

Isogeometric Analysis of transverse vibration of continuous systems under harmonic loads

Ehsan Dabiri¹, Asghar Amani Dashlekeh^{*1}, Naseraddin shahbazi¹

1- Faculty of Engineering, University of Mohaghegh Ardabili, Ardabil, Iran

ABSTRACT

Isogeometric analysis of forced vibration of continuous systems was investigated in this paper. The basis of this method is the use of NURBS functions, which provide an integrated mathematical basis to display the analytical models. The most important advantage of this method compared to conventional methods such as finite element is the accurate geometric modeling and almost no approximation with a new and easy method. The NURBS and B-Spline functions can have a higher continuity of derivatives in comparison with Lagrangian functions used in the finite element method. The forced vibration of Euler-Bernoulli and Timoshenko beams was studied in this paper. Using the Galerkin method and the principle of virtual work, the stiffness and mass matrix of these continuous systems were obtained considering the effects of shear deformation and rotational moment. Also, displacement functions were determined based on NURBS functions. Numerical examples of forced vibration of continuous systems are provided to prove the validity and efficiency of the proposed method. The natural frequencies of the members were obtained using MATLAB software and applying specific boundary conditions. Furthermore, the results of the isogeometric analysis were compared with the exact solution of the Dynamic Stiffness Method. The results showed that the isogeometric method provides more accurate results due to the use of NURBS functions instead of approximate selective functions of the element.

ARTICLE INFO

Receive Date: 17 October 2019

Revise Date: 29 April 2020

Accept Date: 02 May 2020

Keywords:

Isogeometric analysis

Forced vibration

NURBS

Harmonic loads

Natural frequency.

All rights reserved to Iranian Society of Structural Engineering.

doi: <https://dx.doi.org/10.22065/jsce.2020.205556.1975>

*Corresponding author: Asghar Amani Dashlekeh

Email address: a.amani@uma.ac.ir

بررسی ارتعاش سیستم‌های پیوسته تحت بارهای هارمونیک با تحلیل ایزوژئومتریکی

احسان دبیری^۱، اصغرامانی داشلجه^{۲*}، ناصرالدین شاهبازی^۲

۱- کارشناس ارشد سازه، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل، ایران

۲- استادیار سازه، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل، ایران

چکیده

تحلیل ایزوژئومتریکی ارتعاش اجباری سیستم‌های پیوسته در این مقاله مطالعه شده است. اساس این روش استفاده از توابع نریز می‌باشد که پایه ریاضی یکپارچه‌ای برای نمایش اشکال تحلیلی فراهم می‌کند. مهمترین حسن استفاده از این روش در مقایسه با روشهای مرسوم همچون المان محدود، مدل‌سازی دقیق هندسی و بدون تقریب با یک روش جدید و آسان است. در مقایسه با توابع لاگرانژی استفاده شده در روش المان محدود، توابع نریز و بی‌اسپلاین می‌تواند پیوستگی بالاتری از مشتقات داشته باشد. در این مقاله، به مطالعه ارتعاش اجباری تیر اویلر- برنولی و تیموشکو پرداخته شده است. ماتریس سختی و جرم این سیستم‌های پیوسته با در نظر گرفتن اثرات تغییر شکل برشی و ممان چرخشی با استفاده از روش گالرکین و اصل کار مجازی تعیین شده‌اند. همچنین توابع تغییرمکانی براساس توابع نریز به دست آمده است. به منظور اثبات صحت و کارایی روش پیشنهادی، مثال‌های عددی در مورد ارتعاش اجباری سیستم‌های پیوسته ارائه شده است. با استفاده از نرم افزار متلب و با اعمال شرایط مرزی مشخص، فرکانس‌های طبیعی اعضا به دست آمده و نتایج تحلیل ایزوژئومتریکی با حل دقیق مقایسه گردید. نتایج نشان داد که روش ایزوژئومتریکی در تحلیل مسائل ارتعاش به دلیل استفاده از توابع نریز به جای توابع انتخابی تقریبی المان، نتایج دقیق‌تری ارائه می‌دهد.

کلمات کلیدی: ایزوژئومتریکی، ارتعاش اجباری، نریز، بارهای هارمونیک، فرکانس طبیعی

شناسه دیجیتال:		سابقه مقاله:				
doi:	https://dx.doi.org/10.22065/jsce.2020.205556.1975	چاپ	انتشار آنلاین	پذیرش	بازنگری	دریافت
	10.22065/jsce.2020.205556.1975	۱۴۰۰/۱۰/۳۰	۱۳۹۹/۰۲/۱۳	۱۳۹۹/۰۲/۱۳	۱۳۹۹/۰۲/۱۰	۱۳۹۸/۰۷/۲۵
				*نویسنده مسئول:		
				اصغرامانی داشلجه		
				a.amani@uma.ac.ir		
				پست الکترونیکی:		

۱- مقدمه

یک سیستم سازه‌ای می‌تواند تحت ارتعاش آزاد یا اجباری قرار بگیرد. در ارتعاش آزاد هیچ نیروی خارجی بر سیستم وارد نمی‌گردد و ارتعاش سیستم در اثر جابه‌جایی یا سرعت اولیه صورت می‌گیرد. ولی در ارتعاش اجباری، سیستم در معرض نیروی خارجی اغلب تکرارشونده قرار می‌گیرد. سیستم‌های پیوسته مانند تیرها یکی از مولفه‌های مهم و اساسی در سازه‌های مهندسی هستند. این سازه‌ها در معرض اغتشاشات دینامیکی و بارهای خارجی قرار می‌گیرند که باعث ارتعاش اعضا می‌گردد که تحلیل ارتعاش آنها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. تیرها را می‌توان از لحاظ رفتار سازه‌ای به دو دسته تیرهای اوپلر- برنولی و تیموشنکو تقسیم کرد. در تیرهای اوپلر- برنولی، رفتار خمشی در اکثر موارد حاکم بوده و توزیع کرنش در ارتفاع تیر به صورت خطی است. در حالی که در تیرهای تیموشنکو همچون تیرهای عمیق توزیع کرنش غیرخطی بوده و در اکثر موارد، رفتار برشی در آنها حاکم است [۱]. با توجه به اهمیت تغییرشکل‌های برشی در تیرهای تیموشنکو، استفاده از روش‌های تحلیل ارتعاش تیرهای اوپلر- برنولی برای تحلیل ارتعاش تیرهای تیموشنکو به نتایج دقیقی منجر نخواهد شد.

