

Lateral buckling analysis of axially functionally graded thin-walled beam with varying cross-section under different boundary conditions

Masoumeh Soltani¹, Fahimeh Sajjadi-nejad¹, Ahmad Reza Ghasemi^{2*}

1- Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, University of Kashan, Kashan, Iran

2- Department of Solid Mechanics, Faculty of Mechanical Engineering, University of Kashan, Kashan, Iran

ABSTRACT

In this article, lateral-torsional stability of axially functionally graded (AFG) non-prismatic beam with doubly symmetric thin-walled cross-section under transverse loading is investigated. Material properties of FG beam with variable cross-section are supposed to vary through longitudinal direction of the constituents according to simple power-law distribution (P-FGM). Based on Vlasov's model and using small displacements theory, the governing equilibrium equations are derived through the energy principle for AFG web and/or flanges tapered I-beams. The differential quadrature method is then selected to numerically solve the resulting system of governing fourth-order differential equations with variable coefficients. In this approach, a non-uniform mesh point distribution (Chebyshev-Gauss-Lobatto) is used for provide accuracy of solutions and convergence rate. Finally, the lateral-torsional buckling loads are calculated by solving an eigenvalue problem of the obtained algebraic system. In the case of homogenous members with variable cross-section, the outcomes of this work are compared with the available benchmarks and there is an excellent agreement. Finally, the impacts of involved parameters such as boundary conditions, load height parameter, power law index and web and flanges tapering ratios on the non-dimensional lateral buckling load are discussed. The results of this research reveal that the impacts of non-uniformity in the cross-section and gradient index play significant roles on lateral-torsional stability behavior of tapered I-beams. Furthermore, the highest buckling capacity is acquired when the transverse load is applied to the bottom flange.

ARTICLE INFO

Receive Date: 06 January 2020

Revise Date: 20 March 2020

Accept Date: 09 August 2021

Keywords:

Functionally graded material
Thin-walled beam
Lateral-torsional stability
Tapered beam
Differential quadrature method.

All rights reserved to Iranian Society of Structural Engineering.

doi: <https://dx.doi.org/10.22065/jsce.2021.214758.2041>

*Corresponding author: Ahmad Reza Ghasemi

Email address: ghasemi@kashanu.ac.ir

تحلیل کمانش جانبی تیر جدار نازک با مقطع متغیر از جنس مواد مدرج تابعی تحت شرایط مرزی مختلف

معصومه سلطانی^۱، فهمیه سجادی نژاد^۲، احمدرضا قاسمی^{۳*}

۱- استادیار، دانشکده مهندسی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی، دانشگاه کاشان، ایران

۳- دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

چکیده

در این پژوهش پایداری جانبی-پیچشی تیر غیرمنشوری با مقطع جدار نازک متقارن ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت بارگذاری عرضی مورد مطالعه قرار گرفته است. خواص مکانیکی ماده مدرج براساس تابع توزیع توانی در راستای طول عضو به طور پیوسته تغییر می کند. نسبت پواسون بعلت تغییرات اندک در مواد مهندسی ثابت فرض شده است. معادلات دیفرانسیل حاکم بر پایداری تیر جدار نازک ناهمگن براساس فرضیات حاکم بر تئوری کلاسیک و لاسو و صرف نظر نمودن از تغییر شکل های برشی به کمک روش انرژی استخراج شده است. سپس، با استفاده از روش عددی مربعات دیفرانسیل و فرضیات حاکم بر این روش، دستگاه معادلات پایداری حل می گردد. در ادامه، با توجه به شرایط مرزی حاکم بر اعضای جدار نازک با مقطع متقارن و با استفاده از روش حل مقادیر ویژه، مقدار بار کمانش بحرانی محاسبه می شود. پس از صحت سنجی نتایج و اثبات دقت و کارآمدی روش مذکور در خصوص تیر همگن با مقطع متغیر، تاثیر پارامترهای مختلف همچون شرایط مرزی گوناگون، محل اعمال بار عرضی، توان ماده مدرج تابعی و تغییر ابعاد بال و جان نیمرخ I-شکل بر روی بار کمانش جانبی بدون بعد مورد ارزیابی قرار گرفته است. نتایج حاصل از این تحقیق نشان می دهد که تغییر ابعاد مقطع و شاخص کسر حجمی تاثیر بسیاری بر پایداری جانبی-پیچشی تیر ماهیچه ای دارد. همچنین در تمامی شرایط، بیشترین ظرفیت کمانشی مربوط به حالتی است که بار عرضی به بال پایین نیمرخ اعمال می گردد.

کلمات کلیدی: ماده مدرج تابعی، تیر جدار نازک، پایداری جانبی-پیچشی، تیر ماهیچه ای، روش مربعات دیفرانسیلی

سابقه مقاله:		شناسه دیجیتال:			
دریافت	بازنگری	پذیرش	انتشار آنلاین	چاپ	doi:
۱۳۹۸/۱۰/۱۶	۱۳۹۹/۰۱/۰۱	۱۴۰۰/۰۵/۱۸	۱۴۰۰/۰۵/۱۸	۱۴۰۱/۰۱/۳۱	https://dx.doi.org/10.22065/jsce.2021.214758.2041
*نویسنده مسئول:		احمدرضا قاسمی			
پست الکترونیکی:		ghasemi@kashanu.ac.ir			

۱- مقدمه

از جمله المان‌های سازه‌ای که به‌طور گسترده در بسیاری از زمینه‌ها از جمله مهندسی سازه، هوافضا و خودرو سازی مورد استفاده قرار گرفته‌اند، می‌توان به مقاطع جدار نازک اشاره کرد. استفاده از این اعضا به علت توانایی آن‌ها در مصرف اقتصادی مصالح و بهینه‌سازی وزن سازه، در زمینه‌های ذکر شده رو به افزایش است. در صورتی که بال فشاری تیر با مقطع جدار نازک باز در فواصل مناسب توسط تکیه‌گاه‌های جانبی کافی مهار نشده‌باشد، تحت تنش‌های فشاری ناشی از لنگر خمشی حول محور قوی خود، دچار کمناش می‌شود. از طرفی بالی که تحت کشش قرار دارد، تمایلی به کمناش نداشته و از این رو کمناش بال فشاری همراه با پیچش مقطع خواهد بود، که این پدیده کمناش پیچشی-جانبی نامیده می‌شود. در سال‌های اخیر با توسعه موتورهای پر قدرت صنایع هوافضا، توربین‌ها و راکتورها و دیگر ماشین‌ها، نیاز به مواد با مقاومت حرارتی و مکانیکی بالا احساس شده است. مهندسان برای رفع این نیاز از مواد کامپوزیت لایه‌ای استفاده کردند که تنش‌های حرارتی در این مواد موجب پدیده لایه لایه شدن می‌گردد. با توجه به این مشکل طرح ماده‌ای مرکب که مقاومت حرارتی مناسب داشته باشد و همچنین لایه لایه نشود، ضرورت پیدا کرد. بنابراین دانشمندان علم مواد در سال ۱۹۸۴ در ژاپن برای اولین بار، مواد مدرج تابعی (FGM)^۱ را به‌عنوان مواد با تحمل حرارتی بالا پیشنهاد نمودند. مواد تابعی، مواد کامپوزیتی با ریز ساختار ناهمگنی می‌باشند که، خواص مکانیکی آن‌ها به‌طور ملایم و پیوسته از یک سطح به سطح دیگر جسم تغییر می‌کند. بعلاوه تغییر تدریجی نسبت مواد ترکیبی، مشکل پیدایش ترک در کامپوزیت‌های لایه‌ای که ناشی از تنش‌های پسماند و یا در اثر بارگذاری حرارتی و مکانیکی بود، رفع گردید.

باتوجه به کاربرد بی‌شمار نیم‌رخ‌های جدار نازک تاکنون مطالعات مختلفی در رابطه با تحلیل دینامیکی و کمناشی این اعضا صورت گرفته است. علاوه بر این، مواد مدرج تابعی با خواص منحصر به فرد خود توجه پژوهشگران بسیاری را به خود معطوف ساخته تا مطالعات متعددی را در این زمینه انجام دهند. به عنوان مثال، اتارد^۲ معادلات پایداری حاکم بر تیرهای جدار نازک منشوری را با در نظر گرفتن تغییر شکل‌های برشی استخراج نمود [۱]. شهابا^۳ و همکاران [۲] بار کمناش بحرانی و فرکانس طبیعی ارتعاش را برای تیر تیموشنکو با مقطع متغیر با توجه به شرایط مرزی کلاسیک و غیر کلاسیک و با ارائه یک روش عددی جدید بر اساس روش اجزای محدود محاسبه نمودند [۲]. الشرباگی^۴ و همکاران [۳] در پژوهشی به بررسی خصوصیات ارتعاش آزاد تیر ساخته شده از مواد مدرج تابعی بوسیله روش المان محدود پرداختند. در ادامه، مهانتی^۵ و همکاران [۴] به تحلیل ارتعاش آزاد یک تیر تیموشنکو دوار ساخته شده از مواد مدرج تابعی پرداختند که خصوصیات مکانیکی مصالح در راستای ضخامت تیر به صورت تابع نمایی و یا توانی تغییر می‌کرد. در سال ۲۰۱۳، عسگریان و همکاران [۵] در پژوهشی کمناش پیچشی-جانبی تیر ماهیچه‌ای همگن با مقطع جدار نازک باز نامتقارن را مورد بررسی قرار دادند. ظفرمند^۶ و کدخدایان [۶] به تحلیل سه‌بعدی دینامیکی و انتشار موج تنش در صفحات ضخیم مدرج تابعی در برابر بار فشاری ناشی از ضربه پرداختند. در تحقیقی که انجام دادند فرض شد که خواص مکانیکی ماده به‌طور پیوسته و بر اساس تابع توزیع توانی در راستای ضخامت متغیر است. تحلیل پایداری و ارتعاش آزاد تیر جدار نازک ماهیچه‌ای با مقطع نامتقارن با استفاده از یک روش اجزاء محدود بر مبنای بسط سری توانی و با ۷ درجه آزادی در هر گره توسط سلطانی و همکاران [۷، ۸] ارائه گردیده است. در تحقیقات آن‌ها به بررسی پایداری خمشی-پیچشی تیرهای فولادی تحت شرایط مرزی مختلف پرداخته شده است. شوارتسمن^۷ و ماژک [۹] یک روش عددی را برای تحلیل پایداری تیر ساخته شده از مواد مدرج تابعی بر روی بستر الاستیک ارائه دادند. کوش^۸ [۱۰] به کمک روش عددی رایلی-ریتز بار کمناش جانبی-پیچشی را برای تیر ماهیچه‌ای دوسر مفصل با مقطع متقارن تعیین نمود. در پژوهشی دیگر ژرفی^۹ و اختراعی طوسی [۱۱] به تحلیل خزشی دیسک دوار ساخته شده از مواد مدرج تابعی با پروفیل غیریکنواخت پرداختند. حیدری رارانی^{۱۰} و همکاران [۱۲] به حل تحلیلی

