بدست آمده از آن نیز چندان قابل اعتماد نمی‌باشد. بنابراین رویکرد جدیدی که در این تحقیق نسبت به مطالعات گذشته استفاده شده است، بکارگیری روش معادل‌سازی چند خطی معیار هوک و براون است که اینکار منجر به افزایش دقت عدد پایداری شیب نسبت به سایر روش‌های موجود شده است. لازم به ذکر است که خطی‌سازی معیار غیرخطی هوک و براون با در نظر گرفتن چندین خط مماس انجام می‌شود که حداکثر دقت ممکن در ضریب اطمینان و عدد پایداری بدست آمده از روش مرز بالا را به همراه خواهد داشت. این تکنیک خطی‌سازی، قبلاً توسط مائو و همکاران [۱۶]، الخفاجی و همکاران [۱۷] و شاملو و ایمانی [۱۸ و ۱۹] در تعیین ظرفیت باربری توده‌سنگها بکار گرفته شده است. اما کاربرد آن در تحلیل پایداری شیروانی‌های سنگی، برای اولین بار در مقاله حاضر ارائه شده است. رابطه ضریب اطمینان پایداری با فرض عبور سطح لغزش بحرانی از پای شیروانی بدست آمده و با استفاده از الگوریتم ژنتیک بهینه‌سازی شده است تا در جهت اطمینان، کمترین مقدار ممکن برای ضریب اطمینان بدست آید. در انتها نیز با استفاده از روابط بدست آمده، تاثیر پارامترهای مقاومتی توده‌سنگ بر پایداری شیروانی‌های سنگی مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج این تحقیق در قالب نمودارهای طراحی ارائه شده است تا در مسائل عملی، به راحتی قابل استفاده باشد. روند انجام این تحقیق در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱. روند انجام تحقیق حاضر

۲- کاربرد معیار هوک و براون در روش مرز بالای آنالیز حدی

تجربیات قبلی نشان می‌دهد که پوش گسیختگی اغلب توده‌های سنگی در فضای تنش‌های اصلی، غیر خطی بوده که این مساله تاثیر قابل توجهی بر تحلیل پایداری شیروانی سنگی دارد. در همین راستا، معیار غیرخطی هوک و براون به عنوان کاربردی‌ترین معیار خرابی توده‌سنگها در مسائل عملی شناخته می‌شود. اساس این معیار بر پایه چهار پارامتر بنیادی سنگ است که دو پارامتر آن مربوط به خواص سنگ بکر بوده و دو پارامتر دیگر از خواص برجای توده‌سنگ ناشی می‌شود. پارامترهای سنگ بکر، σ_{ci} و m_i می‌باشند که به ترتیب با عنوان‌های مقاومت فشاری تک‌محوری سنگ بکر و ثابت پتروگرافیک از آن‌ها نام برده می‌شود. پارامترهای مربوط به خواص برجای توده-سنگ هم، GSI و D بوده که به ترتیب شاخص مقاومت زمین شناسی و فاکتور دست‌خوردگی توده‌سنگ هستند. در رابطه ۲، عمومی‌ترین شکل معیار هوک براون ارائه شده است.

$$\sigma'_1 = \sigma'_3 + \sigma_{ci} \left(m \frac{\sigma'_3}{\sigma_{ci}} + s \right)^a \quad (2)$$

که در آن، σ'_1 و σ'_3 به ترتیب تنش‌های موثر اصلی بزرگتر و کوچکتر در لحظه گسیختگی و m ، s و a ثابت‌های معیار هوک و براون هستند که از روابط ۳ تا ۵ بدست می‌آیند:

$$m = m_i \exp\left(\frac{GSI - 100}{28 - 14D}\right) \quad (3)$$

$$s = \exp\left(\frac{GSI - 100}{9 - 3D}\right) \quad (4)$$

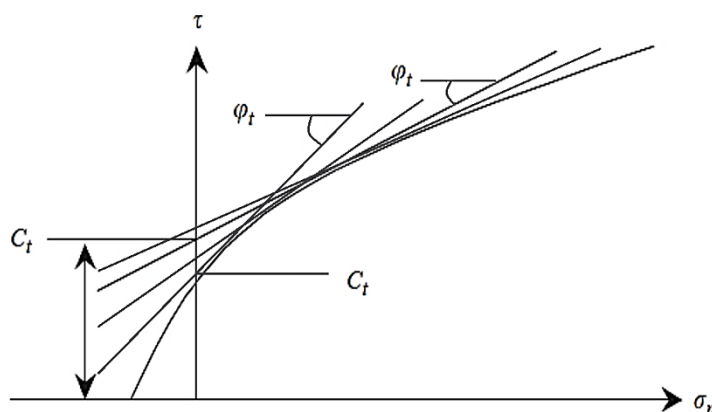
$$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left(e^{\frac{GSI}{15}} - e^{\frac{20}{3}} \right) \quad (5)$$

ضریب m_i ثابت مربوط به سنگ بکر بوده که مقدار آن از حداقل ۵ برای سنگ‌های بسیار ضعیف تا ۳۳ برای سنگ‌های بسیار مقاوم متغیر می‌باشد. همانطور که قبلاً نیز اشاره شد، برای استفاده از این معیار در روش مرز بالا، می‌توان آن را با خط معادل جایگزین کرد. در ساده‌ترین حالت ممکن، یانگ و همکاران [۷] توصیه کردند که این معیار با یک خط مماس جایگزین شود. معادله این خط مماس برابر است با:

$$\tau = c_i + \sigma_n \tan \phi_i \quad (6)$$

که در آن، ϕ_t زاویه اصطکاک مماسی توده سنگ و c_t عرض از مبدا خط مماس فوق در فضای σ_n - τ است. از آنجایی که جایگزینی یک منحنی غیرخطی فقط با یک خط مماس، تقریب خوبی نخواهد بود، لذا مائو و همکاران [۱۶] توصیه کرده‌اند که برای کاربرد معیار هوک و براون در روش مرز بالا، آن را با تعداد زیادی خط جایگزین کنیم که معادله هر یک از آنها مطابق رابطه ۶ بوده، اما شیب و عرض از مبدا هر یک از آنها منحصر بفرد است. شماتیکی از این نحوه خطی‌سازی در شکل ۲ نشان داده شده است. موقعیت هر یک از خطوط مماس باید بگونه‌ای باشد که بهترین جواب مرز بالا برای مساله بدست آید. در تحلیل پایداری شیروانی‌ها به روش مرز بالا، منظور از بهترین جواب، کمترین مقدار ممکن برای ضریب اطمینان پایداری است. بنابراین با مجهول در نظر گرفتن زوایای اصطکاک مماسی مربوط به تک تک این خطوط مماس، مقدار آنها با انجام بهینه‌سازی بگونه‌ای بدست می‌آید که کمترین مقدار ممکن برای ضریب اطمینان پایداری حاصل شود. سپس با جایگذاری ϕ_t بهینه بدست آمده مربوط به هر یک از خطوط مماس در رابطه ۷، c_t مربوطه بدست می‌آید (یانگ و همکاران [۷]):

$$\frac{c_t}{\sigma_c} = \frac{\cos \phi_t}{2} \left[\frac{ma(1 - \sin \phi_t)}{2 \sin \phi_t} \right]^{1-a} - \frac{\tan \phi_t}{m} \left(1 + \frac{\sin \phi_t}{a} \right) \left[\frac{ma(1 - \sin \phi_t)}{2 \sin \phi_t} \right]^{1-a} + \frac{s}{m} \tan \phi_t \quad (7)$$