اخیراً رویکرد جدیدی به نام ایزوژئومتری در رشته‌های مهندسی و علوم معرفی شده است. این روش اولین بار در سال‌های ۱۹۹۸ تا ۲۰۰۴ توسط کیگان و هولیک [۲] معرفی شد. در سال ۲۰۰۵ این ایده با استفاده از توابع نریز (بی‌اسپلاین‌های نسبی غیریکنواخت) که از توسعه توابع بی‌اسپلاین به دست می‌آیند، توسط توماس هیوز [۳] تکامل یافت و روش تحلیل ایزوژئومتری نام گرفت. اساس این روش را استفاده از فناوری‌های طراحی به کمک رایانه و پیشرفت‌های اخیر در زمینه گرافیک کامپیوتری و ترکیب آن‌ها با روش المان محدود تشکیل می‌دهد. در دهه‌های گذشته روش‌های بسیاری برای تحلیل مسائل مهندسی ارائه شده است که مشهورترین آن‌ها روش المان محدود می‌باشد. با اینکه این روش‌ها در پی یکدیگر و با هدف توانمندتر نمودن و رفع اشکالات روش‌های پیشین از خود ارائه شده‌اند، اما هنوز هم نمی‌توان روشی را یافت که کامل و بدون نقص باشد. از جمله این نواقص و مشکلات می‌توان به ضعف در تولید دقیق شکل مسائل دارای هندسه پیچیده، ضعف در مدل‌سازی دقیق مسائل با تغییرات شدید در خواص مصالح، اشاره نمود. روش جدید ایزوژئومتری برای حل این مشکلات و بهبود روش‌های موجود است که در آن از توابع پایه بی‌اسپلاین به جای توابع شکل در المان محدود استفاده شده است. در واقع این روش ترکیبی از روش المان محدود و طراحی کامپیوتری است. در این روش از توابع پایه نریز و بی‌اسپلاین برای نشان دادن تغییرشکل سازه‌ها استفاده شده است. به علاوه درجه توابع پایه نریز و بی‌اسپلاین می‌تواند به راحتی بدون تغییرشکل هندسی افزایش داده شود.

تحقیقات گوناگونی در زمینه تحلیل ایزوژئومتری صورت گرفته است. یکی از این مطالعات، تحقیق صورت گرفته توسط ویگر [۴] است که در آن رفتار ارتعاش سازه‌ای غیرخطی بررسی شده و توابع بی-اسپلاین پایه مشابهی را برای حل‌های عددی و نمایش هندسی به کار برده است. بررسی بهینه‌سازی شکل سازه‌ای اعضا با استفاده از روش ایزوژئومتری توسط وال و همکاران [۵] انجام شده است. در ادامه، روش المان مرزی ایزوژئومتری برای مسائل الاستوستاتیک دوبعدی توسط سیمپسون و همکاران [۶] معرفی شده است. اخیراً، امانی داشلجه [۷] روش ایزوژئومتری را در مسائل ترموالاستودینامیک تحت شوک حرارتی سیکلی به کار برده است.

تحلیل ارتعاش آزاد تیرهای اوپلر-برنولی قبلاً با روش‌های دیگر انجام شده است. از جمله می‌توان به تحقیقات انجام شده توسط چلیک ابراهیم^۱ [۸] بر روی تیرهای اوپلر-برنولی اشاره نمود که در آن مسائل ارتعاش آزاد تیرهای اوپلر-برنولی غیریکنواخت تحت شرایط تکیه‌گاهی گوناگون با استفاده از روش موجک چیشیف^۲ مورد بررسی قرار گرفت. سینیر و همکاران^۳ [۹] تحقیقات خود را روی ارتعاش آزاد و اجباری غیرخطی تیرهای اوپلر-برنولی با مقطع غیریکنواخت انجام داده‌اند. معادلات به صورت تقریبی با استفاده از روش انحراف حل شده

¹ Celik, Ibrahim

² Chebyshev Wavelet Collocation Method

³ Sınır et al.

است و مود شکل توسط روش تریب دیفرانسیل حل شده است. قنادهی اصل و خدایانه [۱۰] روی یک راه حل تقریبی برای تعیین رفتار تیرهای با ترک‌های چند دهانه تحت بار متمرکز مطالعه نموده‌اند که رویکرد تحلیلی براساس فرمول‌بندی توابع خام^۴ دینامیکی استفاده شده است. ژو و همکاران^۵ [۱۱] یک بیان صریح دربارهٔ پاسخ‌های حالت پایدار یک تیر اویلر-برنولی ترک خورده تحت بار هارمونیک را ارائه داده‌اند که در آن پاسخ دینامیکی یک تیر دارای ترک توسط روش توابع خام به دست آمده است. ارهان^۶ [۱۲] تحلیل ارتعاش آزاد و اجباری یک تیر ترک خورده را به منظور تشخیص ترک در یک تیر طره شرح داده است.

تحلیل ارتعاش تیرهای تیموشنکو نیز قبلاً با روش‌های دیگر انجام شده است. رائو^۷ روش المان محدود را برای بررسی ارتعاش تیرهای یکنواخت و غیریکنواخت ارائه داد که در آن تأثیر برشی عرضی و اینرسی چرخشی در نظر گرفته شده بود. غفاریان و آریایی [۱۳] تحلیل ارتعاش اجباری یک تیر تیموشنکو با ویژگی خمشی پیچشی روی پایه پسترنک^۸ را ارائه داده است. چن و همکاران^۹ [۱۴] مطالعه خود را روی تحلیل ارتعاش اجباری تیرهای تیموشنکو ترک خورده شامل میراگر انجام داده‌اند که در آن از توابع خام استفاده شده است. روحی و همکاران [۱۵] تحلیل ارتعاش اجباری و آزاد نانو تیرهای تیموشنکو را براساس گرادیان کرنشی میدلاین^{۱۰} ارائه داده است. ارتعاش آزاد و اجباری تیر تیموشنکو با درجه‌بندی عملکردی دوطرفه تحت اثر بارگذاری محرک توسط شیمشک^{۱۱} [۱۶] انجام شده است. یوکویاما [۱۷] ارتعاش آزاد یک تیر تیموشنکو پیچ خورده را با تحلیل المان محدود ارائه داد و برای تشکیل معادلات تعادل از اصل همپلتون استفاده کرد. آوراموف و مالیشف^{۱۲} [۱۸] ارتعاش اجباری بی‌نظم تیرهای طره با ترک‌های مویی را مورد بررسی قرار داده‌اند.

در این مقاله، برای روشن ساختن قابلیت‌های منحصربفرد تحلیل ایزوژنومتریک، فرکانس‌های طبیعی و اشکال مود تیرهای اویلر-برنولی و تیموشنکو با استفاده از رویکرد ایزوژنومتریک در برنامه متلب به دست آمده و با حل دقیق فرکانس‌ها مقایسه شده است. برای انجام این کار، در بخش بعد جهت آشنایی بیشتر با مفاهیم اولیه تحلیل ایزوژنومتریک، مراحل مدل سازی توضیح داده شده است. بخش سوم مربوط به فرمول‌بندی تیرها براساس تحلیل ایزوژنومتریک است. در بخش چهارم به ارائه مثال‌های عددی پرداخته می‌شود و نهایتاً در بخش آخر نتایج مدل سازی ارائه می‌گردد.

۲- تحلیل ایزوژنومتریک

به منظور آشنایی با تحلیل ایزوژنومتریک لازم است تا درباره مفاهیمی همچون بردار گره، توابع پایه، منحنی بی‌اسپلاین و... توضیح داده شود که در ادامه به آن پرداخته شده است.

۲-۱- بردار گره

یک بردار گره در فضای یک بعدی از مجموعه مختصات به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$\bar{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\} \quad (1)$$

که در آن $\xi \in R$ ، i ، امین گره است. i اندیس گره و برابر با $i = 1, 2, 3, \dots, n + p + 1$ می‌باشد. p درجه چند جمله‌ای و n تعداد توابع پایه استفاده شده در تشکیل منحنی بی‌اسپلاین است.

⁴ Green Function

⁵ Zhao et al.

⁶ Orhan

⁷ Rao

⁸ Pasternak foundation

⁹ Chen et al.