¹ Functionally graded material

² Attard

³ Shahba

⁴ Alshorbagy

⁵ Mohanty

⁶ zafarmand

⁷ Shvartsman

⁸ Kus

⁹ Zharfi

¹⁰ Heidari-Rarani

ارتعاشات آزاد نانو ورق دولایه‌ی تقویت شده با نانو لوله های کربنی مدرج تابعی واقع بر بستر الاستیک پرداختند. در این مطالعه، معادلات حاکم با استفاده از روش انرژی و تئوری غیرمحلای ارینگن استخراج و با استفاده از روش ناور حل شدند. وانگ^{۱۱} و همکاران [۱۳] ارتعاش آزاد تیرهای ساخته شده از مواد مدرج تابعی دوجته را بررسی کردند که در آن خصوصیات مصالح در امتداد طول به وسیله تابع توزیع توانی با شاخص کسر حجمی دلخواه و در راستای ضخامت به صورت نمایی تغییر می‌کند. نگویان^{۱۲} و همکارانش [۱۴-۱۷] در پژوهش‌هایی رفتار خمشی، دینامیکی و پایداری تیر منشوری با نیم‌رخ جدار نازک باز از جنس مواد مدرج را به کمک روش اجزای محدود بررسی کردند. در این مقالات فرض شده است که خصوصیات مکانیکی مصالح در راستای ضخامت باتوجه به قانون توزیع توانی تغییر می‌کند. در پژوهشی، یوسف زاده^{۱۳} [۱۸] کمانش حرارتی ورق دایره‌ای مدرج تابعی دو جهته را مورد بررسی قرارداد. چن^{۱۴} و چانگ [۱۹] یک حل بسته را به منظور تعیین نمودن فرکانس طبیعی ارتعاش تیر مدرج تابعی با نرخ توانی در راستای ضخامت با فرض مدل تیر اوپلر-برنولی ارائه دادند. خورشیدی^{۱۵} و همکاران [۲۰] در پژوهشی به تحلیل ارتعاش آزاد نانو ورق مرکب مستطیلی تابعی هدمند در محیط حرارتی پرداختند. آن‌ها برای به دست آوردن فرکانس طبیعی نانو ورق مرکب، از مدل الاستیسیته‌ی غیرمحلای ارینگن بر پایه‌ی تئوری تغییر شکل برشی نمایی استفاده نمودند. ژایو^{۱۶} و همکارانش [۲۱] با استفاده از روش چیشیف به بررسی و تحلیل ارتعاش آزاد تیر مدرج تابعی با مقطع متغیر پرداختند. چن و چانگ [۲۲] در تحقیقی دیگر ارتعاش آزاد تیر ساخته شده از مواد مدرج را براساس فرضیات تیر تیموشنکو بررسی کردند که مدول ینگ در راستای ضخامت به صورت تابع توانی تغییر می‌کند. سلطانی و عسگریان [۲۳] پایداری تیر تیموشنکو یک سرگردار با مقطع متغیر و ساخته شده از مواد مدرج تابعی با نرخ توزیع نمایی و توانی را به کمک یک روش المان محدود جدید با یک درجه آزادی در هر گره بررسی کردند. اخیرا رضایی پزند^{۱۷} و همکاران [۲۴] رفتار کمانش جانبی-پیچشی تیر ماهیچه‌ای دوسر مفصل با مقطع متقارن از جنس مواد تابعی دو طرفه که دارای مهار جانبی کافی در طول خود است را با استفاده از روش ریتز مورد مطالعه قرار دادند. همچنین سلطانی و همکاران [۲۵] با استفاده از روش اجزاء محدود اصلاح شده با فرض آزادی دوران در اتصالات به تحلیل پایداری جانبی تیر جدار نازک مدرج تابعی با مقطع متغیر پرداختند. روش آن‌ها فقط برای تیرهای دوسر مفصل (آزادی در برابر دوران و تابیدگی) کاربرد دارد.

همان‌طور که ملاحظه می‌گردد، بیشتر تحقیقات انجام‌شده در خصوص تحلیل تیرهای غیرمنشوری با مقطع مستطیلی توپر ساخته شده از مواد مدرج تابعی است و مطالعات صورت گرفته در رابطه با پایداری تیرهای جدار نازک ساخته شده از (FGM) بسیار محدود است [۱۴-۱۷، ۲۴-۲۵]. بنابراین، نویسندگان در ادامه مطالعات خود در زمینه تیرهای جدار نازک و مواد مدرج تابعی [۵، ۷-۸، ۲۳ و ۲۵]، در این مقاله معادلات حاکم بر پایداری جانبی-پیچشی تیر جدار نازک ماهیچه‌ای ناهمگن را تحت شرایط مرزی مختلف ارائه داده و تأثیر خروج از مرکزیت محل اعمال بار عرضی را روی پایداری جانبی بررسی نموده‌اند. بدین منظور و در مرحله نخست، دستگاه معادلات حاکم بر کمانش جانبی-پیچشی عضو جدار نازک ماهیچه‌ای با نیم‌رخ متقارن و از جنس مواد مدرج تابعی براساس فرضیه تغییر شکل‌های کوچک مطابق اصول حاکم بر تئوری و لاسو و به کمک اصل پایستگی انرژی پتانسیل بدست می‌آید که دستگاه معادله حاکم بر این نوع مقطع شامل دو معادله دیفرانسیل مرتبه چهار کوپل با ضرایب متغیر است. از آن‌جا که روش مربعات دیفرانسیلی روشی مناسب برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل می‌باشد، در این پژوهش با استفاده از این روش پایداری جانبی تیر جدار نازک با مقطع متغیر از جنس مواد تابعی بررسی شده است. به‌منظور بررسی همگرایی و صحت روش ارائه شده، در ابتدا تیر ماهیچه‌ای همگن تحلیل و نتایج آن با مقادیر بدست آمده از نرم افزار اجزاء محدود انسیس مقایسه شده که سازگاری و تطابق مطلوبی بین نتایج مشاهده می‌شود. در نهایت تأثیر پارامترهای مختلف مانند توان طرح اختلاط، خروج از مرکزیت بار عرضی، تغییر ابعاد بال و جان نیم‌رخ و شرایط تکیه‌گاهی روی مقادیر بار کمانش جانی-پیچشی تیر جدار نازک به صورت دقیق مطالعه شده است.

¹¹ Wang

¹² Nguyen

¹³Yousefzadeh

¹⁴ Zhao

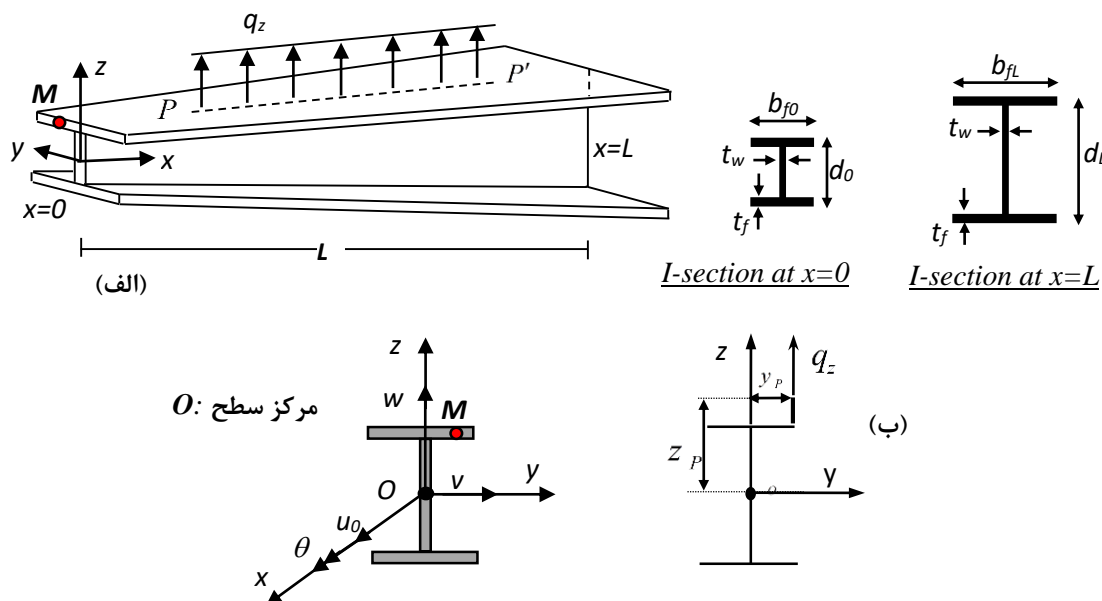
¹⁵ khorshidi

¹⁶ Lee

¹⁷R-Pajand

۲- فرمول بندی مسئله

در شکل ۱ یک تیر جدار نازک با مقطع متغیر از جنس مواد مدرج تابعی و به طول L که تحت بارگذاری عرضی q_z قرار دارد، نشان داده شده است. نیمرخ عضو I-شکل، متقارن فرض شده که بال بالا و پایین آن باهم برابر هستند ($b_{ft} = b_{fb} = b_f$). همچنین ضخامت جان (t_w) و بالها (t_f) در امتداد عضو ثابت هستند. مطابق شکل ۱، دستگاه مختصات دکارتی OXYZ منطبق بر مرکز سطح نیمرخ تیر (تار خنثی) در نظر گرفته شده است که محورهای x ، y و z به ترتیب در راستای طولی، جانبی و عمودی هستند. میدان جابه جایی حاکم بر تیر جدار نازک نسبت به تار خنثی گذرنده از مرکز سطح نیمرخ تیر در شکل ۱ نشان داده شده است. در تحلیل کمانشی تیر مورد نظر، تغییر مکانها کوچک و تحلیل در محدوده الاستیک خطی مورد نظر است.



شکل ۱: الف) تیر جدار نازک با مقطع متغیر I-شکل، ب) سیستم مختصات، مولفه های تغییر شکل و شرایط بارگذاری

بر اساس تئوری کلاسیک و لاسو و صرف نظر از تغییر شکل های برشی، میدان جابه جایی نقاط روی مقطع تیر در راستای محوری، جانبی و عمودی به صورت زیر تعریف می گردند:

$$U(x, y, z) = u_0(x) - y \frac{\partial v(x)}{\partial x} - z \frac{\partial w(x)}{\partial x} - \phi(y, z) \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} \quad (1)$$

$$V(x, y, z) = v(x) - z \theta(x)$$

$$W(x, y, z) = w(x) + y \theta(x)$$

که در آن u_0 ، v و w به ترتیب جابه جایی های مرکز سطح تیر در راستای محوری، جانبی و عرضی هستند. θ نشان دهنده چرخش عمود بر مقطع تیر حول محور x است که زاویه پیش نامیده می شود. همچنین $\phi(y, z)$ یک متغیر مربوط به خصوصیات هندسی سطح مقطع است و با استفاده از تئوری سنت ونان^{۱۸} بر روی سطح مقطع تعریف می شود. برای تحلیل پایداری یک تیر جدار نازک، می بایست مؤلفه های کرنش-تغییر مکان مطابق با تانسور کرنش گرین^{۱۹} و با در نظر گرفتن ترم های خطی و غیرخطی محاسبه شود. مؤلفه های کرنش گرین با در نظر گرفتن اثرات تغییر مکان های بزرگ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_i} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} \right) = \varepsilon_{ij}^l + \varepsilon_{ij}^* \quad i, j, k = x, y, z \quad (2)$$

¹⁸ Saint Venant

¹⁹ Green's Strain Tensor

ε_{ij} و ε_{ij}^* جملات خطی و غیرخطی کرنش هستند. برای تیر جدار نازک مولفه‌های تانسور کرنش بصورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &\approx U' + \frac{1}{2}(V'^2 + W'^2) = \varepsilon_{xx}' + \varepsilon_{xx}^* \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} \right) = \varepsilon_{xy}' + \varepsilon_{xy}^* \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial z} \right) = \varepsilon_{xz}' + \varepsilon_{xz}^*\end{aligned}\quad (3)$$