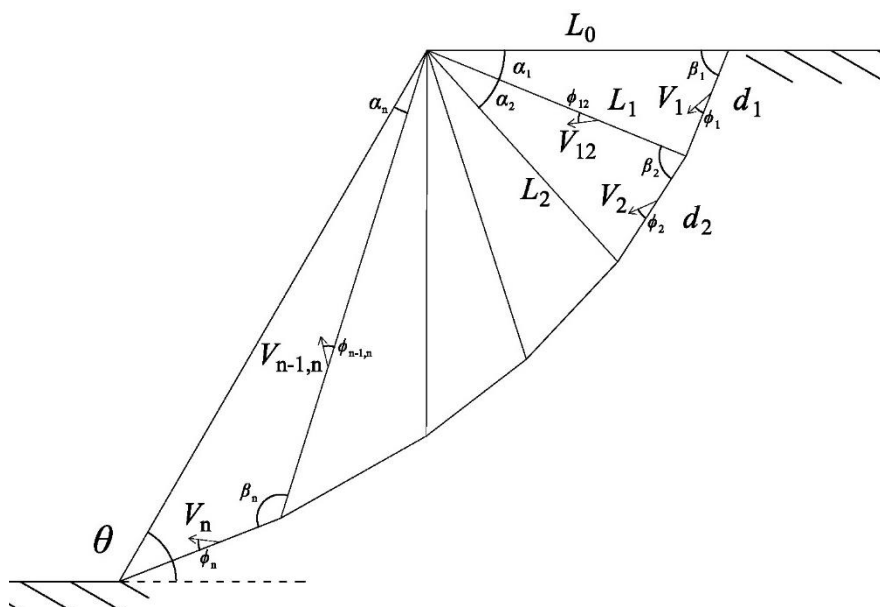


شکل ۲. خطی‌سازی معیار هوک و براون با استفاده از چند خط معادل

۳- مراحل تعیین ضریب اطمینان پایداری شیروانی

۳-۱- در نظر گرفتن مکانیسم گسیختگی

در تحلیل پایداری شیروانی‌ها به روش مرز بالای تحلیل حدی، ابتدا باید یک مکانیسم گسیختگی در نظر گرفته شده و روابط حاکم بر آن استخراج شود. در شکل ۳، مکانیسم چند گوه‌ای در نظر گرفته شده در این تحقیق به همراه بردارهای سرعت هر گوه نشان داده شده است که شامل n گوه مثلثی بوده و طول خطهای ناپیوستگی سرعت و زاویه شیروانی با افق نیز روی شکل مشخص است. اعداد دقیق گوه‌های مثلثی، متعاقباً و با انجام عملیات بهینه‌سازی، بگونه‌ای بدست می‌آید که کمترین مقدار ممکن برای ضریب اطمینان پایداری حاصل شود.



شکل ۳. مکانیسم خرابی در نظر گرفته شده در تحقیق حاضر

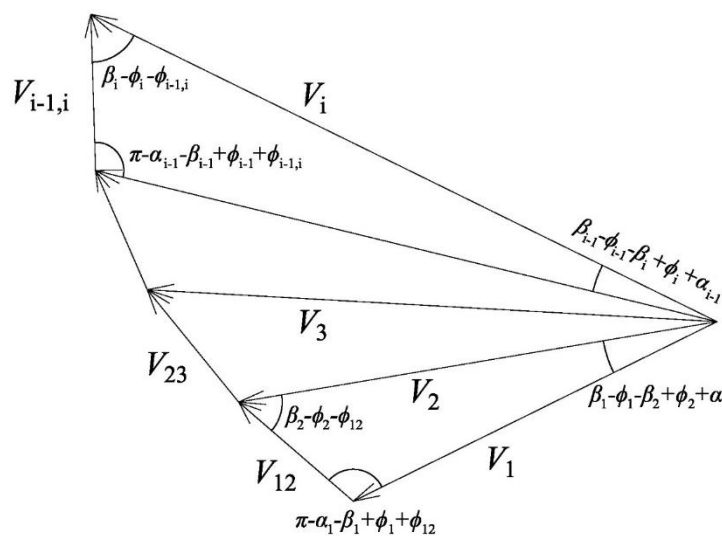
زاویه هر یک از بردارهای سرعت مطلق (V_i) و نسبی ($V_{i-1,i}$) با خط ناپیوستگی سرعت مربوطه برابر زاویه اصطکاک داخلی توده-سنگ است [۲۰]. اما با توجه به متفاوت بودن سطح تنش در امتداد هر یک از خطوط ناپیوستگی سرعت مکانیسم انتخابی و با عنایت به معادل سازی معیار هوک و براون با چندین خط معادل، زاویه اصطکاک داخلی مماسی و در نتیجه چسبندگی مماسی نیز در امتداد هر یک از این خطوط، مقدار منحصربفردی خواهد داشت. این تکنیک منجر به افزایش دقت نتایج بدست آمده به روش مرز بالا شده، اما تاکنون توسط محققین قبلی مورد استفاده قرار نگرفته است و در این تحقیق، برای نخستین بار در مورد شیروانی‌های سنگی استفاده شده است. بنابراین مجهولات این مکانیسم شامل زوایای α_i , β_i , ϕ_i است که مقدار آنها از عملیات بهینه سازی بدست می آید. با جاگذاری ϕ_i و ϕ_{i-1} بهینه در رابطه ۷، مقادیر مختلفی از چسبندگی مماسی نیز در امتداد تک تک خطوط ناپیوستگی سرعت بدست می آید.