¹⁰ Mindlin's second strain gradient theory

¹¹ Şimşek

¹² Avramov and Malyshev

۲-۲- توابع پایه

با یک بردار گره مشخص، توابع پایه بی اسپلاین به ترتیب با قطعات ثابت ($p = 0$) شروع می شود و به صورت زیر تعریف می شود:

$$R_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{Otherwise.} \end{cases} \quad (2)$$

و برای $p = 1, 2, 3, \dots$ برابر است با:

$$R_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (3)$$

۲-۳- منحنی بی اسپلاین

برای n تابع پایه $N_{i,p}$ و $i = 0, 1, 2, \dots, n$ و نقاط کنترل $B_i \in R^d$ یک منحنی بی اسپلاین چند جمله ای قطعه ای با استفاده از رابطه زیر تعریف می شود (شکل ۱):

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n R_{i,p}(\xi) B_i. \quad (4)$$

که در آن B_i نقطه کنترل است. نقاط کنترل، شکل منحنی بی اسپلاین را تعیین می کند. هر نقطه روی منحنی با استفاده از مجموع وزن تعدادی از نقاط کنترل محاسبه می گردد. وزن هر نقطه بر اساس پارامتر حاکم متفاوت است. نقاط کنترل ممکن است چند بعدی باشند. به طور کلی برای تغییر دادن شکل منحنی بی اسپلاین باید نقاط کنترل آن را تغییر داد و انتخاب آن به شکل منحنی بستگی دارد (شکل ۲).

۲-۴- سطح بی اسپلاین

برای یک شبکه کنترل $\{B_{i,j}\}$ و $i = 1, 2, 3, \dots, n$ و $j = 1, 2, 3, \dots, m$ از چند جمله ای با درجه p, q و بردارهای گره $E = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ و $\mathcal{H} = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+q+1}\}$ سطح بی اسپلاین از طریق زیر به دست می آید:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) B_{i,j}. \quad (5)$$

۲-۵- جسم بی اسپلاین

به طور مشابه، یک جسم بی اسپلاین با استفاده از فرمول زیر ایجاد می شود:

$$S(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l R_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) L_{k,r}(\zeta) B_{i,j,k}. \quad (6)$$

۶-۲- نریز

نریز، بی‌اسپلین‌های غیر یکنواخت هستند. به عبارت دیگر بی‌اسپلین‌های وزن‌داری که به صورت نسبی تعریف می‌شوند. یک منحنی نریز از درجه p برابر است با:

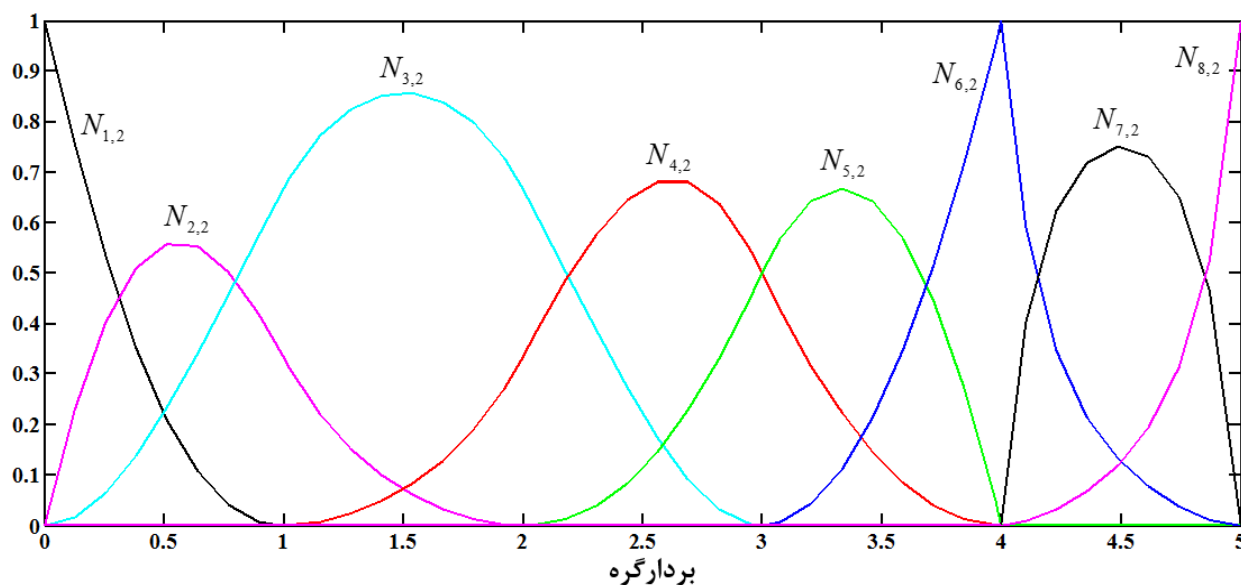
$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n \frac{R_{i,p}(\xi)w_i}{\sum_{\hat{i}=1}^n R_{\hat{i},p}(\xi)w_{\hat{i}}} B_i \quad (7)$$

که در آن $\{w_i\}$ وزن‌ها (مولفه عمود بر صفحه مورد نظر نقاط کنترل) و B_i نقاط کنترل هستند.

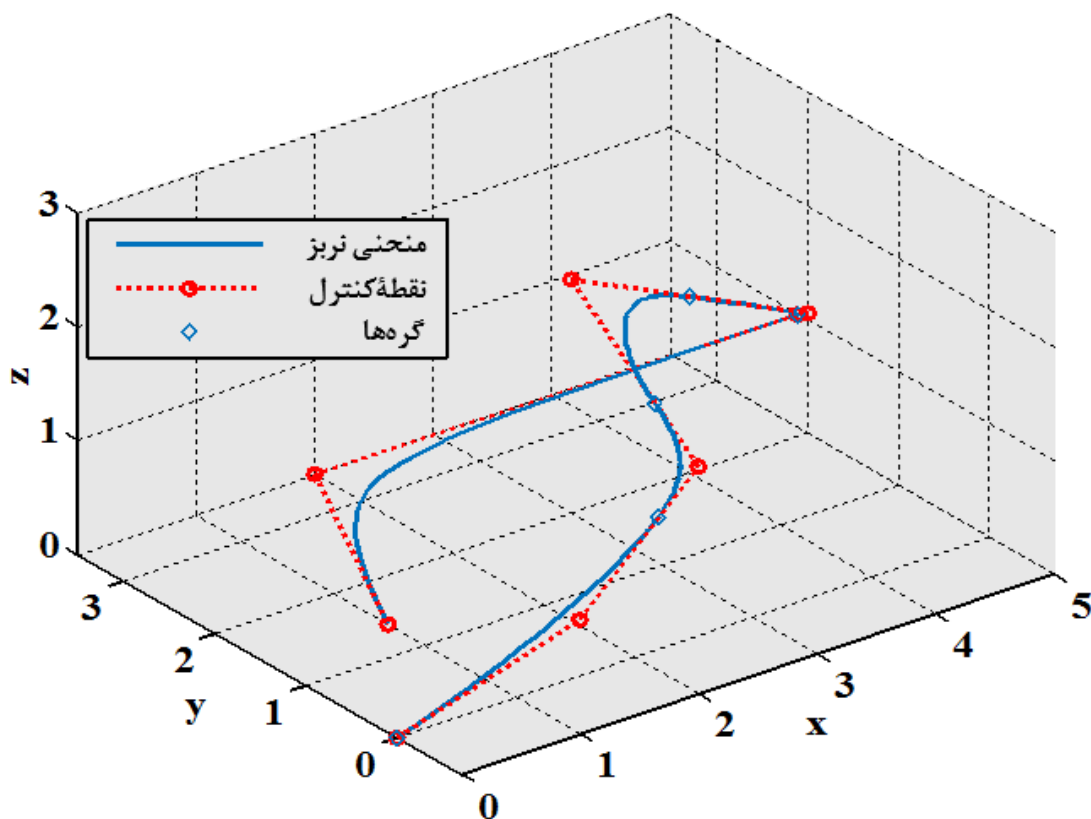
سطوح و اجسام نسبی مشابه توابع نسبی نیز برابر است با:

$$S_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{R_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{i,j}}{\sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{j=1}^m R_{\hat{i},p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{\hat{i},j}} \quad (8)$$

$$V_{i,j,k}^{p,q,r}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{R_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)L_{k,r}(\zeta)w_{i,j,k}}{\sum_{\hat{i}=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{\hat{k}=1}^l R_{\hat{i},p}(\xi)M_{j,q}(\eta)L_{\hat{k},r}(\zeta)w_{\hat{i},j,\hat{k}}} \quad (9)$$



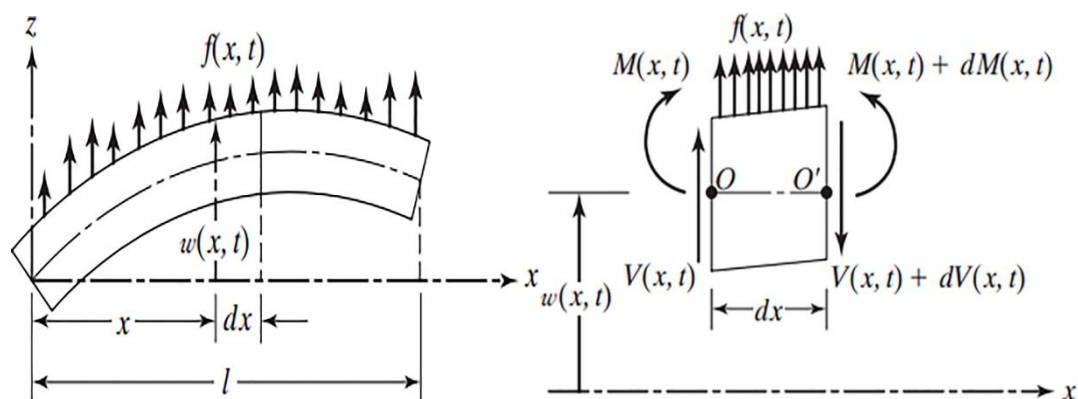
شکل ۱: توابع پایه بی‌اسپلین درجه دو با بردارگره باز $\xi = \{0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5\}$



شکل ۲: نمونه منحنی بی‌اسپلاین متناظر با توابع پایه شکل (۱).

۳- فرمول بندی ایزوژئومتریک

شکل (۳) تیری به طول l تحت خمش را نشان می‌دهد. در این بخش با استفاده از تئوری تیر اویلر-برنولی و تیموشنکو ابتدا معادلات تعادل به دست آمده و با استفاده از روش گالرکین (فرم ضعیف معادله) و اصل کار مجازی از توابع نریز در راه‌حل‌های انتخاب شده استفاده شد. راه‌حل‌های انتخابی همان چندجمله‌ای‌های تقریبی در المان محدود هستند.



شکل ۳: جزئیات تیر در خمش.

۳-۱- فرمول بندی تیر اویلر- برنولی

با توجه به شکل (۳) معادله دیفرانسیل حرکت تیر اویلر-برنولی برابر است با:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right] + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = f(x, t) \quad (10)$$

که در آن $w(x, t)$ جابه جایی عرضی تیر، E مدول الاستیسیته، I گشتاور دوم سطح، ρ وزن مخصوص مواد است. در رابطه فوق $f(x, t)$ نیروی خارجی است.

با استفاده از روش گالرکین، شکل ضعیف مسأله ارتعاش برابر خواهد شد با:

$$\int_0^L EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \delta \left(\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) dx + \int_0^L \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \delta w dx = 0 \quad (11)$$

تابع تغییر مکان تیر بر اساس نریز طبق رابطه (۱۲) است. این مقدار در تحلیل المان محدود به صورت چند جمله ای تقریبی انتخاب می شود. اما همان طور که مشاهده می شود، در این روش از توابع نریز در راه حل استفاده شده است. یعنی از همان توابعی که برای مدل سازی هندسه استفاده شده در راه حل نیز استفاده شده است. بنابراین هیچ گونه تقریبی در تحلیل آورده نشده است.

$$w = \sum_{i=1}^{ncp} R_i(\xi) \hat{w}_i = R \hat{w} \quad (12)$$

که در آن ncp تعداد کل نقاط کنترل دامنه، R نشان دهنده توابع پایه و \hat{w} نشان دهنده بردار شامل نقاط کنترل است.

رابطه (۱۲) را می توان به صورت ماتریسی نوشت:

$$R = [R_1 \quad R_2 \quad R_3 \quad \dots \quad R_{ncp}] \quad (13)$$

$$\hat{w}^T = [\hat{w}_1 \quad \hat{w}_2 \quad \hat{w}_3 \quad \dots \quad \hat{w}_{ncp}]^T \quad (14)$$

با استفاده از قضیه کار مجازی می توان نوشت:

$$\delta w = \sum_{i=1}^{ncp} R_i(\xi) \delta \hat{w}_i = R \delta \hat{w} \quad (15)$$

با جایگذاری معادلات (۱۲) و (۱۵) در معادله (۱۱)، رابطه زیر به دست می آید:

$$\delta \hat{w} \left(K \hat{w} + M \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (16)$$

بردار شامل نقاط کنترل را می توان به طریق زیر نوشت:

$$\hat{w} = \psi_n e^{i\omega_n t} \quad (17)$$

که در آن ψ_n بردار متغیرهای کنترل متناظر با w است.

با قرار دادن رابطه (۱۷) در (۱۶) می توان معادله را به فرم زیر نوشت:

$$[K - (\omega_n)^2 M] \psi_n = 0 \quad (18)$$

$$K = \int_0^l \left(\sum_{i=1}^{ncp} \nabla_{xx} R_i^2 EI \right) dx \quad (19)$$

$$M = \int_0^l \left(\sum_{i=1}^{ncp} R_i^2 \rho I \right) dx \quad (20)$$

نهایتاً، برای فرمول بندی ماتریس سختی و جرم براساس تحلیل ایزوژئومتریک لازم است با استفاده از عملگر ژاکوبین فضای پارامتری ایزوژئومتریک به فضای فیزیکی تبدیل شود ($\mathcal{X}: \Omega \rightarrow \Omega$). بنابراین ماتریس سختی و جرم اعضا از حاصل جمع ماتریس المان‌های تیر به دست می‌آید:

$$K = \sum_{k=1}^{nel} [K]^k = \sum_{k=1}^{nel} \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \left(\sum_{i=1}^{ncp} \frac{1}{J^2} \nabla_{\xi\xi} R_i^2 EI \right) \det(J) d\xi \quad (21)$$

$$M = \sum_{k=1}^{nel} [M]^k = \sum_{k=1}^{nel} \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \left(\sum_{i=1}^{ncp} R_i^2 \rho I \right) \det(J) d\xi \quad (22)$$

که در روابط بالا $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ بازه انتگرال گیری و J عملگر ژاکوبین است.