با استفاده از معادلات (۱) تا (۳)، روابط بین مؤلفه‌های کرنش (خطی و غیرخطی) و تغییر مکان مربوط به کلیه نقاط روی مقطع یک تیر جدار نازک بصورت زیر می‌باشند:

$$\varepsilon_{xx}' = u_0' - yv'' - zw'' - \phi\theta'' \quad (4)$$

$$\gamma_{xy}' = 2\varepsilon_{xy}' = - \left(z + \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \theta' \quad (5)$$

$$\gamma_{xz}' = 2\varepsilon_{xz}' = \left(y - \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \theta' \quad (6)$$

$$\varepsilon_{xx}^* = \frac{1}{2} (v'^2 + w'^2 + r^2 \theta'^2) + yw'\theta' - zv'\theta' \quad (7)$$

$$\gamma_{xy}^* = (w' + \theta'y)\theta \quad (8)$$

$$\gamma_{xz}^* = -(v' + \theta'z)\theta \quad (9)$$

همچنین:

$$\varepsilon_{yy}' = \varepsilon_{zz}' = \gamma_{yz}' = \varepsilon_{yy}^* = \varepsilon_{zz}^* = \gamma_{yz}^* = 0 \quad (10)$$

در رابطه (۷)، پارامتر r بیانگر فاصله هر نقطه دلخواه روی نیم‌رخ تا مرکز سطح است:

$$r = \sqrt{y^2 + z^2} \quad (11)$$

تنش‌های اولیه بر روی سطح مقطع زمانی که تیر تحت کمانش جانبی-پیچشی بر اثر لنگر خمشی داخلی قرار دارد، بصورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\sigma_{xx}^0 = -\frac{M_y}{I_y} z, \quad \tau_{xz}^0 = \frac{V_z}{A} = \frac{-M'_y}{A} \quad (12)$$

در رابطه فوق، پارامترهای τ_{xz}^0 و σ_{xx}^0 به ترتیب تنش عمودی و تنش برشی میانگین ناشی از بارهای وارده هستند. همچنین، لنگر خمشی (M_y) ناشی از بارگذاری خارجی روی عضو است. بر مبنای قانون هوک و با توجه به میدان جابه‌جایی مدنظر، روابط تنش-کرنش حاکم بر مصالح ارتجاعی به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\sigma_{xx} = E(x)\varepsilon_{xx}, \quad \tau_{xy} = G(x)\gamma_{xy}, \quad \tau_{xz} = G(x)\gamma_{xz} \quad (13)$$

که در آن، E و G مدول الاستیسیته و برشی هستند. در این پژوهش، تیر با مقطع متغیر از جنس مواد مدرج تابعی مدنظر است که از ترکیب فلز و سرامیک ساخته شده است. خواص ماده در راستای طولی عضو به صورت پیوسته و تدریجی از خواص کاملاً سرامیکی (زیرکونیا) در انتهای سمت چپ، به خواص کاملاً فلزی (آلومینیوم) در سمت راست تغییر می‌کند. در حالی که جنس مصالح تیر در راستای ضخامت ثابت در نظر گرفته شده است. در این مقاله، فرض شده است که توزیع خواص ماده از قانون اختلاط خطی کسر حجمی مواد پیروی کرده و بر اساس تابع توزیع توانی در امتداد محور طولی تیر تغییر می‌کند. همچنین نسبت پواسون به علت تغییرات ناچیز در مواد مهندسی ثابت در نظر گرفته شده است. بنابراین، توزیع ضریب ارتجاعی و برشی در امتداد طول را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$E(x) = E_Z + (E_A - E_Z) \left(\frac{x}{L}\right)^m \quad (14)$$

$$G(x) = \frac{E(x)}{2(1+\nu)} \xrightarrow{\nu=0.3} G(x) = \frac{E(x)}{2.6}$$

m عددی مثبت و حقیقی است که شاخص ناهمگنی ماده نام دارد و چگونگی ترکیب کسر حجمی سرامیک و آلومینیوم را در امتداد طولی عضو مشخص می کند. با افزایش مقدار شاخص مذکور، میزان سرامیک در ترکیب افزایش پیدا می کند. زیر نویس های A و Z به ترتیب به خواص فلز و سرامیک اشاره می کنند و مقدار مرتبط با ضریب یانگ هر یک به صورت زیر است:

$$ZrO_2: E_Z = 200GPa; \quad Al: E_A = 70GPa \quad (15)$$

۳- تعیین معادلات پایداری حاکم بر سیستم

در این قسمت برای تعیین معادلات تیر جدار نازک FGM از اصل حداقل کردن انرژی پتانسیل کلی استفاده شده است که به شرح

زیر می باشد:

$$\delta \Pi = \delta(U - W_e) = 0 \quad (16)$$

$$U_I = \frac{1}{2} \int_{L,A} \tau_{ij} \varepsilon_{ij}^l dA dx = \frac{1}{2} \int_{L,A} (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx}^l + \tau_{xy} \gamma_{xy}^l + \tau_{zy} \gamma_{zy}^l) dA dx = \frac{1}{2} \int_{L,A} (E \varepsilon_{xx}^l{}^2 + G \gamma_{xy}^l{}^2 + G \gamma_{zy}^l{}^2) dA dx \quad (17)$$

که در رابطه فوق، A و L به ترتیب نشان دهنده مساحت مقطع و طول عضو هستند. با استفاده از روابط (۴) تا (۶) که مربوط به کرنش های خطی هستند و با انتگرال گیری بر روی سطح مقطع عضو، U_I بصورت زیر بدست می آید:

$$U_I = \frac{1}{2} \int_L (EA u_0'^2 + EI_z v''^2 + EI_y w''^2 + EI_\phi \theta''^2 + GJ \theta'^2) dx \quad (18)$$

در عبارت فوق، ترم های I_y و I_z به ترتیب نشان دهنده ممان اینرسی نسبت به محور قوی و ضعیف هستند. همچنین J و I_ϕ به ترتیب ممان اینرسی معادل پیچشی و ضریب تابیدگی می باشند. خصوصیات هندسی مقطع به ترتیب زیر تعریف می شوند:

$$A = \int_A dA, \quad I_y = \int_A z^2 dA, \quad I_z = \int_A y^2 dA, \quad I_\phi = \int_A \phi^2 dA \quad (19)$$

$$J = \int_A \left(\left(y - \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + \left(z + \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right) dA$$

معادله انرژی کرنشی ناشی از تنش های اولیه بصورت زیر تعریف می شود:

$$U_0 = \int_{L,A} \tau_{ij}^0 (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0) dA dx = \int_{L,A} \tau_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^* dA dx = \int_{L,A} (\sigma_{xx}^0 \varepsilon_{xx}^* + \tau_{xz}^0 \gamma_{xz}^*) dA dx \quad (20)$$

جایگذاری میدان کرنشی غیرخطی (۷)-(۹) و تنش ها در لحظه کمانش (۱۲) در رابطه (۲۰)، منجر به عبارت زیر می شود:

$$U_0 = \int_{L,A} \left(-\frac{M_y z}{I_y} \left(\frac{1}{2} (\nu^2 + w'^2 + r^2 \theta'^2) + yw' \theta' - zv' \theta' \right) + \frac{M_y'}{A} (\nu' \theta + \theta' \theta_z) \right) dA dx \quad (21)$$

پس از انتگرال گیری روی سطح، می توان عبارت حاکم بر انرژی کرنشی ناشی از تنش اولیه را به صورت عبارت انتگرالی از میدان جابه جایی بیان کرد:

$$U_0 = - \int_L M_y v'' \theta dx \quad (22)$$

کار خارجی ناشی از بارگذاری q_z در راستای عمودی و در امتداد خط PP' بر روی تیر به طریق زیر محاسبه می شود:

$$W_e = \int_L (q_z w_p(x)) dx \quad (23)$$

w_p مولفه تغییر مکان عمودی سطح مقطع منطبق بر نقطه P یا همان محل اثر بار است که براساس فرضیات سینماتیک غیرخطی معرفی شده در [۵] به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$w_p = w - z(1 - \cos \theta) + y \sin \theta \quad (24)$$

با استفاده از بسط تیلور و براساس فرضیه تغییر شکل های کوچک:

$$\sin \theta = \theta, \quad \cos \theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 \quad (25)$$

خواهیم داشت:

$$w_p = w + e_y \theta - e_z \frac{\theta^2}{2} \quad (26)$$

باتوجه به شکل ۱:

$$e_z = z_p, \quad e_y = y_p \quad (27)$$

و در نهایت رابطه کار خارجی به شکل زیر حاصل می شود:

$$W_e = \int_L \left(q_z w + \hat{M}_t \theta - \frac{1}{2} M_t \theta^2 \right) dx \quad (28)$$

در رابطه بالا \hat{M}_t و M_t لنگر پیچشی مرتبه اول و دوم هستند که بر اثر خروج از مرکزیت بار عرضی ایجاد می شوند:

$$\hat{M}_t = q_z y_p, \quad M_t = q_z e_z \quad (29)$$

با جایگذاری عبارات (۱۸)، (۲۲) و (۲۸) در رابطه (۱۶) و اعمال تغییرات نسبت به متغیرهای w, v, u_0 و سپس به کمک روش انتگرال گیری جزء به جزء جهت کاهش مرتبه دادن، دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم بر پایداری جانبی تیر جدار نازک ماهیچه ای از جنس مواد مدرج تابعی به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$(EAu_0')' = 0 \quad (30)$$

$$(EI_z v'')'' - (M_y \theta)'' = 0 \quad (31)$$

$$(EI_y w'')'' = q_z \quad (32)$$

$$(EI_\phi \theta'')'' - (GJ\theta')' - M_{y,v}'' = \hat{M}_t - M_t \theta(x) \quad (33)$$

شرایط مرزی حاکم بر معادلات بالا به ترتیب زیر هستند:

$$EAu_0' = 0 \quad \text{یا} \quad \delta(\partial u) = 0 \quad (34)$$

$$EI_z v'' - M_y \theta = 0 \quad \text{یا} \quad \delta\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0 \quad (35)$$

$$-(EI_z v'')' + (M_y \theta)' = 0 \quad \text{یا} \quad \delta(\partial v) = 0 \quad (36)$$

$$EI_y w'' = 0 \quad \text{یا} \quad \delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0 \quad (37)$$

$$-(EI_y w'')' = 0 \quad \text{یا} \quad \delta(\partial w) = 0 \quad (38)$$

$$EI_\phi \theta'' = 0 \quad \text{یا} \quad \delta\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) = 0 \quad (39)$$

$$-(EI_\phi \theta'')' + GJ\theta' = 0 \quad \text{یا} \quad \delta(\partial \theta) = 0 \quad (40)$$

در ادامه این پژوهش جهت سهولت مراحل حل فرض شده است که بار خارجی در راستای جانبی خروج از مرکزیت ندارد ($y_p = 0$) و فقط در راستای عمودی (امتداد جان) نسبت به مرکز سطح داری خروج از مرکزیت است. بنابراین باتوجه به رابطه (۲۹) و شکل ۱، پارامتر لنگر پیچشی مرتبه اول \bar{M}_p برابر صفر می شود. همچنین معادلات (۳۰) و (۳۲) بر روی کمانش جانبی تیر تاثیر گذار نیستند، بنابراین می توان از آن ها صرف نظر نمود. بنابراین دو معادله دیفرانسیل مرتبه چهار با ضرایب متغیر که وابسته به مولفه های تغییر شکل جانبی و پیچشی هستند، باقی می ماند. در نتیجه، حل این دستگاه با استفاده از روش های معمول تقریباً غیرممکن است و بایستی از یکی از روش های عددی موجود استفاده کرد. یکی از کارآمدترین و مناسب ترین این روش ها، روش مربعات دیفرانسیل و یا به اختصار روش DQ^2 است. بنابراین در ادامه، روش عددی مربعات دیفرانسیل برای حل دستگاه معادلات حاکم بر پایداری جانبی تیر جدار نازک ساخته شده از مواد مدرج تابعی و تعیین بار بحرانی کمانش جانبی-پیچشی به کار برده خواهد شد.