۳-۲- رسم هیدوگراف سرعت و تعیین اندازه هر یک از بردارهای سرعت

در شکل ۴، هیدوگراف سرعت مکانیسم در نظر گرفته شده، نشان داده شده است. با استفاده از این هیدوگراف، می توان مقدار هر یک از بردارهای سرعت را بر حسب سرعت اولین گوه (V_1) بدست آورد. سرعت V_1 نیز در انتهای محاسبات، از طرفین رابطه کار مجازی که اساس روش مرز بالا است، ساده شده و از دستگاه معادلات نهایی حذف می شود. رابطه سرعت مطلق گوه i ام (V_i) و سرعت نسبی بین گوه-های $i-1$ و i ام ($V_{i-1,i}$) برابر است با:

$$V_i = V_{i-1} \left[\frac{\cos(\alpha_{i-1} + \beta_{i-1} - \beta_i + \phi_i - \phi_{i-1})}{\sin^2(\beta_i - \phi_i - \phi_{i-1,i})} - \frac{\cos(\alpha_{i-1} + \beta_{i-1} - \phi_{i-1} - \phi_{i-1,i}) \cos(\beta_i - \phi_i - \phi_{i-1,i})}{\sin^2(\beta_i - \phi_i - \phi_{i-1,i})} \right] \quad (8)$$

$$V_{i-1,i} = V_i \cos(\beta_i - \phi_i - \phi_{i-1,i}) - \cos(\alpha_{i-1} + \beta_{i-1} - \phi_{i-1} - \phi_{i-1,i}) \quad (9)$$



شکل ۴. هودوگراف سرعت

۳-۳- تعیین طول خطوط ناپیوستگی سرعت و مساحت گوه‌ها

با استفاده از روابط هندسی بین خطوط مکانیسم، طول هر یک از خطوط ناپیوستگی سرعت (L_i و d_i) و مساحت گوه‌ها (S_i) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$L_{i-1} = L_i \frac{\sin(\alpha_i + \beta_i)}{\sin(\beta_i)} \quad (10)$$

$$d_i = L_i \frac{\sin \alpha_i}{\sin \beta_i} \quad (11)$$

$$S_i = \frac{1}{2} d_i L_i \sin(\alpha_i + \beta_i) \quad (12)$$

۳-۴- اصل کار مجازی

محاسبات روش مرز بالا بر اساس اصل کار مجازی استوار است که طبق آن، اگر جسمی تحت بارگذاری خارجی قرار گیرد و این بارگذاری منجر به افزایش تنش‌های داخلی شود، بار خارجی و تنش داخلی حاصله از آن با هم در تعادل هستند. بنابراین برای دستیابی به رابطه ضریب اطمینان، لازم است ابتدا کار خارجی ناشی از بارهای وارده و انرژی داخلی ناشی از آن محاسبه شود.

کار خارجی وارد بر مکانیسم در نظر گرفته شده در این تحقیق، ناشی از وزن گوه‌ها است که مقدار آن از رابطه ۱۳ بدست می‌آید:

$$W = \sum_{i=1}^n V_i \sin \left(\beta_i - \phi_i - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j \right) \cdot \gamma \cdot S_i \quad (13)$$

که در آن، n تعداد گوه‌های مثلثی مکانیسم، γ وزن مخصوص توده‌سنگ و S_i مساحت هر یک از گوه‌های مثلثی می‌باشد. انرژی داخلی نیز در امتداد خطوط ناپیوستگی سرعت مستهلک می‌شود که مقدار آن در کل مکانیسم از رابطه ۱۴ بدست می‌آید:

$$D = \sum_{i=1}^n c_i d_i V_i \cos \phi_i + \sum_{i=2}^n c_{i-1,i} L_{i-1} V_{i-1,i} \cos \phi_{i-1,i} \quad (14)$$

که در آن، c_i و $c_{i-1,i}$ ، چسبندگی مماسی بدست آمده از رابطه ۷ و ϕ_i و $\phi_{i-1,i}$ زوایای اصطکاک داخلی مماسی هستند. همانطور که ملاحظه می‌شود، مقدار انرژی داخلی مستهلک شده در مکانیسم، به چسبندگی مماسی در امتداد هر خط ناپیوستگی سرعت بستگی دارد که برای تعیین آن، باید از رابطه ۷ استفاده شود.

۳-۵- رابطه نهایی ضریب اطمینان و محاسبه عدد پایداری

ضریب اطمینان پایداری شیروانی برابر نسبت نیروهای مقاوم به نیروهای محرک می‌باشد. انرژی داخلی مستهلک شده در مکانیسم (D) به عنوان نیروی مقاوم و کار خارجی انجام شده (W) به عنوان نیروی محرک شناخته می‌شود. در نتیجه رابطه نهایی ضریب اطمینان برابر است با:

$$FS = \frac{D}{W} \quad (15)$$

در بسیاری از تحقیقات گذشته در زمینه تحلیل پایداری شیروانی‌ها، برای اینکه بتوان اثر مقاومت فشاری تک محوری سنگ بکر، وزن مخصوص توده سنگ و ارتفاع شیروانی را به طور همزمان در کنار ضریب اطمینان بررسی نمود، از پارامتر بی‌بعد «عدد پایداری» به جای ضریب اطمینان استفاده شده است [۲۱-۲۵]. به منظور مقایسه نتایج مقاله حاضر با سایر تحقیقات موجود، در این تحقیق نیز با استفاده از ضریب اطمینان بدست آمده از عملیات بهینه‌سازی (FS)، عدد پایداری مطابق رابطه ۱۶ تعیین شده است:

$$N = \frac{\sigma_{ci}}{\gamma H \cdot FS} \quad (16)$$

۴- نتایج و بحث

۴-۱- بهینه‌سازی

با توجه به اینکه در رابطه ضریب اطمینان بدست آمده از روش مرز بالا، تعداد زیادی پارامتر مجهول وجود دارد، لذا باید این رابطه را بهینه نمود تا کمترین مقدار ممکن برای ضریب اطمینان بدست آید. عملیات بهینه‌سازی با استفاده از الگوریتم ژنتیک در نرم‌افزار MATLAB انجام شده است. برای تعیین پارامترهای مجهول، عملیات بهینه‌سازی با در نظر گرفتن قیدهای زیر انجام شده است تا مکانیسم گسیختگی بدست آمده پس از بهینه‌سازی، قابل قبول باشد:

$$0 < \alpha_i < 90^\circ \quad , \quad 0 < \beta_i < 180^\circ \quad , \quad 0 < \phi_i , \phi_{i-1,i} < 90^\circ$$