۳-۲- فرمول بندی تیر تیموشنکو

مطابق شکل (۴) برای فرمول بندی ارتعاش تیر تیموشنکو از قضیه کار مجازی استفاده می‌شود. معادله دینامیکی حرکت برای تیر تیموشنکو برابر است با:

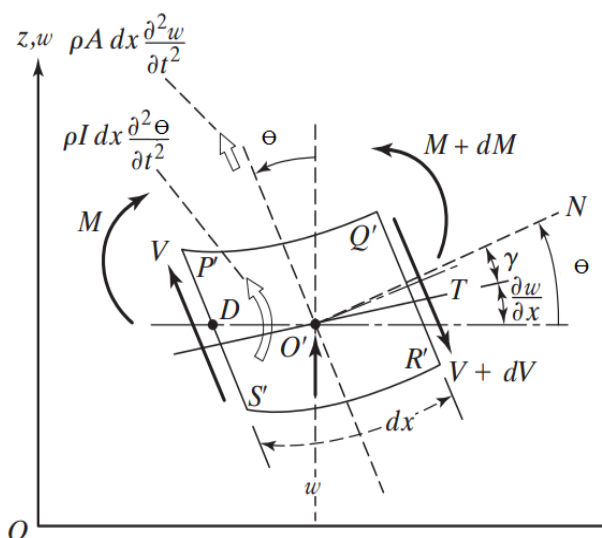
$$kAG \left(\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + f(x, t) = \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2}$$

$$EI \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + k_s AG \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - \theta \right) = \rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (23)$$

که در آن $w(x, t)$ جابه‌جایی، E مدول یانگ، θ دوران تیر، I گشتاور دوم سطح، G مدول برشی، k_s ضریب برشی، A سطح مقطع تیر، ρ وزن مخصوص مواد، L طول عضو است.

طبق روش گالرکین، شکل ضعیف مسأله برابر با انتگرال گیری از معادله حرکت در طول عضو است که برابر است با:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^l k_s AG \left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \delta w(x,t) dx \\
 & + \int_0^l \left(k_s GA \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} - \theta \right) \delta \theta + EI \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \delta \theta \right) dx \\
 & - \int_0^l \left(\rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} \delta w + \rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \delta \theta \right) dx = 0
 \end{aligned} \tag{24}$$



شکل ۴: جزئیات مقطع عرضی تیر تیموشنکو.

بنابراین فرمول بندی توابع تغییر مکان و دوران براساس نریز برابر است با:

$$w = \sum_{i=1}^{ncp} R_i(\xi) \hat{w} = R \hat{w} \tag{25}$$

$$\theta = \sum_{j=1}^{ncp} R_j(\xi) \hat{\theta} = R \hat{\theta} \tag{26}$$

که در آن ncp تعداد نقاط کنترل موجود در دامنه است.

ترم کار مجازی برابر است با:

$$\delta w = \sum_{i=1}^{ncp} R_i(\xi) \delta \hat{w} = R \delta \hat{w} \tag{27}$$

$$\delta \theta = \sum_{j=1}^{ncp} R_j(\xi) \delta \hat{\theta} = R \delta \hat{\theta} \tag{28}$$

با جایگذاری معادلات (۲۵) تا (۲۸) در معادله (۲۴) معادله زیر به دست می آید:

$$\delta \hat{w} \left(K \hat{w} + M \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial t^2} \right) = 0 \quad (29)$$

بردار شامل نقاط کنترل را می توان به طور زیر نوشت:

$$\hat{w} = \psi_n e^{i\omega_n t} \quad (30)$$

که در آن ψ_n بردار متغیرهای کنترل متناظر با w است.

با قرار دادن رابطه (۳۰) در (۲۹) می توان معادله را به فرم زیر نوشت:

$$[K - (\omega_n)^2 M] \psi_n = 0 \quad (31)$$

n, ω_n امین فرکانس طبیعی عضو، K و M به ترتیب ماتریس سختی و جرم است.

بنابراین مقادیر ماتریس سختی و جرم به صورت زیر به دست می آید:

$$K = \int_0^l \begin{bmatrix} \frac{\partial R_i}{\partial x} \frac{\partial R_j}{\partial x} k_s GA & -\frac{\partial R_i}{\partial x} R_j k_s GA \\ -\frac{\partial R_j}{\partial x} R_i k_s GA & EI \frac{\partial R_i}{\partial x} \frac{\partial R_j}{\partial x} + R_i R_j k_s GA \end{bmatrix} dx \quad (32)$$

$$M = \int_0^l \left((R_i R_j \rho A) + (R_i R_j \rho I) \right) dx \quad (33)$$

در نهایت، برای فرمول بندی ماتریس سختی و جرم براساس تحلیل ایزوژئومتریک نیاز است با استفاده از عملگر ژاکوبین فضای پارامتری ایزوژئومتریکی به فضای فیزیکی تبدیل شود ($\Omega \rightarrow \mathcal{X}: \Omega \wedge$). بنابراین ماتریس سختی و جرم اعضا از حاصل جمع ماتریس المان های تیر به دست می آید:

$$K = \sum_{k=1}^n [K]^k = \sum_{k=1}^n \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} k_s GA \begin{bmatrix} \frac{\partial R_i}{\partial \xi} \frac{\partial R_j}{\partial \xi} \frac{1}{J^2} & \frac{R_j}{J} \frac{\partial R_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial R_j}{\partial \xi} \frac{R_i}{J} & \frac{EI}{k_s GA} \frac{\partial R_i}{\partial \xi} \frac{\partial R_j}{\partial \xi} + R_i R_j \end{bmatrix} \det(J) d\xi \quad (34)$$

$$M = \sum_{k=1}^n [M]^k = \sum_{k=1}^n \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \left((R_i R_j \rho A) + (R_i R_j \rho I) \right) \det(J) dx \quad (35)$$

۳-۳- صحت سنجی

تعیین فرکانس طبیعی دقیق المان تیرها کار ساده ای نیست. روش سختی دینامیکی که براساس حل دقیق معادلات حرکت اعضا است یک گزینه ی مناسب جهت تحلیل ارتعاش المان تیرها محسوب می شود. از این رو برای صحت سنجی مدل های مورد نظر در این مطالعه، روش سختی دینامیکی برای تعیین فرکانس های طبیعی دقیق مورد استفاده قرار گرفت.

۳-۳-۱- تیر اویلر- برنولی

با توجه به شکل (۳) معادله حرکت ارتعاشات تیر اویلر- برنولی (رابطه (۱۰)) به شکل یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه چهار می باشد که برای حل آن باید از دو شرایط مرزی در انتها استفاده نمود. پس از اعمال شرایط مرزی رابطه فرکانس های طبیعی تیر دوسر ساده اویلر- برنولی طبق رابطه (۳۶) به دست می آید:

$$\omega_n = (\beta_n)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (36)$$

که در آن $\beta_n = \frac{n\pi}{l}$ و $n = 1, 2, 3, \dots$ است.