۴- روش مربعات دیفرانسیل

اساس این روش بر مبنای تقریب مشتق یک تابع در نقطه مشخص به صورت جمع حاصل ضرب فاکتورهای وزنی و مقادیر تابع در یکسری نقاط تعیین شده در محدوده حل مسئله است. یکی از مهمترین نکات در همگرایی نتایج، علاوه بر تعداد نقاط، چگونگی توزیع نقاط در دامنه حل آن است. بهترین نوع سیستم نقاط داده برداری که تاکنون ارائه شده است، توزیع نقطه ای غیریکنواخت (چیشف-گوس-لوباتو) است. این توزیع قادر به تعیین جواب های عددی با دقت بسیار خوب اما با تعداد گره های کم و هزینه محاسباتی پایین است [۲۶-۲۸]. بنابراین در این پژوهش از این توزیع استفاده شده است:

$$x_i = \frac{L}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{i-1}{N-1} \pi \right) \right], \text{ if } 0 \leq x \leq L \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (41)$$

در رابطه بالا، N تعداد نقاط انتخابی در امتداد طول عضو مورد نظر است. بر اساس روش تفاضلات مربعی، مشتقات یک تابع از هر مرتبه ای را در نقطه ای دلخواه مانند $x = x_i$ می توان بر حسب مقادیر تابع در تمامی بازه به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\left. \frac{d^r f}{dx^r} \right|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(r)} f(x_j) \quad (42)$$

که $A_{ij}^{(r)}$ ماتریس ضرایب وزنی است که مطابق رابطه زیر تقریب زده می شود:

$$A_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \frac{M(\xi_i)}{(\xi_i - \xi_j)M(\xi_j)} & \text{for } i \neq j \\ - \sum_{k=1, k \neq i}^N A_{ik}^{(1)} & \text{for } i=j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (43)$$

$$M(\xi_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^N (\xi_i - \xi_j) \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, N$$

همچنین، ضرایب وزن برای مشتقات مراتب بالاتر در امتداد طولی به صورت زیر تعریف می گردند:

$$A_{ij}^{(r)} = A_{ij}^{(1)} A_{ij}^{(r-1)} \quad 2 \leq r \leq N-1 \quad (44)$$

$$[A]^{(r)} = [A]^{(r-1)} \times [A]^{(1)}$$

یعنی با ضرب کردن ماتریس $[A]^{(1)}$ در خودش، ماتریس ضرایب وزنی که مشتق m می گیرد را می توان ساخت. در ادامه با معرفی مختصات بدون بعد ($\xi = x/L$) و اعمال قوانین روش تفاضلات مربعی، دستگاه معادلات دیفرانسیل پایداری را می توان به شکل جبری ارائه شده در روابط زیر بازنویسی نمود:

$$(EI_z)(\xi_j) \left(\sum_{j=1}^N A_{ij}^{(4)} v_j \right) + 2(EI_z)'(\xi_j) \left(\sum_{j=1}^N A_{ij}^{(3)} v_j \right) + (EI_z)''(\xi_j) \left(\sum_{j=1}^N A_{ij}^{(2)} v_j \right) - L^2 M_y(\xi_j) \left(\sum_{j=1}^N A_{ij}^{(2)} \theta_j \right) - 2L^2 M_y'(\xi_j) \left(\sum_{j=1}^N A_{ij}^{(1)} \theta_j \right) - L^2 M_y''(\xi_j) \theta_j = 0 \quad (45)$$

$$(EI_\phi)(\xi_j) \left(\sum_{j=1}^N A_{ij}^{(4)} \theta_j \right) + 2(EI_\phi)'(\xi_j) \left(\sum_{j=1}^N A_{ij}^{(3)} \theta_j \right) + (EI_\phi)''(\xi_j) \left(\sum_{j=1}^N A_{ij}^{(2)} \theta_j \right) - L^2(GJ)(\xi_j) \left(\sum_{j=1}^N A_{ij}^{(2)} \theta_j \right) - L^2(GJ)'(\xi_j) \left(\sum_{j=1}^N A_{ij}^{(1)} \theta_j \right) - L^2 M_y(\xi_j) \left(\sum_{j=1}^N A_{ij}^{(2)} v_j \right) + L^4 \hat{M}_t(\xi_j) \theta_j = 0 \quad (46)$$

معادلات (45) و (46) را نیز می‌توان به شکل ماتریسی ارائه شده در رابطه (47) و (48) نوشت:

$$[K_{vv}] \{v\} + [M_{v\theta}] \{\theta\} = 0 \quad (47)$$

$$[K_{\theta\theta}] \{\theta\} + [M_{\theta v}] \{v\} = 0 \quad (48)$$

که در این روابط ماتریس‌های مربوط به هر معادله براساس عبارات زیر تعریف شده‌اند:

$$\begin{aligned} [K_{vv}] &= [a^1][A]^{(4)} + [b^1][A]^{(3)} + [c^1][A]^{(2)} \\ [K_{\theta\theta}] &= [a^2][A]^{(4)} + [b^2][A]^{(3)} + [c^2][A]^{(2)} + [d^2][A]^{(1)} + [f^2] \\ [M_{v\theta}] &= [d^1][A]^{(2)} + [e^1][A]^{(1)} + [f^1] \\ [M_{\theta v}] &= [e^2][A]^{(2)} \end{aligned} \quad (49)$$

درایه‌های ماتریس‌های $i = 1, 2$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} a_{jk}^1 &= (EI_z)(\xi_j) \delta_{jk}; b_{jk}^1 = 2(EI_z)'(\xi_j) \delta_{jk} \\ c_{jk}^1 &= (EI_z)''(\xi_j) \delta_{jk}; d_{jk}^1 = -L^2 M_y(\xi_j) \delta_{jk} \\ e_{jk}^1 &= -2L^2 M_y'(\xi_j) \delta_{jk}; f_{jk}^1 = -L^2 M_y''(\xi_j) \delta_{jk} \\ a_{jk}^2 &= (EI_\phi)(\xi_j) \delta_{jk}; b_{jk}^2 = 2(EI_\phi)'(\xi_j) \delta_{jk} \\ c_{jk}^2 &= (EI_\phi)''(\xi_j) - L^2(GJ)(\xi_j) \delta_{jk} \\ d_{jk}^2 &= -L^2(GJ)'(\xi_j) \delta_{jk}; e_{jk}^2 = -L^2 M_y(\xi_j) \delta_{jk} \\ f_{jk}^2 &= L^4 \hat{M}_t(\xi_j) \end{aligned} \quad (50)$$

در روابط فوق δ تابع دلتای کرونکر^{۲۱} است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{if } j = k &\Rightarrow \delta_{jk} = 1 \\ \text{if } j \neq k &\Rightarrow \delta_{jk} = 0 \end{aligned} \quad (51)$$

در ادامه با تعریف ماتریس‌های ستونی به شکل نشان داده شده در معادله (52):

$$\{\psi\} = \begin{Bmatrix} \{v\} \\ \{\theta\} \end{Bmatrix}; \{v\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{Bmatrix}; \{\theta\} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_N \end{Bmatrix} \quad (52)$$

روابط (47) و (48) را می‌توان به صورت فشرده ارائه شده در عبارت (53) بیان نمود:

$$([K] + [M])_{2N \times 2N} \times \{\psi\}_{2N \times 1} = \{0\}_{2N \times 1} \quad (53)$$

یا

²¹ Kronecker delta

$$\left(\begin{bmatrix} [K_{vv}] & [0] \\ [0] & [K_{\theta\theta}] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] & [M_v \theta] \\ [M_{\theta v}] & [0] \end{bmatrix} \right) \times \begin{Bmatrix} \{v\} \\ \{\theta\} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (54)$$

که در رابطه بالا، $[0]$ ، ماتریس صفر است. لازم به ذکر است که ماتریس‌های داخلی رابطه (53) مربعی و به ابعاد $N \times N$ هستند. در ادامه و براساس فرضیات حاکم بر روش عددی مربعات دیفرانسیلی، بایستی شرایط مرزی نیومن را با اصلاح ماتریس‌های ضرایب وزنی اعمال نمود. از آنجا که در این پژوهش، اعضای غیرمنشوری با دو نوع شرایط تکیه‌گاهی متفاوت: دوسر مفصل و یک سرگیردار-یک سر مفصل در نظر گرفته شده‌اند، شرایط مرزی هر یک که روی مشتقات توابع تغییر شکل تعریف شده‌اند به صورت زیر به ماتریس ضرایب وزنی اعمال می‌شوند:

-عضو دوسر مفصل:
در چنین شرایطی و مطابق روابط (35) و (39) مشتق مرتبه دوم توابع تغییر شکل در ابتدا و انتهای عضو برابر صفر است. فرم تجزیه شده شرایط مرزی برابر خواهد شد با:

$$\sum_{j=1}^N A_{ij}^{(2)} v_j = 0; \quad \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(2)} \theta_j = 0; \quad \text{for } \begin{cases} i=1 \\ i=N \end{cases}$$

در رابطه بالا، $i=1$ در $x=0$ و $i=N$ در $x=L$ است.

-عضو یک سر مفصل- یک سر گیردار:

در این حالت در ابتدای عضو و در محل تکیه‌گاه مفصلی ($x=0$) مقدار لنگر مطابق روابط (35) و (39) مساوی صفر است و در سمت دیگر و محل تکیه‌گاه گیردار ($x=L$) از دوران عضو جلوگیری شده است. در نتیجه، فرم تجزیه شده شرایط مرزی برابر خواهد شد با:

$$\sum_{j=1}^N A_{ij}^{(1)} v_j = 0; \quad \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(1)} \theta_j = 0; \quad i=N$$

$$\sum_{j=1}^N A_{ij}^{(2)} v_j = 0; \quad \sum_{j=1}^N A_{ij}^{(2)} \theta_j = 0; \quad i=1 \quad (56)$$

همانطور که می‌دانیم در مورد اعضای دو سر مفصل و مفصل-گیردار، جابه‌جایی عمودی، جانبی و دوران در راستای محور طولی (زاویه پیچش) در هر دو تکیه‌گاه برابر صفر هستند. این شرایط مرزی را می‌توان به راحتی با حذف سطر و ستون‌های اول و N ام ماتریس‌های داخلی بدست آمده اعمال نمود. در نهایت، داریم:

$$([K] + [M])_{2(N-2) \times 2(N-2)} \times \{\bar{v}\}_{2(N-2)} = \{0\} \quad (57)$$

که در آن:

$$\{\bar{v}\} = \begin{Bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{N-1} \end{Bmatrix}; \quad \{\bar{\theta}\} = \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ \vdots \\ \theta_{N-1} \end{Bmatrix} \quad (58)$$

پس از آن، بار کمانش جانبی-پیچشی برای تیر غیرمنشوری با نیم‌رخ جدار نازک متقارن ساخته شده از مواد مدرج تابعی با حل مقادیر ویژه رابطه (56) محاسبه خواهد شد.