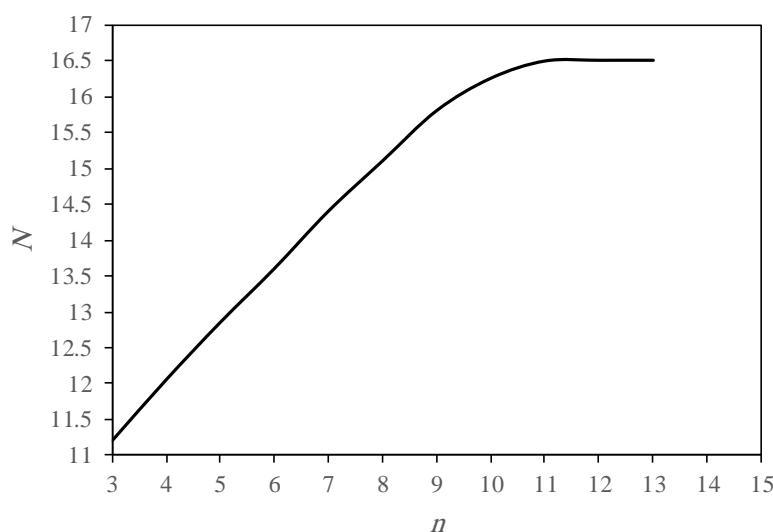
$$\alpha_i + \beta_i \geq \beta_{i+1} \quad , \quad \alpha_i + \beta_i < \pi \quad , \quad \theta + \sum_{i=1}^n \alpha_i = \pi$$

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_{i-1} - \phi_{i-1,i}) > 0 \quad (17)$$

$$0 < \alpha_{i-1} + \beta_{i-1} - \beta_i + \phi_i - \phi_{i-1} < \pi \quad , \quad 0 < \beta_i - \phi_i - \phi_{i-1,i} < \pi$$

۴-۲- تعیین تعداد بهینه گوه‌های مثلثی

روابط مرز بالای ارائه شده در این مقاله، با فرض وجود n گوه مثلثی در مکانیسم خرابی استوار است. بدیهی است که هر چه تعداد گوه‌های در نظر گرفته شده بیشتر باشد، ضریب اطمینان بدست آمده دقت بالاتری خواهد داشت، اما زمان مورد نیاز برای تحلیل نیز بیشتر خواهد شد. بنابراین برای دستیابی به یک مقدار بهینه n که هم زمان چندان طولانی برای تحلیل ضروری نشود و هم منجر به ضریب اطمینان با دقت کافی شود، لازم است تحلیل حساسیتی بر روی پارامتر n انجام شود. بدین منظور برای یک شیروانی فرضی به ارتفاع ۱۰ متر و زاویه ۷۵ درجه با افق که از توده سنگی با وزن مخصوص ۲۳ کیلو نیوتون بر متر مکعب تشکیل شده و پارامترهای هوک و براون آن برابر $GSI=30$ ، $m_i=5$ و $D=0$ است، تغییرات عدد پایداری (N) به ازای مقادیر مختلف n در شکل ۵ نشان داده شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود، با افزایش n عدد پایداری افزایش می‌یابد (ضریب اطمینان کاهش می‌یابد) که نرخ این افزایش بتدریج کمتر می‌شود. به ازای مقادیر $n > 12$ ، تغییر چندان در عدد پایداری ملاحظه نمی‌شود. بنابراین $n=12$ را می‌توان به عنوان تعداد بهینه گوه‌های مثلثی در نظر گرفت. تحلیل حساسیت دیگری برای توده سنگی با مشخصات هندسی مشابه و پارامترهای هوک و براون $GSI=70$ ، $m_i=15$ و $D=0.7$ نیز انجام شده و نتایج مشابهی بدست آمده است. بنابراین در تحلیل‌های انجام شده در ادامه این مقاله، تعداد گوه‌های مثلثی برابر $n=12$ در نظر گرفته شده است.



شکل ۵. نمودار تغییرات عدد پایداری

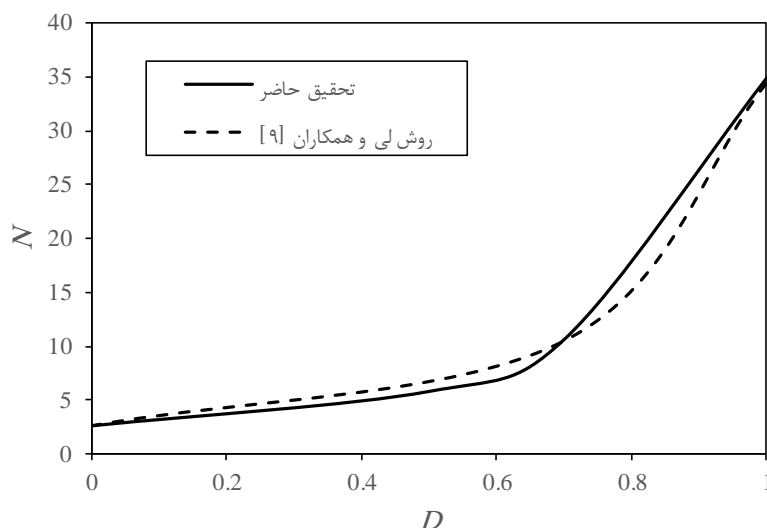
۴-۳- تحلیل حساسیت پارامترهای اثرگذار

در این بخش با استفاده از روش ارائه شده در تحقیق حاضر، تاثیر مقادیر مختلف پارامترهای اثرگذار بر عدد پایداری شیروانی‌های سنگی مورد بررسی قرار گرفته است. پارامترهای اولیه در نظر گرفته شده در این قسمت شامل $GSI=30$ ، $m_i=5$ ، $\sigma_{ci}=10$ MPa، $\gamma=23$ kN/m³ و $H=10$ m و $\theta=45^\circ$ می‌باشد. اما هر یک از این پارامترها بطور مجزا تغییر داده شده‌اند تا حساسیت عدد پایداری نسبت به هر پارامتر بررسی شود.

۴-۳-۱- تاثیر فاکتور دست‌خوردگی توده سنگ (D)

با در نظر گرفتن مقادیر مختلف برای پارامتر D ، در شکل ۶، منحنی تغییرات عدد پایداری بر حسب D نشان داده شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود، با افزایش D ، عدد پایداری افزایش می‌یابد (ضریب اطمینان پایداری کاهش می‌یابد). شیب این افزایش در محدوده $0 < D < 0.7$ کم است، اما در محدوده $D > 0.7$ ، عدد پایداری افزایش چشمگیری می‌یابد. این افزایش عدد پایداری و کاهش