شکل مودهای ارتعاش حل دقیق با استفاده از رابطه زیر به دست می آید:

$$W_n(x) = C_n \sin \beta_n x = \sqrt{\frac{2}{\rho A l}} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (37)$$

پاسخ تیر نیز برابر است با:

$$w(x, t) = \frac{2f_0}{\rho A l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2 - \Omega^2} \sin \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \Omega t \quad (38)$$

که در آن Ω ، فرکانس تغییرات بار و f_0 ثابت است.

۳-۳-۲- تیر تیموشنکو

برای تعیین معادله حرکت تیر تیموشنکو مطابق شکل (۴) تمام فرضیات تغییرشکل مانند ممان چرخشی و اثرات تغییرشکل برشی در محاسبات در نظر گرفته می شود. بنابراین معادله حرکت تیر دوسر ساده تیموشنکو یک معادله دیفرانسیل چندمتغیره با مشتقات جزئی مرتبه دوم طبق رابطه (۲۳) به دست می آید و با اعمال شرایط مرزی فرکانس های طبیعی تیر طبق رابطه (۳۹) به دست می آید:

$$\omega_n^4 \left(\frac{\rho r^2}{kG} \right) - \omega_n^2 \left(1 + \frac{n^2 \pi^2 r^2}{l^2} + \frac{n^2 \pi^2 r^2}{l^2} \frac{E}{k_s G} - \frac{\rho r^2}{k_s G} \right) + \left(\frac{\alpha^2 n^4 \pi^4}{l^4} \right) - f_0 = 0 \quad (39)$$

$$\alpha^2 = \frac{EI}{\rho A}, \quad r^2 = \frac{I}{A}$$

شکل مودهای ارتعاش حل دقیق با استفاده از فرمول زیر به دست می آید:

$$W_n(x) = C_n \sin \beta_n x = \sqrt{\frac{2}{\rho A l}} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (40)$$

پاسخ تیر به صورت زیر قابل بیان است:

$$w(x, t) = \frac{2f_0}{\rho A l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2 - \Omega^2} \sin \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \Omega t \quad (41)$$

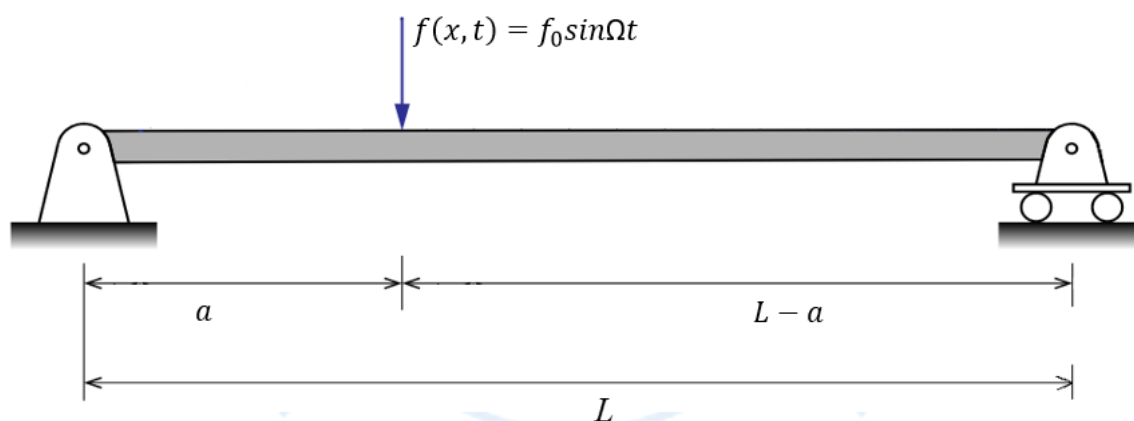
که در آن f_0 دامنه نیروی $f(x, t) = \Omega f_0$ فرکانس نوسان است. نتایج حاصل از تحلیل فرکانس تیر تیموشنکو در جدول (۴) آورده شده است.

۴- مثال‌های عددی

در این بخش با استفاده از یک مثال نتایج حاصل از تحلیل ایزوژنومتریکی با نتایج دقیق مقایسه می‌گردد. ابتدا حل دقیق فرکانس طبیعی و روابط شکل مودهای یک تیر با تکیه‌گاه ساده در دو انتها بیان شده و سپس به تحلیل ارتعاش اجباری و تعیین فرکانس طبیعی با رویکرد ایزوژنومتریکی پرداخته شده است. سپس مقادیر فرکانس طبیعی با رویکرد ایزوژنومتریکی برای مش‌های مختلف به دست آمده است.

۴-۱- مشخصات هندسی برای مدل سازی و تحلیل تیر اویلر-برنولی به روش ایزوژنومتریکی

به منظور تحلیل ایزوژنومتریکی ارتعاش اجباری اعضای پیوسته سازه، تیری با مشخصات مندرج در جدول (۱) در نظر گرفته شد. این تیر مطابق شکل (۵) تحت بار هارمونیکی مشخص به فاصله a از بر تکیه‌گاه تیر قرار دارد.



شکل ۵: تیر اویلر-برنولی.

جدول ۱: مشخصات هندسی تیر اوپلر- برنولی.

$ngp = 4$	تعداد نقاط انتگرال گیری
	گوس
$J = L/2$	ژاکوبین
$P_u = 1$	درجه چندجمله‌ای در جهت u
$P_v = 3$	درجه چندجمله‌ای در جهت v
$\Xi_u = [-1 \ -1 \ 1 \ 1]$	بردارگره در جهت u
$\Xi_v = [-1 \ -1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$	بردارگره در جهت v
$E = 249565 \text{ kg/cm}^2$	مدول الاستیسیته
$\rho = 0.0024 \text{ kg/cm}^3$	وزن مخصوص
$300 \times 40 \times 30 \text{ cm}$	ابعاد تیر