۵- مثال‌های عددی

در این بخش، نتایج تحلیل پایداری جانبی-پیچشی تیر ماهیچه‌ای از جنس مواد تابعی بر پایه تئوری کلاسیک و لاسو ارائه می‌شود. از آنجا که مسئله حاضر تا به حال بررسی نشده است، در پژوهش‌های پیشین نتایجی به منظور مقایسه وجود ندارد. بنابراین در ابتدا به منظور بررسی روند همگرایی و همچنین صحت‌گذاری بر روش حل تحلیلی ارائه شده، مسئله برای تیر ماهیچه‌ای همگن با چشم پوشی از

اثرات شاخص کسر حجمی اختلاط مواد حل و با نتایج حاصل از مدل سازی در نرم افزار انسیس مقایسه شده است. سپس اثر پارامترهای مختلف مانند شرایط تکیه گاهی، شاخص کسر حجمی مصالح، محل اعمال بار عرضی و تغییر ابعاد جان و بال مقطع روی بار کمناشی به دقت بررسی می شود.

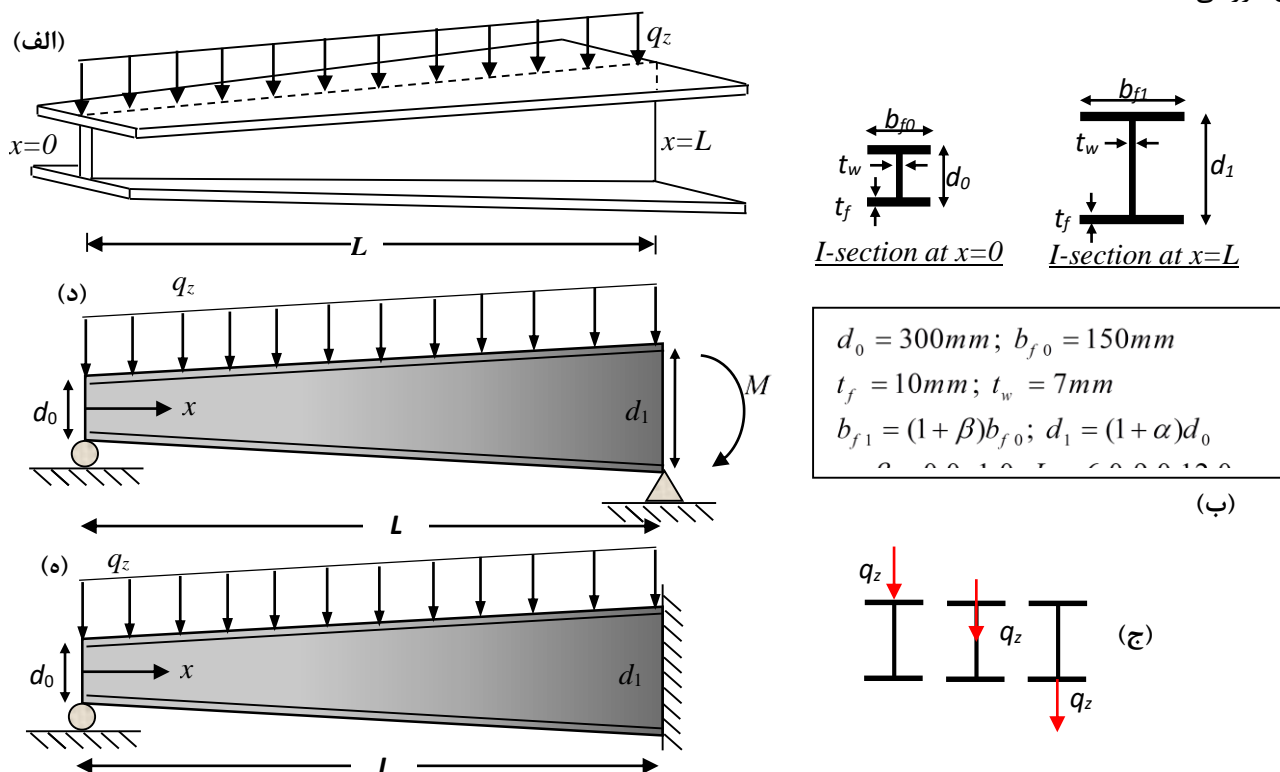
در این راستا، مثالی جامع از یک عضو جدار نازک غیرمنشوری به صورت زیر در نظر گرفته شده است که در آن، ارتفاع جان نیمرخ I -شکل (فاصله بین خط میانی بال ها) به صورت خطی از d_0 در انتهای سمت چپ به $d_1 = (1 + \alpha)d_0$ در انتهای دیگر افزایش یافته است. همچنین تیر مذکور دارای بال ماهیچه ای است. مطابق شکل ۲، پهنای بال در طول عضو از b_{f0} به $b_{f1} = (1 + \beta)b_{f0}$ در حال تغییر است. بنابراین تغییرات ارتفاع جان و پهنای بال مقطع در طول عضو به صورت زیر تعریف می شوند:

$$d = d_0 \alpha \left(\frac{x}{L} \right) + d_0 ; b_f = b_{f0} \beta \left(\frac{x}{L} \right) + b_{f0} \quad (59)$$

که α و β به ترتیب معرف پارامتر تغییر ارتفاع جان و پهنای بال مقطع متقارن I شکل هستند، که از 0 (عضو منشوری) تا [0.1-1] (تیر غیرمنشوری) تغییر می کنند.

۵-۱- مثال ۱

در مثال اول، یک تیر دو سر مفصل با فرض آزادی در برابر دوران و تابیدگی در هر دو انتها در نظر گرفته شده است (شکل ۲). تیر غیرمنشوری مدنظر از مواد مدرج تابعی مطابق با قانون توزیع توانی ساخته شده است. مطابق شکل ۲-د، عضو تحت بار گسترده یکنواخت (q_z) و لنگر متمرکز $(M = \eta q_z L^2 / 8)$ در انتهای سمت راست خود قرار دارد که پارامتر η بیانگر ضریب تغییرات لنگر انتهایی است و در بازه [2-0] متغیر است. در این مثال، پایداری جانبی با فرض وارد شدن بار گسترده در سه نقطه متفاوت: بال بالا، مرکز سطح و بال پایین، بررسی شده است.



شکل ۲: (الف) نمای شماتیک از تیر ماهیچه ای با مقطع I -متقارن تحت بار گسترده یکنواخت، (ب) خصوصیات هندسی، (ج) موقعیت بارگذاری، (د) تیر ماهیچه ای دو سر مفصل تحت بار گسترده و لنگر متمرکز انتهایی، (ه) تیر ماهیچه ای یک سر مفصل - یک سر گیردار تحت بار گسترده

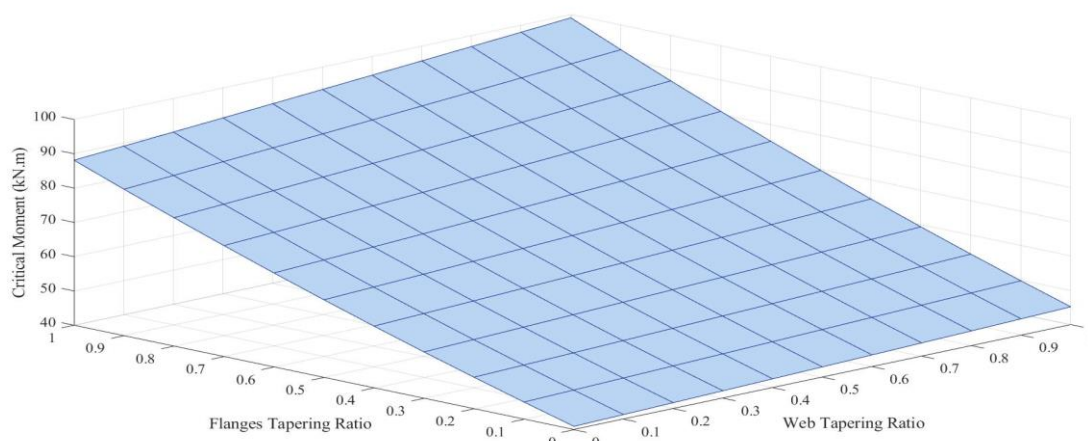
برای ارزیابی و اعتبار سنجی روش حل، ابتدا روند همگرایی بار بحرانی کمانشی بر حسب افزایش تعداد نقاط انتخابی (N) بررسی می‌شود. در

این راستا، لنگر بحرانی ($M_{cr} = \frac{q_{cr} L^2}{8}$) متناظر با بار بحرانی که منجر به کمانش جانبی تیر می‌گردد، برای تیر ماهیچه‌ای همگن به طول‌های ۶ و ۱۲ متر و با فرض ($\eta=0$) که تحت بارگذاری بر روی مرکز سطح قرار دارد، به ازای مقادیر مختلف N و به همراه نتایج تحقیق مرجع [۱۰] و مقادیر حاصل از مدل‌سازی در نرم افزار ANSYS [۲۹] در جدول ۱ نشان داده شده است. در این نرم افزار، تیر جدارنازک مورد نظر توسط المان پوسته (Shell63) مدل شده است. این المان دارای ۶ درجه آزادی در هر گره می‌باشد، که شامل سه درجه انتقالی در راستای X, Y, Z و همچنین سه درجه دورانی حول این سه محور است. لازم به ذکر است که پارامترهای هندسی منظور شده جهت مقایسه نتایج، مطابق با مقاله [۱۰] در نظر گرفته شده است. همانطور که از جدول ۱ استنباط می‌شود، تعداد ۲۰ نقطه برای بدست آوردن لنگر بحرانی کافی است و جواب‌ها در این تعداد تقسیم بندی همگرا شده‌اند. همچنین تطابق بسیار خوبی بین نتایج به دست آمده با پژوهش انجام شده توسط کوش [۱۰] وجود دارد. لازم به توضیح است که نتایج ارائه شده در خصوص اعضای همگن با استفاده از خصوصیات مصالح اکسید زیرکونیوم ارائه می‌شوند.

جدول ۱: اثر تعداد تقسیم بندی (DQM) بر لنگر بحرانی کمانش (M_{cr}) تیر دو سر مفصل با مقطع متغیر تحت بار گسترده q_z .

L (m)	$\beta=\alpha$	M_{cr} (kN.m)					ANSYS	مرجع [۱۰]
		تعداد نقاط در طول تیر (DQM)						
		۵	۱۰	۱۵	۲۰	۳۰		
۶	۰/۰	۷۶/۲۲۵	۸۲/۴۳۰	۸۲/۴۳۰	۸۲/۴۳۰	۸۲/۴۳۰	۸۱/۸۱	۸۲/۶۱۹
	۰/۲	۹۹/۸۳۳	۱۰۷/۷۵۳	۱۰۷/۷۵۳	۱۰۷/۷۵۳	۱۰۷/۷۵۳	۱۰۶/۶۷	۱۰۷/۹۳۳
	۰/۵	۱۴۴/۹۵۸	۱۵۴/۴۱۴	۱۵۴/۴۱۳	۱۵۴/۴۱۳	۱۵۴/۴۱۳	۱۵۳/۳۳	۱۵۴/۵۸۱
	۰/۸	۲۱۰/۷۵۲	۲۱۲/۴۹۴	۲۱۲/۵۰۴	۲۱۲/۵۰۴	۲۱۲/۵۰۴	۲۰۹/۱۴	۲۱۲/۶۵۷
	۱/۰	۲۵/۴۸۹	۲۵۸/۰۴۰	۲۵۸/۰۷۷	۲۵۸/۰۷۷	۲۵۸/۰۷۷	۲۵۳/۶۲	۲۵۸/۲۱۹
۱۲	۰/۰	۳۱/۵۹۵	۳۴/۳۶۵	۳۴/۳۶۵	۳۴/۳۶۵	۳۴/۳۶۵	۳۴/۵۷	۳۴/۴۸۶
	۰/۲	۳۹/۳۶۰	۴۲/۷۰۶	۴۲/۷۰۶	۴۲/۷۰۶	۴۲/۷۰۶	۴۲/۸۶	۴۲/۸۳۸
	۰/۵	۵۲/۹۹۲	۵۷/۰۶۷	۵۷/۰۶۶	۵۷/۰۶۶	۵۷/۰۶۶	۵۷/۰۵	۵۷/۲۰۰
	۰/۸	۷۰/۴۶۳	۷۳/۹۴۲	۷۳/۹۴۵	۷۳/۹۴۵	۷۳/۹۴۵	۷۳/۸۱	۷۴/۰۸۶
	۱/۰	۸۶/۴۹۵	۸۶/۷۳۶	۸۶/۷۴۷	۸۶/۷۴۷	۸۶/۷۴۷	۸۶/۴۸	۸۶/۸۹۵