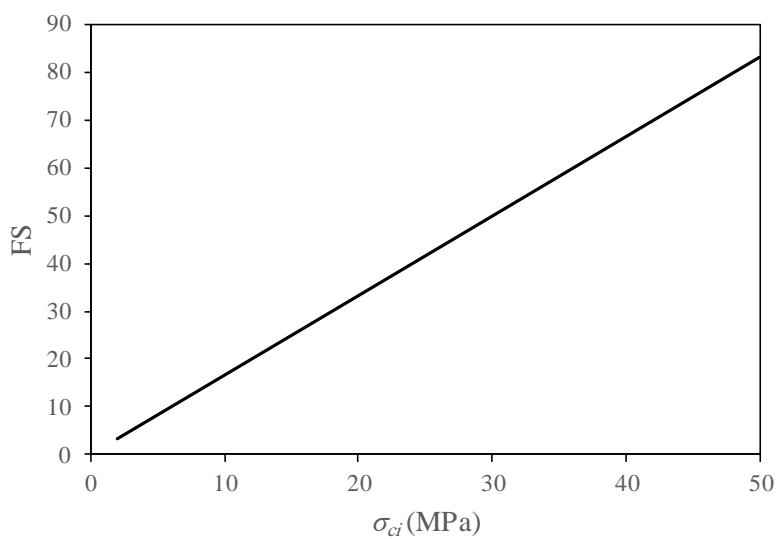
ضریب اطمینان، بدلیل افزایش دست‌خوردگی و در نتیجه ضعیف‌تر شدن توده‌سنگ ناشی از افزایش D است. روند تقریباً مشابهی نیز از تحقیق لی و همکاران [۹] بدست آمده است. حداکثر اختلاف بین نتایج این دو روش کمتر از دو درصد است.



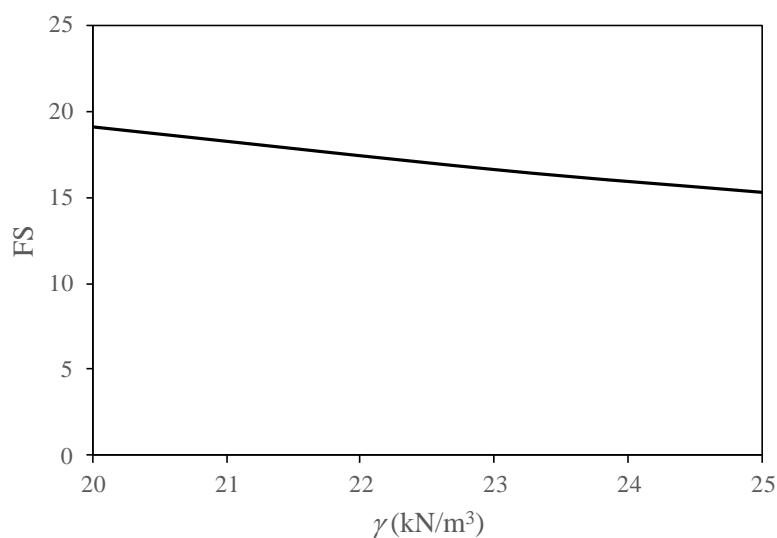
شکل ۶. تاثیر مقادیر مختلف D بر عدد پایداری N

۴-۳-۲- تاثیر پارامترهای σ_{ci} ، γ و H

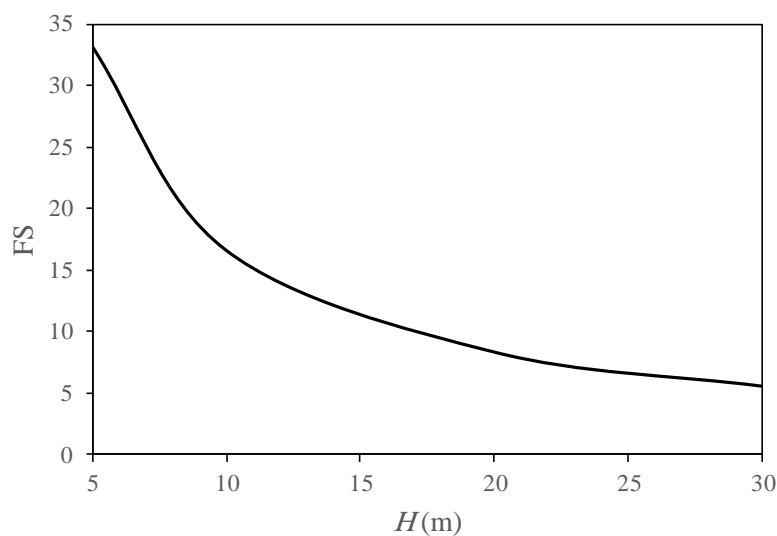
با فرض $D=0$ و با در نظر گرفتن مقادیر مختلف برای پارامترهای σ_{ci} ، γ و H ، مقدار عدد پایداری محاسبه شده است که در همه حالتها برابر ۲/۶۲ است و روش لی و همکاران [۸] نیز مقدار ۲/۶ را نتیجه می‌دهد. علت عدم تاثیر این سه پارامتر بر عدد پایداری این است که مقادیر این سه پارامتر و ضریب اطمینان بطور همزمان وارد رابطه ۱۶ می‌شود و هرگونه افزایش این پارامترها، منجر به افزایش FS خواهد شد که در نتیجه، عدد پایداری ثابت باقی می‌ماند. اما می‌توان منحنی تغییرات ضریب اطمینان بر حسب پارامترهای σ_{ci} ، γ و H را به صورت شکل‌های ۷ تا ۹ رسم کرد. همانطور که ملاحظه می‌شود، با افزایش σ_{ci} ، ضریب اطمینان پایداری شیروانی افزایش می‌یابد، در حالی که با افزایش γ و H ، مقدار ضریب اطمینان کمتر می‌شود. تاثیر مقاومت فشاری تک محوری سنگ بکر و ارتفاع شیروانی بر ضریب اطمینان قابل توجه است، بگونه‌ای که با افزایش σ_{ci} از ۲ MPa به ۵۰ MPa، ضریب اطمینان پایداری ۲۵ برابر می‌شود که این مساله به علت مقاومت شدن توده‌سنگ در اثر افزایش σ_{ci} می‌باشد که در نتیجه احتمال ریزش شیروانی کاهش می‌یابد. همچنین با افزایش H از ۵ m به ۳۰ m، ضریب اطمینان ۰/۱۷ برابر می‌شود که این مساله بدلیل افزایش حجم گوه گسیختگی و توده مستعد لغزش و در نتیجه افزایش چشمگیر نیروهای محرک لغزش شیروانی ایجاد می‌شود. اما تاثیر وزن مخصوص توده‌سنگ بر ضریب اطمینان چندان زیاد نیست، بگونه‌ای که با افزایش γ از ۲۰ kN/m³ به ۲۵ kN/m³، ضریب اطمینان ۲۰ درصد کاهش می‌یابد. این کاهش ضریب اطمینان به این دلیل رخ می‌دهد که افزایش وزن مخصوص توده‌سنگ سبب افزایش نیروهای محرک لغزش و در نتیجه کاهش مخرج کسر رابطه کلی ضریب اطمینان می‌شود.