۲-۴- فرکانس‌های طبیعی و پاسخ تیر اوپلر- برنولی تحت بار هارمونیک

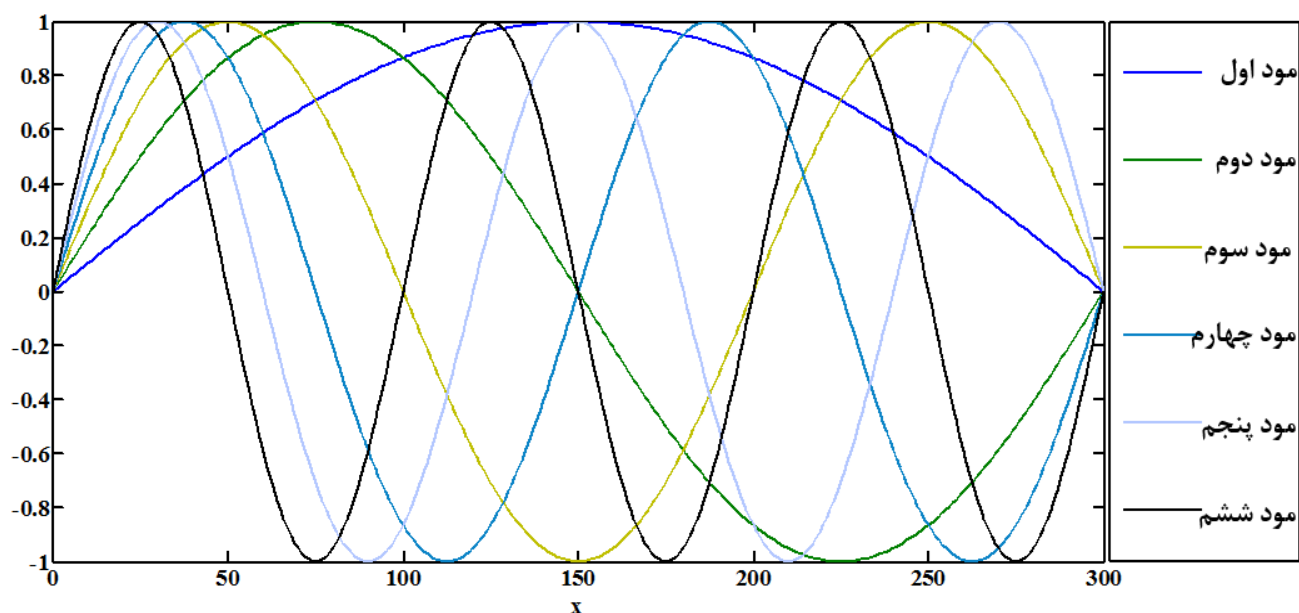
سختی و جرم تیر اوپلر- برنولی برای المان‌های مختلف به روش ایزوژئومتری که یک مسأله مقدار ویژه است با استفاده از نرم افزار متلب^{۱۳} محاسبه شد و در نتیجه با جایگذاری ماتریس سختی و جرم در روابط ایزوژئومتری فرکانس‌های طبیعی تیر به دست آمد و با نتایج حاصل از روش سختی دینامیکی^{۱۴} یا همان حل دقیق مقایسه گردید. نتایج در جدول (۲) نشان داده شده است. با جایگذاری فرکانس‌های طبیعی حاصل از این روش در رابطه‌ی (۳۷) مود ارتعاش اجباری تیر مورد نظر به دست می‌آید. شکل (۶) شش مود اول ارتعاش اجباری تیر اوپلر- برنولی را نشان می‌دهد. همچنین پاسخ ارتعاش اجباری این تیر که از رابطه (۳۸) به دست می‌آید، برای $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ در شکل (۷) نشان داده شده است.

جدول ۲: فرکانس‌های طبیعی تیر اوپلر- برنولی حاصل از تحلیل ایزوژئومتری.

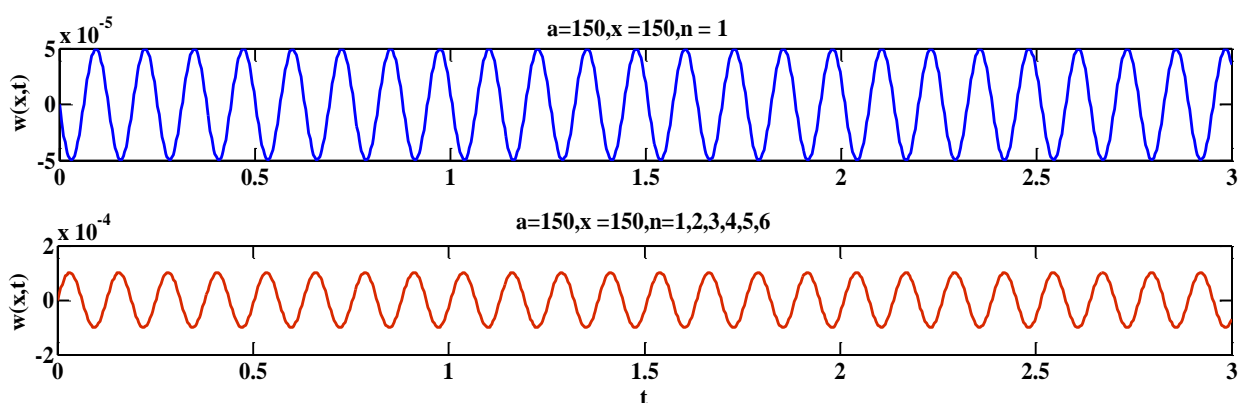
حل دقیق (DSM)	تعداد المان‌های تیر						تعداد مود
	ne=110	ne=80	ne=60	ne=40	ne=20	ne=10	
۱۲,۹۱۲۵	۱۲,۹۱۲۵	۱۲,۹۱۲۵	۱۲,۹۱۲۵	۱۲,۹۱۲۵	۱۲,۹۱۲۵	۱۲,۹۱۲۶	۱
۵۱,۶۵۰۲	۵۱,۶۵۰۲	۵۱,۶۵۰۲	۵۱,۶۵۰۳	۵۱,۶۵۰۳	۵۱,۶۵۰۶	۵۱,۶۵۵۸	۲
۱۱۶,۲۱۳۱	۱۱۶,۲۱۳۱	۱۱۶,۲۱۳۲	۱۱۶,۲۱۳۲	۱۱۶,۲۱۳۴	۱۱۶,۲۱۷۱	۱۱۶,۲۷۵۲	۳
۲۰۶,۶۰۱۱	۲۰۶,۶۰۱۲	۲۰۶,۶۰۱۲	۲۰۶,۶۰۱۴	۲۰۶,۶۰۲۵	۲۰۶,۶۲۳۲	۲۰۶,۹۴۳۴	۴
۳۲۲,۸۱۴۲	۳۲۲,۸۱۴۴	۳۲۲,۸۱۴۶	۳۲۲,۸۱۵۴	۳۲۲,۸۱۹۶	۳۲۲,۸۹۸۱	۳۲۴,۰۸۸۴	۵
۴۶۴,۸۵۲۶	۴۶۴,۸۵۲۹	۴۶۴,۸۵۳۶	۴۶۴,۸۵۵۷	۴۶۴,۸۶۸۴	۴۶۵,۱۰۱۰	۴۶۸,۵۴۴۳	۶

¹³ MATLAB

¹⁴ Dynamic Stiffness Method



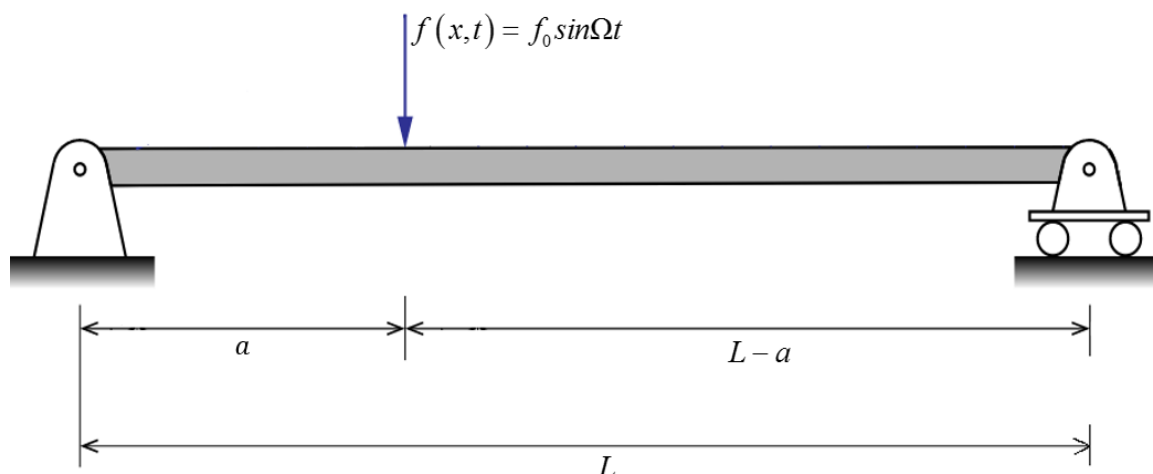
شکل ۶: شکل مدهای ارتعاش اجباری تیر اویلر- برنولی حاصل از تحلیل ایزوژنومتریک با استفاده از نرم‌افزار متلب.