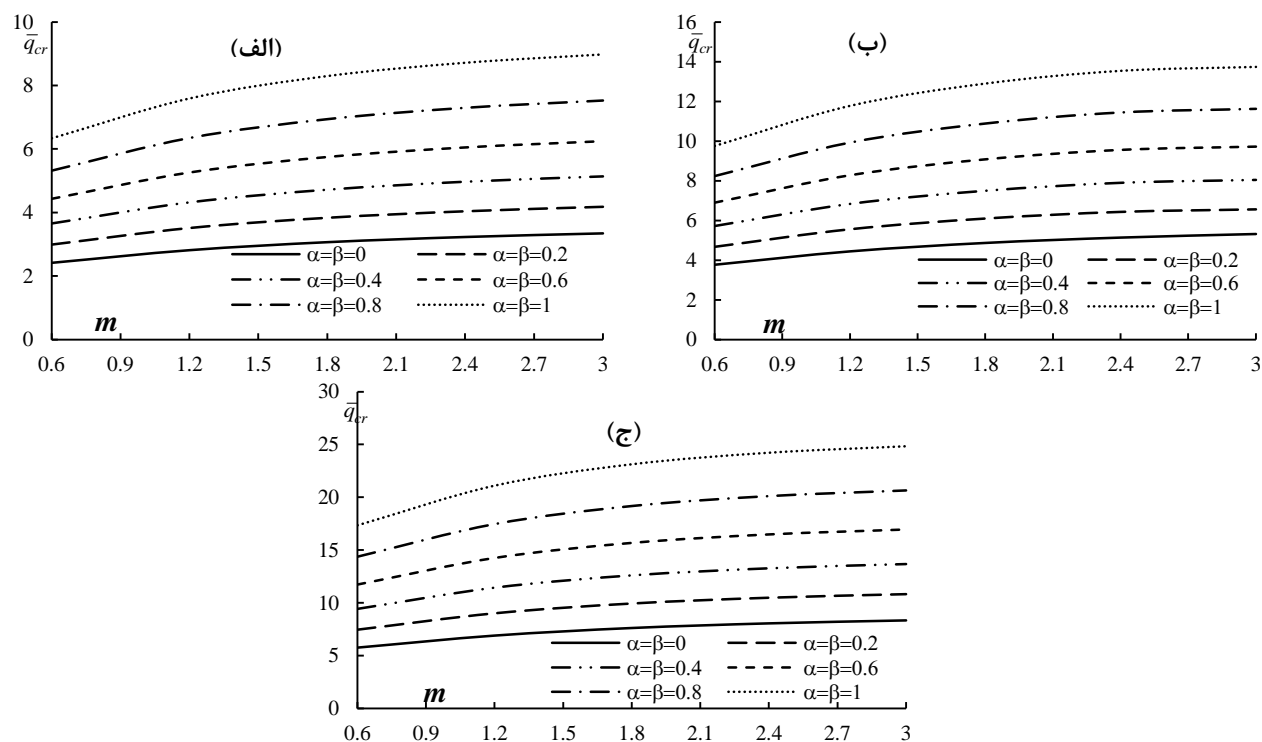
پس از صحت سنجی نتایج و تایید روند همگرایی تحلیل، در این بخش اثر پارامترهای ضریب تغییر ارتفاع جان (α) و پهناى بال (β) بر پایداری جانبی-پیچشی عضو همگن به طول ۹ متر با فرض ($\eta=0$) مطالعه می‌شود. در این قسمت فرض شده که بار گسترده روی بال بالا وارد شده است. نخستین نکته‌ای که با توجه به شکل ۳ مشاهده می‌شود آن است که، به ازای افزایش دو پارامتر تغییر ابعاد (β, α) بار کمانشی به صورت قابل توجهی زیاد می‌شود. این موضوع به دلیل آن است که با افزایش این دو پارامتر سختی خمشی و پیچشی عضو افزایش می‌یابد. از طرف دیگر، با توجه به شکل ۳ می‌توان نتیجه‌گیری نمود که تأثیر تغییرات پهناى بال نسبت به ارتفاع جان بر پایداری تیرهای دوسر مفصل با مقطع متقارن بسیار بیشتر است. این موضوع مورد انتظار است، زیرا با افزایش ابعاد بال نیم‌رخ تیر مقدار ممان اینرسی حول محور ضعیف، ممان اینرسی معادل پیچشی و ضریب تابیدگی با شدت بیشتری نسبت به پارامتر تغییر ارتفاع جان تغییر می‌کنند.



شکل ۳: تغییرات لنگر بحرانی در وسط دهانه تیر ماهیچه‌ای همگن برحسب پارامترهای تغییر ارتفاع جان و پهنای بال در ادامه به بررسی اثر شاخص کسر حجمی مصالح، محل اثر بار عرضی، ضریب تغییرات لنگر (η) بر پایداری جانبی عضو پرداخته شده است. جهت سهولت در ارائه نتایج، مقادیر بار کمانشی با استفاده از رابطه زیر بی‌بعد شده‌اند:

$$\bar{q}_{cr} = \frac{q_{cr} * L^3}{E_0 * I_{z0}} \quad (۶۰)$$

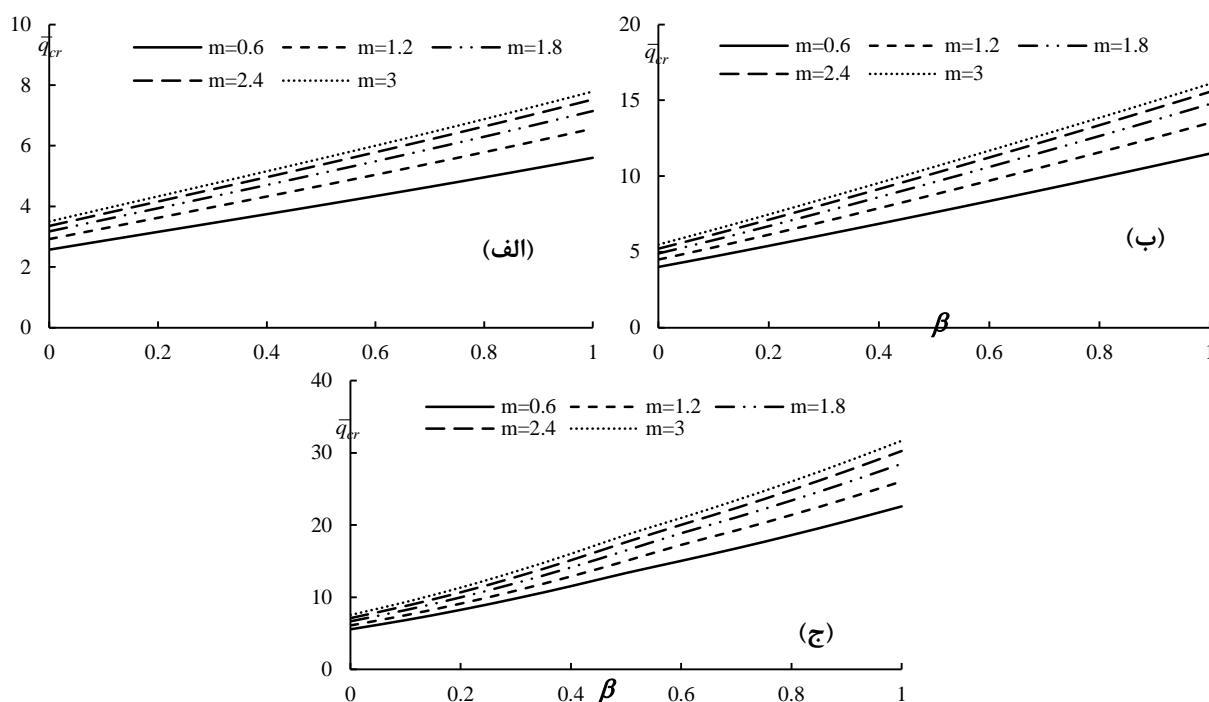
که در آن، L طول مقطع، E_z ضریب ارتجاعی اکسید زیرکونیوم و I_{z0} ممان اینرسی مقطع کوچکتر عضو ($X=0$) نسبت به محور Z است. میزان تاثیر تغییر شاخص کسر حجمی اختلاط مواد (m) روی بار کمانش جانبی بدون بعد تیر ماهیچه‌ای تحت سه حالت بارگذاری متفاوت با فرض ($\eta=1$) و برابر بودن ضریب تغییرات ارتفاع جان و پهنای بال ($\alpha=\beta$) در شکل ۴ نشان داده شده است.



شکل ۴: تاثیرات شاخص کسر حجمی (m) و ضریب تغییر ابعاد بال و جان نیمرخ ($\alpha=\beta$) بر روی بار کمانش جانبی بدون بعد (\bar{q}_{cr}) تیر ماهیچه‌ای، الف: بار روی بال بالا ب: بار روی مرکز سطح، ج: بار روی بال پایین

با توجه به شکل ۴ می‌توان دریافت، افزایش مقدار m از 0.3 تا 3.0 در هر سه حالت بارگذاری، باعث افزایش مقدار بار بحرانی می‌شود. علت این موضوع افزایش مدول الاستیسیته ناشی از افزایش سهم سرامیک در ترکیب نهایی مصالح است. همچنین نمودار نشان می‌دهد که شیب تغییرات در بازه $0.6 < m < 1.8$ شدید و در بازه $2.4 < m < 1.8$ متوسط و در نهایت $2.4 < m < 3$ کمتر خواهد بود. بررسی نمودارهای ترسیم شده نشان می‌دهد که از بین سه حالت بارگذاری مدنظر پایدارترین وضعیت مربوط به شرایطی است که بار گسترده به بال پایین مقطع وارد می‌شود. زیرا در این شرایط لنگر پیچشی مقاوم بوجود می‌آید که در جهت افزایش ظرفیت مقطع است.