شکل ۷. تاثیر مقادیر مختلف σ_{ci} بر ضریب اطمینان FS



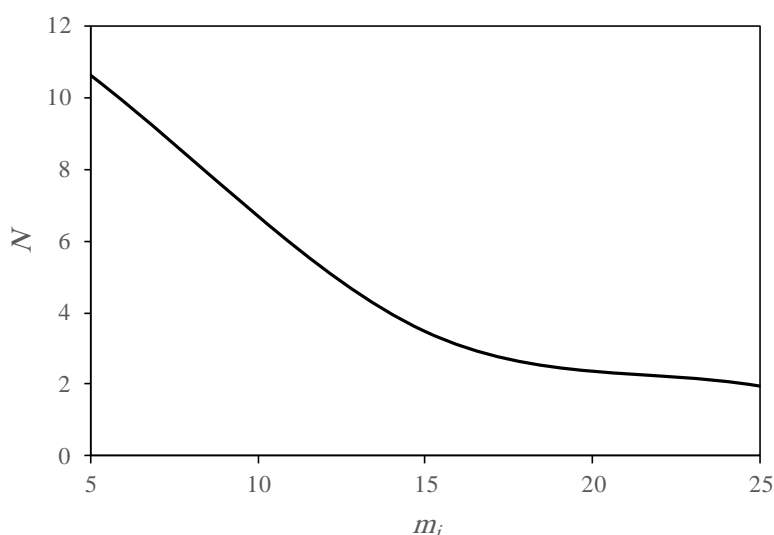
شکل ۸. تاثیر مقادیر مختلف γ بر ضریب اطمینان FS



شکل ۹. تاثیر مقادیر مختلف H بر ضریب اطمینان FS

۳-۳-۴- تاثیر m_i

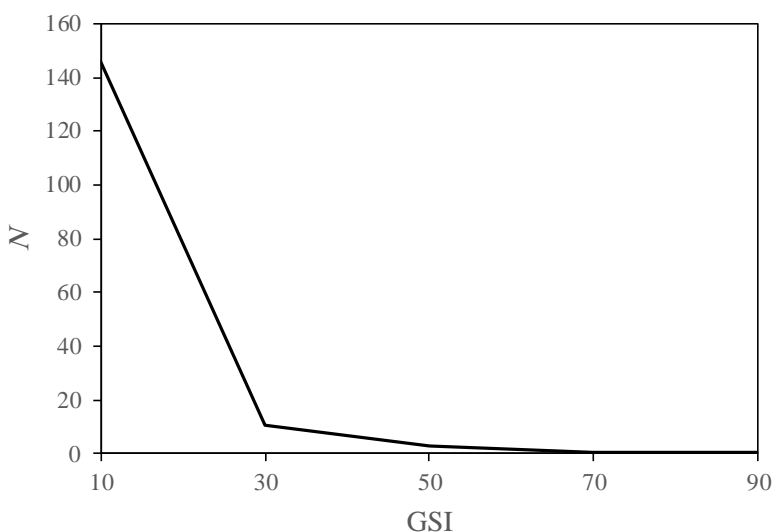
در شکل ۱۰، منحنی تغییرات N بر حسب m_i با فرض $D=0.7$ نشان داده شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود، افزایش m_i منجر به کاهش عدد پایداری می‌شود. این بدین معنی است که ضریب اطمینان با افزایش m_i بیشتر شده و در نتیجه پایداری شیروانی بهبود می‌یابد. سنگ‌های با m_i بزرگتر، مقاوم‌تر بوده و از این لحاظ می‌توان افزایش ضریب اطمینان و کاهش عدد پایداری ناشی از بیشتر شدن m_i را توجیه کرد. در محدوده $m_i < 17$ افزایش m_i کاهش شدیدتری در عدد پایداری ایجاد می‌کند، حال آنکه به ازای $m_i > 17$ نرخ کاهش عدد پایداری کمتر می‌شود.



شکل ۱۰. تاثیر مقادیر مختلف m_i بر عدد پایداری N

۴-۳-۴- تاثیر شاخص مقاومتی توده سنگ (GSI)

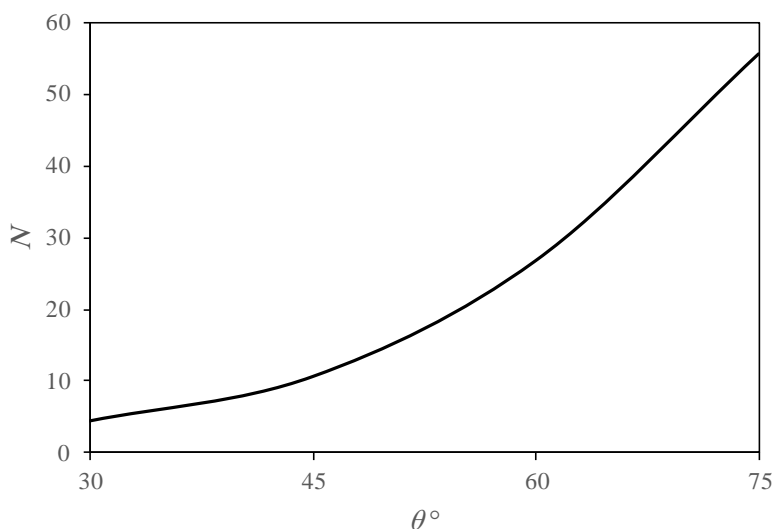
با فرض $D=0.7$ ، شکل ۱۱ منحنی تغییرات N بر حسب GSI را نشان می‌دهد. همانطور که ملاحظه می‌شود، با افزایش GSI، بدلیل کاهش شکستگی‌های توده‌سنگ، عدد پایداری کاهش یافته و در نتیجه ضریب اطمینان افزایش می‌یابد. کاهش عدد پایداری در محدوده $GSI < 30$ با نرخ بسیار بیشتری نسبت به محدوده $GSI > 30$ رخ می‌دهد.



شکل ۱۱. تاثیر مقادیر مختلف GSI بر عدد پایداری N

۴-۳-۵- تاثیر زاویه شیروانی (θ°)

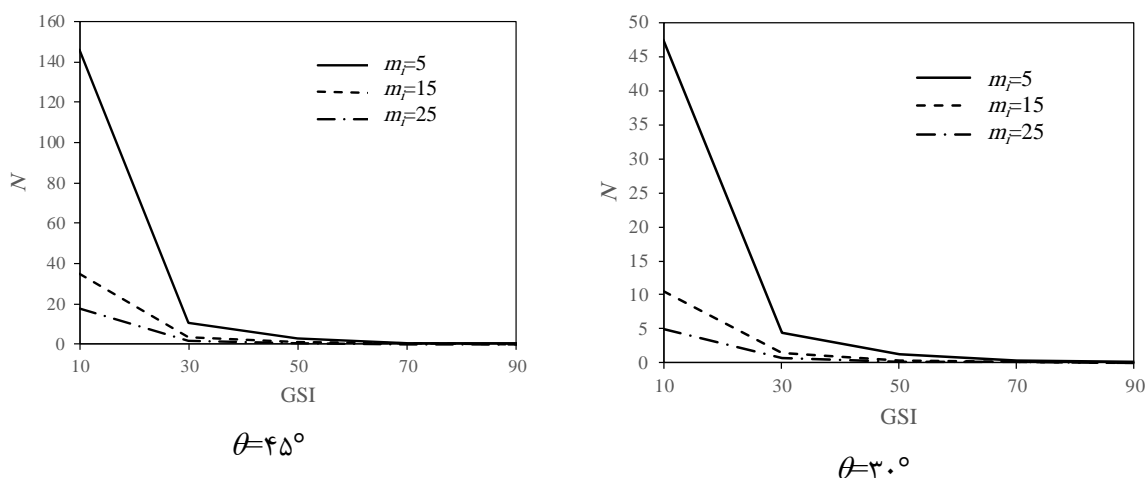
در شکل ۱۲، منحنی تغییرات N بر حسب θ به ازای $D=0.7$ نشان داده شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود، افزایش θ منجر به افزایش عدد پایداری و در نتیجه، کاهش ضریب اطمینان می‌شود. این موضوع نشان‌دهنده این قاعده کلی است که شیروانی‌هایی با شیب تندتر، استعداد بیشتری در لغزش و ریزش دارند. این موضوع از اینجا ناشی می‌شود که با تندتر شدن شیب شیروانی، حجم بزرگتری از مصالح به عنوان عامل محرک ریزش عمل کرده و در نتیجه پایداری شیروانی کاهش می‌یابد.

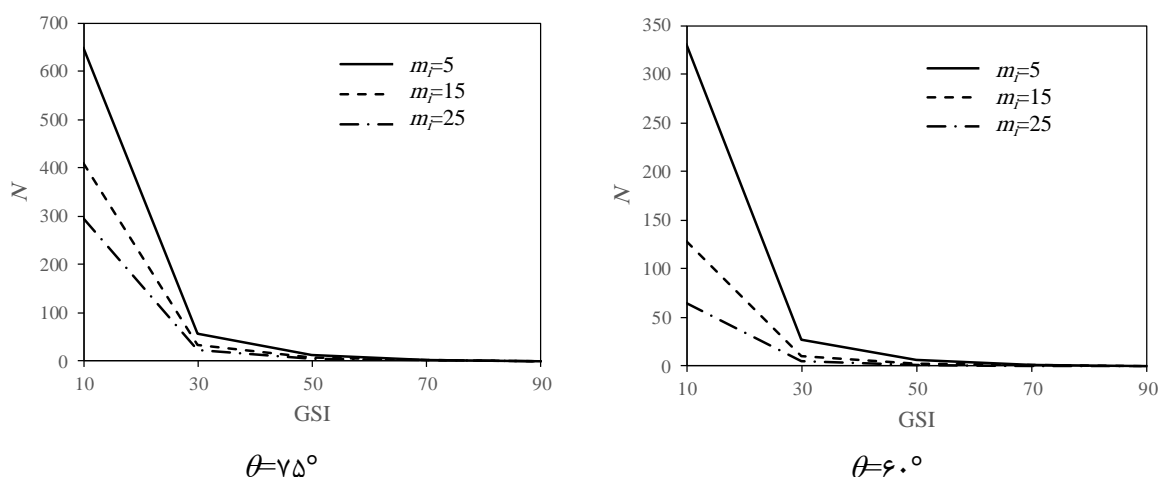


شکل ۱۲. تاثیر مقادیر مختلف θ بر عدد پایداری N

۴-۳-۶- نمودارهای پایداری

با توجه به نتایج بدست آمده از تحقیق حاضر، در شکل ۱۳ منحنی‌هایی کاربردی ارائه شده است که مقدار عدد پایداری را برای شیروانی‌هایی با مشخصات مختلف ارائه می‌کند. این اعداد پایداری به راحتی قابل استفاده در مسائل عملی می‌باشد. با توجه به اینکه عملیات حفر ترانشه، عموماً سبب ایجاد دست‌خوردگی قابل توجهی در توده‌سنگ می‌شود، لذا در تهیه این نمودارها فرض شده است که $D=0.7$ باشد.





شکل ۱۳. نمودار پایداری برای حالت‌های مختلف

به عنوان مثالی از نحوه کاربرد این نمودارها، برای توده‌سنگی با $\sigma_{ci}=10$ MPa، $m_f=5$ ، $GSI=10$ ، $D=0.7$ ، $\gamma=23$ kN/m³، $H=10$ و $\theta=45^\circ$ ، ضریب اطمینان از روش ارائه شده در مقاله حاضر (شکل ۱۳) برابر ۰/۳، از روش لی و همکاران [۹] برابر ۰/۳۵ و از روش تعادل حدی جانبی که در بسیاری از مسائل عملی شناخته شده است، برابر ۰/۶ بدست می‌آید که این مطلب نشان‌دهنده کارایی و در جهت اطمینان بودن نتایج بدست آمده از تحقیق حاضر است. لازم به ذکر است که این درصد اختلاف بین نتایج این سه روش، محدود به پارامترهای انتخابی در حل این مثال بوده و لزوماً قابل تعمیم به همه پارامترهای ممکن برای مساله نیست.

۵- نتیجه‌گیری

مهمترین نتایج بدست آمده از این تحقیق عبارتند از:

- استفاده از زوایای اصطکاک داخلی و چسبندگی مماسی متفاوت برای توده‌سنگ بسته به سطح تنش موجود، منجر به دستیابی به نتایج دقیق‌تری نسبت به فرض مقادیر ثابت زاویه اصطکاک و چسبندگی در کل مکانیسم گسیختگی می‌شود.
- فاکتور دست‌خوردگی توده‌سنگ تاثیر قابل توجهی در پایداری شیروانی سنگی دارد، به گونه‌ای که با افزایش مقدار آن از صفر تا یک، عدد پایداری ۱۳ برابر خواهد شد. بنابراین توصیه می‌شود با بکارگیری روش‌های نوین و حداکثر دقت در ترانسه‌برداری، میزان دست‌خوردگی حین اجرا به حداقل برسد تا عدد پایداری کاهش یافته و در نتیجه ضریب اطمینان افزایش یابد.
- مقاومت فشاری تک محوری سنگ بکر (σ_{ci}) بر مقدار عدد پایداری تاثیر چندانی ندارد، اما بر مقدار ضریب اطمینان موثر است. با افزایش σ_{ci} از ۲ MPa به ۵۰ MPa، ضریب اطمینان ۲۵ برابر می‌شود.
- افزایش وزن مخصوص توده‌سنگ و همچنین ارتفاع شیروانی، تاثیر چندانی بر عدد پایداری ندارد، اما منجر به کاهش ضریب اطمینان خواهد شد. با افزایش γ از ۲۰ kN/m³ به ۲۵ kN/m³، ضریب اطمینان به میزان ۲۰ درصد کاهش می‌یابد، حال آنکه با افزایش ارتفاع شیروانی از ۵ m به ۳۰ m، مقدار کاهش ضریب اطمینان معادل ۸۳ درصد خواهد بود.
- با افزایش m_i مقدار عدد پایداری کاهش و در نتیجه ضریب اطمینان افزایش می‌یابد. به ازای پارامترهای در نظر گرفته شده در تحقیق حاضر، با افزایش m_i از ۵ به ۲۵، عدد پایداری کاهشی ۸۰ درصدی را تجربه خواهد کرد.
- افزایش GSI توده‌سنگ تاثیری معکوس بر عدد پایداری دارد، بگونه‌ای که با افزایش GSI از ۱۰ به ۹۰، عدد پایداری کاهشی چشمگیر معادل ۹۹ درصد خواهد یافت که نشان‌دهنده تاثیر قابل توجه GSI بر پایداری شیروانی سنگی است.

- با افزایش زاویه شیروانی با افق، عدد پایداری افزایش و ضریب اطمینان کاهش می‌یابد. طبق نتایج بدست آمده، با افزایش این زاویه از 30° به 75° نسبت به افق، عدد پایداری بیش از ۱۲ برابر خواهد شد.

مراجع

- [1] Ping, D.D. Lian-heng, Z. Liang, L. (2017). Limit equilibrium analysis for rock slope stability using basic Hoek-Brown strength criterion. *J. Central South University*, 24, 2154-2163.
- [2] Zheng, H. Li, T. Shen, J. Xu, C. Sun, H. Lü, Q. (2018). The effects of blast damage zone thickness on rock slope stability. *Engineering Geology*, 246, 19-27.
- [3] Wei, Y. Jiabin, L. Zoghong, L. Wei, W. Xiaoyun, S. (2020). A strength reduction method based on the Generalized Hoek-Brown (GHB) criterion for rock slope stability analysis. *Comput. Geotech.*, 117, 103240.
- [4] Kumar, V. Himanshu, N. Burman, A. (2019). Rock Slope Analysis with Nonlinear Hoek-Brown Criterion Incorporating Equivalent Mohr-Coulomb Parameters. *Geotech. Geol. Eng.*, 37, 4741-4757.
- [5] Rafiei Renani, H. Martin, D. (2020). Slope Stability Analysis using Equivalent Mohr-Coulomb and Hoek-Brown criteria. *Rock Mech. Rock Eng.*, 53, 13-21.
- [6] Drescher, A. Christopoulos, C. (1988). Limit analysis slope stability with nonlinear yield condition. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 12, 341-345.
- [7] Yang, XL. Li, L. Yin, JH. (2004). Stability analysis of rock slopes with a modified Hoek-Brown failure criterion. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 28, 181-190.
- [8] Li, AJ. Merifield, RS. Lyamin, AV. (2008). Stability charts for rock slopes based on the Hoek-Brown failure criterion. *Int. J. Rock Mech. Mining Sci.*, 45, 689-700.
- [9] Li, AJ. Merifield, RS. Lyamin, AV. (2011). Effect of rock mass disturbance on the stability of rock slopes using the Hoek-Brown failure criterion. *Comput. Geotech.*, 38, 546-58.
- [10] Okamoto, S. (1956). Bearing capacity of sandy soil and lateral earth pressure during earthquake. In: *Proceedings of the first World Conf. Earthquake Eng.* Berkeley, CA, 1-26.
- [11] Siad, L. (2009). Seismic stability analysis of fractured rock slopes by yield design theory. *Soil Dynam. Earthquake Eng.*, 23, 203-212.
- [12] Yang, XL. (2007). Seismic displacement of rock slopes with nonlinear Hoek-Brown failure criterion. *Int. J. Rock Mech. Mining Sci.*, 44, 948-953.
- [13] Donald, J.B. Chen, Z. (1997). Slope stability analysis by the upper bound approach fundamentals and methods. *Canadian Geotechnical J.*, 853- 862.
- [14] Michalowski, R.L. Park, D. (2020). Stability assessment of slopes in rock governed by the Hoek-Brown strength criterion. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 127, 104217.
- [15] Park, D. Michalowski, R.L. (2021). Three-dimensional stability assessment of slopes in intact rock governed by the Hoek-Brown failure criterion. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 137, 104522.
- [16] Mao, N. Al-bitter, T. Soubra, A. (2012). Probabilistic analysis and design of strip foundations resting on rocks obeying Hoek-Brown failure criterion. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 49, 45-58.
- [17] AlKhafaji, H. Imani, M. Fahimifar, A. (2020). Ultimate Bearing Capacity of Rock Masse Foundations Subjected to Seepage Forces Using Modified Hoek-Brown Criterion. *Rock Mech. Rock Eng.*, 53, 251-268.
- [18] Shamloo, S. Imani, M. (2020). Upper bound solution for the bearing capacity of rock masses considering the embedment depth. *Ocean Eng.*, 218, 108169.
- [19] Shamloo, S. Imani, M. (2021). Upper bound solution for the bearing capacity of two adjacent footings on rock masses. *Comput. Geotech.*, 129, 103855.
- [20] Chen, W.F. and Liu, X.L. (1990). *Limit analysis in soil mechanics*. Amsterdam: Elsevier Science.
- [21] Shen, J. Karakus, M. Xu, C. (2013). Chart-based slope stability assessment using the Generalized Hoek-Brown criterion. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 64(6), 210-219.
- [22] Li, AJ. Cassidy, MJ. Wang, Y. Merifield, R.S., Lyamin, A.V. (2012). Parametric Monte Carlo studies of rock slopes based on the Hoek-Brown failure criterion. *Comput. Geotech.*, 45, 11-18.
- [23] Qian, Z.G. Li, AJ. Lyamin, AV. Wang, CC. (2017). Parametric studies of disturbed rock slope stability based on finite element limit analysis methods. *Comput. Geotech.*, 81, 155-166.
- [24] Sun, C. Chai, J. Xu, Z. Qin, Y. Chen, X. (2016). Stability charts for rock mass slopes based on the Hoek-Brown strength reduction technique. *Engineering Geology*, 214, 94-106.
- [25] Nekouei, A.M. Ahangari, K. (2013). Validation of Hoek-Brown failure criterion charts for rock slopes. *Int. J. Min. Sci. Tech.*, 23, 805-808.