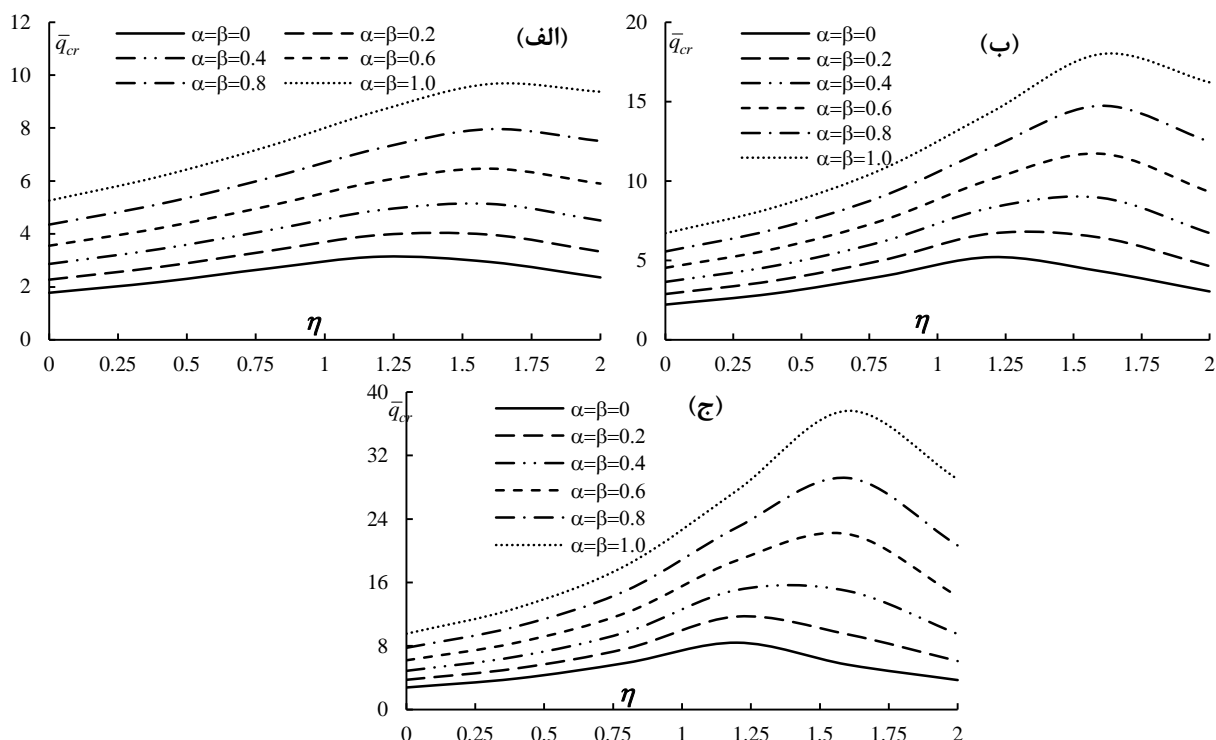
در شکل ۵ منحنی‌های بار کمانش جانبی بدون بعد برحسب افزایش ضریب تغییرات پهنای بال (β) در حالتی که ارتفاع جان نیم‌رخ در امتداد تیر ثابت است ($\alpha=0$) و با فرض $\eta=1.5$ ، به ازای مقادیر مختلف شاخص کسر حجمی مصالح ناهمگن (m) نشان داده شده‌اند. در این قسمت نیز، بار کمانشی (\bar{q}_{cr}) برای سه حالت بارگذاری متفاوت: بال بالا، مرکز سطح و بال پایین تعیین شده‌است.



شکل ۵: تاثیر شاخص کسر حجمی (m) و ضریب تغییر پهنای بال نیم‌رخ (β) بر روی بار کمانش جانبی بدون بعد (\bar{q}_{cr}) تیر ماهیچه‌ای با فرض $\eta=1.5$ ، الف: بار روی بال بالا ب: بار روی مرکز سطح، ج: بار روی بال پایین.

همان‌طور که در شکل ۵ مشاهده می‌شود، تغییرات پهنای بال به‌شدت بر روی مقدار بار کمانش بحرانی اثرگذار است. همچنین واضح است که افزایش m که متقابلاً با افزایش مدول الاستیسیته عضو همراه است، باعث افزایش بار بحرانی می‌شود. بنابراین در هر سه حالت بارگذاری پایدارترین حالت مربوط به $\beta=1.0$ و $m=3$ است. مجدداً با توجه به نمودارها می‌توان نتیجه‌گیری نمود که برای $0.6 \leq m \leq 1.8$ ، بار کمانش بدون بعد به شدت افزایش می‌یابد، در حالی که برای $1.8 < m$ ، مقاومت کمانشی اندکی افزایش یافته و به مقدار حداکثر خود می‌رسد. علاوه بر این، در شرایطی که بار گسترده به بال بالای نیم‌رخ اعمال می‌شود، به دلیل ایجاد لنگر پیچشی اولیه محرک، مقدار بار کمانشی نسبت به حالت بارگذاری بر روی مرکز سطح و بال پایین کاهش پیدا کرده‌است.

شکل ۶ بیانگر تغییرات بار کمانش جانبی بدون بعد تیر جدار نازک از جنس مواد مدرج تابعی برحسب پارامتر η و برای مقادیر مختلف ضریب تغییر ابعاد بال و جان نیم‌رخ (α, β) در شرایطی که $\alpha=\beta$ است. نتایج تحلیل پایداری با فرض شاخص کسر حجمی برابر 1.5 و برای سه حالت بارگذاری مدنظر در این مثال (بال بالا، مرکز سطح و بال پایین) ارائه شده‌است.



شکل ۶: تغییرات بار کمانش جانبی بدون بعد (\bar{q}_{cr}) تیر ماهیچه‌ای ناهمگن بر حسب ضریب لنگر متمرکز انتهایی (η) و پارامتر تغییر ابعاد بال و جان نیم‌رخ ($\alpha=\beta$)، الف: بار روی بال بالا ب: بار روی مرکز سطح، ج: بار روی بال پایین.

همانطور که در شکل ۶ دیده می‌شود، تغییرات ظرفیت کمانش جانبی تیر بر حسب پارامتر η برای تمامی حالات مدنظر در این مثال به صورت غیرخطی است که روند صعودی-نزولی دارد و حداکثر ظرفیت مقطع برای شرایط بارگذاری متفاوت در بازه $1.2 \leq \eta \leq 1.6$ به دست می‌آید. ضمناً در حالت بارگذاری یکسان، پایدارترین و ناپایدارترین شرایط به ترتیب مربوط به عضو ماهیچه‌ای با فرض $\alpha=\beta=1$ و عضو منشوری ($\alpha=\beta=0$) است.

در جدول ۲ بار کمانشی جانبی بدون بعد تیر جدار نازک با مقطع متغیر از جنس مواد مدرج تابعی با شاخص کسر حجمی ($m=2$) برای مقادیر مختلف ضریب تغییر ابعاد بال و جان نیم‌رخ ($\alpha=\beta=0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$)، پارامتر لنگر انتهایی (η) و سه حالت بارگذاری متفاوت (بال بالا، مرکز سطح و بال پایین) نشان داده شده است. با توجه به جدول ۲، با افزایش همزمان ضریب تغییرات پهنای بال و جان مقطع میزان بار کمانش جانبی بدون بعد افزایش یافته است. همچنین حداکثر ظرفیت کمانشی زمانی رخ می‌دهد که $\eta=1.5$ و $\alpha=\beta=0.9$ و بار روی بال پایین وارد شود.

جدول ۲: تغییرات بار کمانش جانبی بدون بعد تیر ماهیچه‌ای ناهمگن ($m=2$) با شرایط مرزی دو سر مفصل نسبت به پارامترهای تغییر ابعاد نیم‌رخ

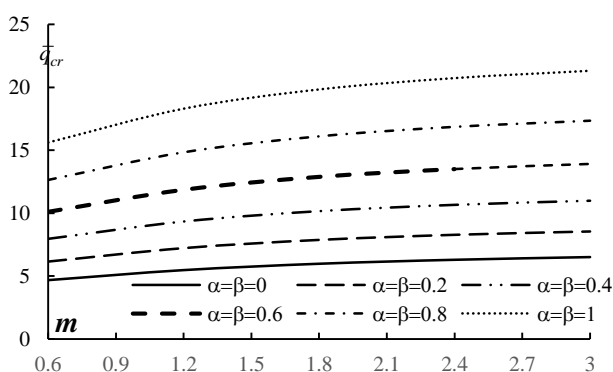
و ضریب لنگر متمرکز

بار کمانش جانبی بدون بعد (\bar{q}_{cr})

$\alpha=\beta$	$\eta=0.5$		$\eta=1.0$		$\eta=1.5$		$\eta=2.0$					
	بال بالا	مرکز سطح	بال پایین	بال بالا	مرکز سطح	بال پایین	بال بالا	مرکز سطح	بال پایین			
0.1	2.706	3.799	5.310	3.429	5.584	8.938	3.660	6.100	8.888	2.957	4.062	5.1443
0.3	3.277	4.768	6.895	4.073	6.921	11.472	4.508	8.501	14.362	3.915	6.031	8.243
0.5	3.927	5.887	8.760	4.800	8.437	14.387	5.396	11.082	20.862	4.952	8.542	12.630
0.7	4.662	7.168	10.925	5.621	10.156	17.721	6.357	13.834	27.971	6.070	11.638	18.628
0.9	5.489	8.624	13.411	6.544	12.093	21.506	7.411	16.795	36.457	7.280	15.342	26.586

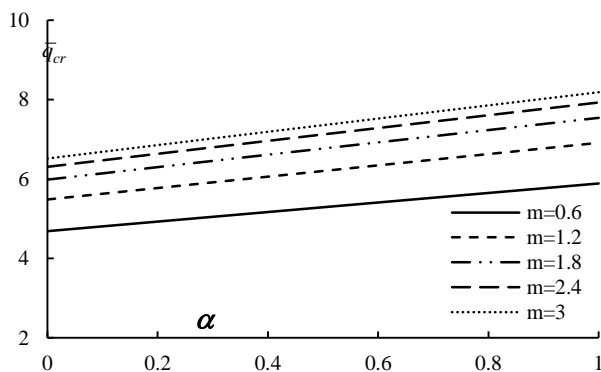
۲-۵- مثال ۲

در مثال دوم تیر یک سر مفصل - یک سر گیردار تحت بار گسترده یکنواخت مفروض است (شکل ۲). تیر ماهیچه‌ای از مواد مدرج تابعی با قانون توزیع توانی ساخته شده است. در این مثال ظرفیت کمانشی با فرض وارد شدن بار گسترده در مرکز سطح بررسی شده است و تاثیر تغییرات شاخص کسر حجمی مصالح (m) و ضریب تغییرات ارتفاع جان (α) و پهنای بال نیم‌رخ (β)، مورد مطالعه قرار گرفته است. در شکل ۷ تغییرات بار کمانش جانبی بدون بعد (\bar{q}_{cr}) برحسب میزان تاثیر تغییر شاخص کسر حجمی اختلاط مواد (m) در شرایطی که ضریب تغییرات ارتفاع جان و پهنای بال برابر هستند ($\alpha = \beta$)، ترسیم شده است. نتایج بدست آمده از نمودار به شرح زیر است: با افزایش شاخص کسر حجمی، بار کمانش جانبی بدون بعد در همه حالات افزایش می‌یابد. زیرا این امر سبب می‌شود که، میزان سهم سرامیک در طرح اختلاط مصالح افزایش یابد و با توجه به اینکه مدول الاستیسیته سرامیک بیشتر از آلومینیوم است، میزان بار بحرانی در بازه $0.6 \leq m \leq 1.8$ با شیب قابل توجهی افزایش یافته و پس از آن با شیب ملایمی در حال افزایش است. علاوه بر این، با زیاد شدن ضریب تغییرات پهنای بال و ارتفاع جان نیم‌رخ که با افزایش ممان اینرسی مقطع همراه است، میزان بار کمانش جانبی بدون بعد زیاد شده است به نحوی که بیشترین مقدار \bar{q}_{cr} برای تمامی نمودارها برای $m=3$ و $\alpha=\beta=1$ رخ می‌دهد.



شکل ۷: تاثیرات شاخص کسر حجمی (m) و ضریب تغییر ابعاد بال و جان نیم‌رخ ($\alpha=\beta$) بر روی بار کمانش جانبی بدون بعد (\bar{q}_{cr}) تیر ماهیچه‌ای یکسر مفصل - یک سر گیردار.

در شکل ۸ منحنی‌های بار کمانش جانبی بدون بعد برحسب افزایش ضریب تغییرات ارتفاع جان (α) در حالتی که پهنای بال نیم‌رخ در امتداد تیر ثابت است ($\beta=0$) و بار بر روی مرکز سطح وارد می‌گردد، برای مقادیر مختلف شاخص کسر حجمی مصالح ناهمگن (m) نشان داده شده است. همانطور که در نمودار دیده می‌شود، با افزایش α میزان بار کمانش جانبی بدون بعد با شیب ملایمی در حال افزایش است. زیاد شدن ضریب تغییرات ارتفاع جان سبب افزایش سختی خمشی و پیچشی و همچنین افزایش ممان اینرسی حول محور قوی مقطع می‌گردد. علاوه بر این با افزایش مقدار m به علت بالا رفتن مدول الاستیسیته مقطع، ظرفیت کمانشی زیاد گردیده است، به نحوی که در نمودار $m=3$ در نقطه $\alpha=1$ به بیشترین مقدار خود رسیده است.



شکل ۸: تاثیرات شاخص کسر حجمی (m) و ضریب تغییر ارتفاع جان نیم‌رخ (α) بر روی بار کمانش جانبی بدون بعد (\bar{q}_{cr}).

۶- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، پایداری جانبی-پیچشی عضو جدار نازک غیرمنشوری ساخته شده از مواد مدرج تابعی، با استفاده از روش مربعات دیفرانسیل مورد بررسی قرار گرفت. در آغاز تحقیق، با استفاده از معادلات تغییر شکل حاکم بر اعضای جدار نازک مطابق با فرضیات و لاسو، اصل پایداری انرژی پتانسیل و در نظر گرفتن اثرات تنش‌های اولیه، دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم بر پایداری تیر جدار نازک غیرمنشوری که شامل چهار معادله دیفرانسیل مرتبه چهار کوپل با ضرایب متغیر است، استخراج گردید. در ادامه جهت حل دستگاه معادلات و تعیین نمودن مقدار بار بحرانی کمانش از روش عددی مربعات دیفرانسیل استفاده شده است. در نهایت تاثیر پارامترهای مختلف مانند شاخص کسر حجمی مصالح، خروج از مرکزیت بار عرضی، تغییر ابعاد بال و جان نیم‌رخ و شرایط تکیه‌گاهی روی مقادیر بار کمانش جانبی-پیچشی بدون بعد تیر جدار نازک بصورت دقیق بررسی شد. از روش معرفی شده می‌توان برای تحلیل پایداری تیرهای جدار نازک با شرایط مرزی مختلف و بارگذاری دلخواه استفاده نمود. پس از بررسی نتایج حاصل از مثال‌های عددی، بیان نکات زیر حائز اهمیت است:

- روش مربعات دیفرانسیلی یک روش کارآمد و دقیق برای حل معادلات دیفرانسیل با ضرایب متغیر است. اما دقت این روش عددی به تعداد و نوع نقاط نمونه برداری بستگی دارد. لازم به ذکر است که در این پژوهش از توزیع غیریکنواخت (چپیشف-گوس-لوباتو) جهت افزایش سرعت همگرایی و دقت حل استفاده شده است. برای بدست آوردن نتایج حاصل از این روش با دقت مورد نظر تعداد بیست نقطه ($N=20$) کافی است.
- همانطور که در نتایج این پژوهش مشاهده نمودیم، افزایش پهناي بال و ارتفاع جان مقطع باعث پایداری تیر جدار نازک با شرایط مرزی مختلف می‌شود. اما در این میان سهم پهناي بال نسبت به ارتفاع جان چشم‌گیرتر است. این نتایج در هر دو نوع تیر همگن و ناهمگن صدق می‌کند.
- با زیاد شدن ضریب تغییرات پهناي بال و ارتفاع جان نیم‌رخ که با افزایش ممان اینرسی مقطع همراه است، میزان بار کمانش جانبی بدون بعد زیاد شده است، به نحوی که بیشترین مقدار q_{cr} برای تمامی نمودارها برای $m=3$ و $\alpha=\beta=1$ رخ می‌دهد.
- افزایش مقدار شاخص کسر حجمی سرامیک در تمامی حالات بارگذاری و شرایط انتهایی باعث افزایش مقدار بار کمانش جانبی می‌شود. لیکن شیب تغییرات بار بحرانی بر حسب کسر حجمی در بازه $0.6 < m < 1.8$ بسیار زیاد بوده و در بازه $1.8 < m < 2.4$ تغییرات متوسطی خواهیم داشت و در نهایت در بازه $2.4 < m < 3$ کمتر خواهد بود.
- برای یک تیر ساده ضریب تغییرات لنگر انتهایی (η) اثرات غیرخطی بر روی ظرفیت کمانش جانبی داشته و برای حالت‌های بارگذاری مختلف در بازه $1.2 \leq \eta \leq 1.6$ بیشترین ظرفیت بار کمانش جانبی به دست می‌آید. ضمناً در حالت بارگذاری یکسان، پایدارترین و ناپایدارترین شرایط به ترتیب مربوط به عضو ماهیچه‌ای با فرض $\alpha=\beta=1$ و عضو منشوری ($\alpha=\beta=0$) است.
- محل اعمال بار عرضی تاثیر بسزایی بر پایداری جانبی عضو دارد. به نحوی که بیشترین ظرفیت کمانشی، مربوط به حالتی است که بار گسترده روی بال پایین نیم‌رخ وارد می‌گردد.
- در تیر یک سر مفصل-یک سر گیردار، زیاد شدن ضریب تغییرات ارتفاع جان تیر سبب افزایش سفتی خمشی و سفتی پیچشی تیر گردیده و ممان اینرسی حول محور قوی مقطع را افزایش می‌دهد. بنابراین با افزایش کسر حجمی m ، ظرفیت کمانشی تیر زیاد گردیده است، و هنگامی که $m=3$ گردیده، و ضریب تغییرات ارتفاع جان $\alpha=1$ گردد، بار کمانش جانبی در محدوده مورد مطالعه به بیشترین مقدار خود رسیده است.

مراجع

- [1] MM. Attard, M-Y. Kim, Lateral buckling of beams with shear deformations – A hyperelastic formulation, International Journal of Solids and Structures, 47 (2010) 2825-2840.
- [2] A. Shahba, R. Attarnejad, M. Tavanaie Marvi, Hajilar, S., Free vibration and stability analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beams with classical and non-classical boundary conditions, Composites, 42 (2011) 801-808.

- [3] A.E. Alshorbagy, M.A. Eltaher, F.F. Mahmoud., "Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method," *Mathematical Modelling*, vol. 35, pp. 412-425, 2011.
- [4] S.C. Mohanty, R.R. dash, T. Rout, Free vibration of a functionally graded rotating Timoshenko beam using FEM, *Advances in Structural Engineering*, 16(2) (2013) 405-418.
- [5] B. Asgarian, M. Soltani, F. Mohri, Lateral-torsional buckling of tapered thin-walled beams with arbitrary cross-section, *Thin-walled structures*, 62 (2013) 96-108.
- [6] H. Zafarmand., M. Kadkhodayan, Three dimensional dynamic analysis and stress wave propagation in thick functionally graded plates under impact loading, *Modares Mechanical Engineering*, 14 (2014) 89-96. (In Persian)
- [7] M. Soltani, B. Asgarian, F. Mohri, Buckling and free vibration analyses of tapered thin-walled beams by power series method, *Journal of constructional steel research*, 96 (2014) 106-126.
- [8] M. Soltani, B. Asgarian, F. Mohri, Finite element method for stability and free vibration analyses of non-prismatic thin-walled beam, *Thin-Walled Structures*, 82 (2014) 245-261.
- [9] B. Shvartsman, J. Majak, Numerical method for stability analysis of functionally graded beams on elastic foundation, *Applied Mathematical Modelling*, 40 (2015) 3713-3719.
- [10] J. Kuš, Lateral-torsional buckling steel beams with simultaneously tapered flanges and web, *Steel and Composite Structures*, 19(4) (2015) 897-916.
- [11] H. Zharfi, H. Ekhteraei Toussi, Creep analysis of FGM rotating disc with non-uniform profiles, *Journal of Science and Technology of Composite*, 1(2) (2015) 29-36. (In Persian)
- [12] M. Heidari-Rarani, S. Alimirzaei, K. Torabi, Analytical solution for free vibration of functionally graded carbon nanotubes (FG-CNT) reinforced double-layered nano-plates resting on elastic medium, *Journal of Science and Technology of Composites*, 2(3) (2015) 55-66. (In Persian)
- [13] Z-h. Wang, X-h. Wang, G-d. Xu, S. Cheng, T. Zeng, Free vibration of two-directional functionally graded beams, *Composite Structures*, 135 (2016) 191-198.
- [14] T-T. Nguyen, N-I. Kim, J. Lee, Free vibration of thin-walled functionally graded open-section beams, *Composite structures*, 95 (2016) 105-116.
- [15] T-T. Nguyen, N-I. Kim, J. Lee, Analysis of thin-walled open section beams with functionally graded materials, *Composite structures*, 138 (2016) 75-83.
- [16] T-T. Nguyen, P.T. Thang, J. Lee, Lateral buckling analysis thin-walled functionally graded beams," *Composite structures*, 160 (2017) 952-963.
- [17] T-T. Nguyen, P.T. Thang, J. Lee, Flexural-torsional stability of thin-walled functionally graded open-section beams, *Thin walled structures*, 110 (2017) 88-96.
- [18] S.h. Yousefzadeh, Thermal buckling analysis of a 2-directional FGM circular plate using first-order shear deformation theory, *Amirkabir J. Mechanic Eng.*, 47(3) (2017) 307-316. (In Persian)
- [19] W. Chen, H. Chang, Closed-form solutions for free vibration frequencies of functionally graded Euler-Bernoulli beams, *Mechanics of Composite Materials.*, 53 (1) (2017) 79-98.
- [20] K. Khorshidi, A. Fallah, A. Siahpush, Free vibrations analysis of functionally graded composite rectangular nano-plate based on nonlocal exponential shear deformation theory in thermal environment, *Journal of Science and Technology of Composites*, 4(1) (2017) 109-120. (In Persian)
- [21] Y. Zhao, Y. Huang, M. Guo, A novel approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section based on Chebyshev polynomials theory, *Composite Structures*, 168 (2017) 277-284.
- [22] W. Chen, H. Chang, Vibration analysis of functionally graded Timoshenko beams, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 18(1) (2018) 1850007.
- [23] M. Soltani, B. Asgarian, Finite element formulation for linear stability analysis of axially functionally graded non-prismatic Timoshenko beam, *International Journal of Structural Stability and dynamics*, 19(02) (2019) 1950002.
- [24] M. R-Pajand, A.R. Masoodi, A. Alepaighambar, Lateral-torsional buckling of functionally graded tapered I-beams considering lateral bracing, *Steel and Composite Structures*, 28 (2018) 403-414,
- [25] M. Soltani, B. Asgarian, F. Mohri, Improved finite element formulation for lateral stability analysis of axially functionally graded non-prismatic I-beams, *International Journal of Structural Stability and dynamics*, 19(9) (2019) 1950108.
- [26] Bert C.W., Malik M., 1996, Differential quadrature method in computational mechanics, a review, *Applied Mechanics Reviews* 49: 1-28.
- [27] Shu C. *Differential Quadrature and Its Application in Engineering*. Springer; 2000.
- [28] Zong Z, Zhang Y. *Advanced Differential Quadrature Methods*. Chapman & Hall/CRC; 2009.
- [29] ANSYS, Version 5.4, Swanson Analysis System, Inc, 2007.