شکل ۷: پاسخ ارتعاش اجباری تیر اویلر- برنولی حاصل از تحلیل ایزوژنومتریک با استفاده از نرم افزار متلب.

۳-۴- مشخصات هندسی برای مدل‌سازی و تحلیل تیر تیموشنکو به روش ایزوژنومتریک

مشخصات هندسی لازم برای تحلیل ایزوژنومتریک تیر تیموشنکو در جدول (۳) و شکل (۸) نشان داده شده است. فرکانس‌های طبیعی و مود شکل برای المان‌های مختلف تیر به دست آمد و نتایج حاصل مندرج در جدول (۴) با مقدار دقیق فرکانس‌ها مقایسه گردید.



شکل ۸: تیر تیموشنکو.

جدول ۳: مشخصات هندسی تیر تیموشنکو.

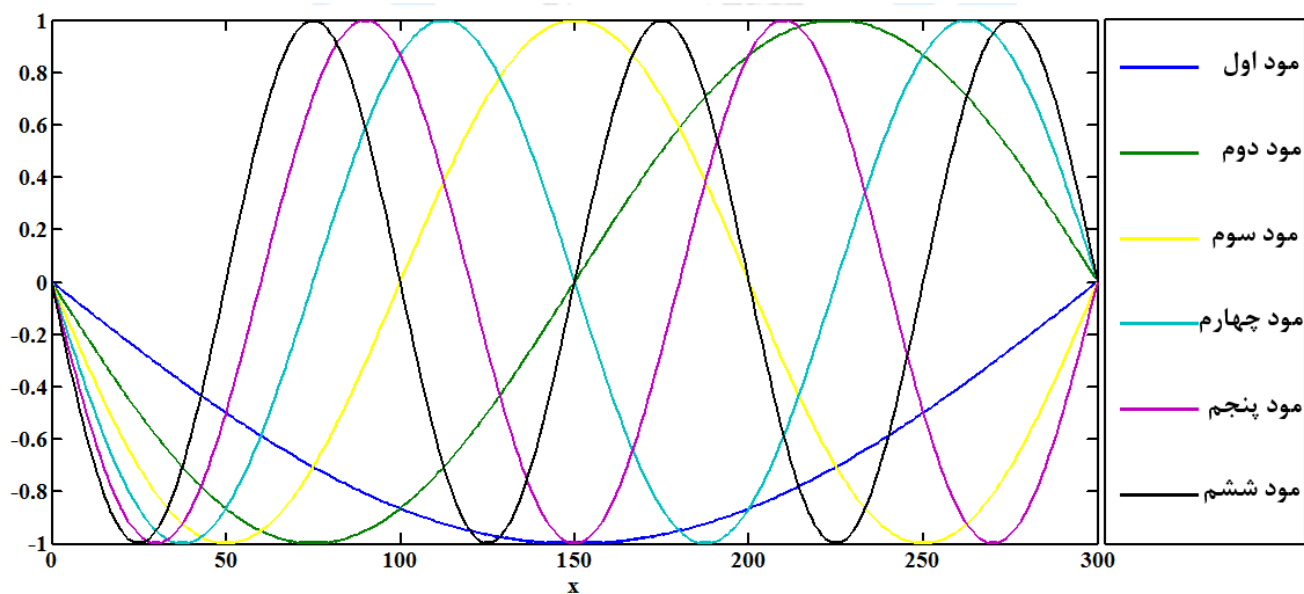
$ngp = 4$	تعداد نقاط انتگرال‌گیری
	گوس
$J = L/2$	ژاکوبین
$p_u = 1$	درجه چندجمله‌ای در جهت u
$p_v = 3$	درجه چندجمله‌ای در جهت v
$p_\theta = 2$	درجه چندجمله‌ای در جهت θ
$\Xi_u = [-1 \ -1 \ 1 \ 1]$	بردارگره در جهت u
$\Xi_v = [-1 \ -1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$	بردارگره در جهت v
$\Xi_\theta = [-1 \ -1 \ 1 \ 1]$	بردارگره در جهت θ
$E = 249565 \text{ kg/cm}^2$	مدول الاستیسیته
$\rho = 0.0024 \text{ kg/cm}^3$	وزن مخصوص
$\kappa = 5/6$	ضریب اصلاح برشی
$\nu = 0.3$	ضریب پواسون
$300 \times 40 \times 30 \text{ cm}$	ابعاد تیر

۴-۴- فرکانس‌های طبیعی و پاسخ تیر تیموشنکو تحت بارهارمونیکی

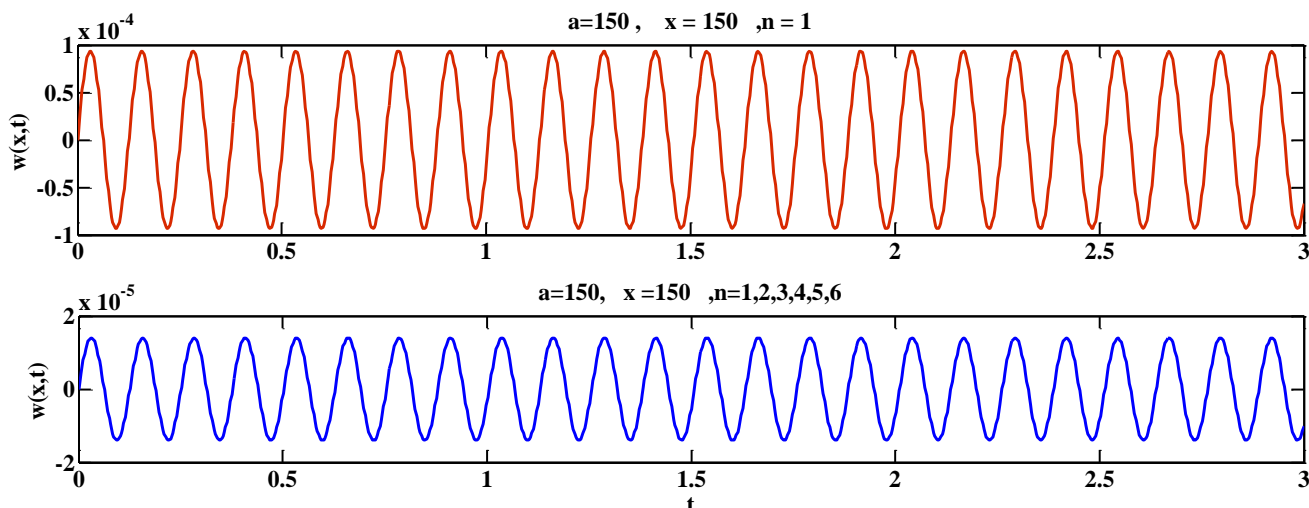
ماتریس سختی و جرم تیر در روش ایزوژئومتریکی با مسئله مقادیر ویژه به دست آمد و با جایگذاری آن‌ها در روابط ایزوژئومتریکی فرکانس‌های طبیعی تیر به دست آمد. در نتیجه مدهای شکل ارتعاش اجباری تحت بار مشخص و پاسخ تیر طبق روابط (۴۰) و (۴۱) به دست آمد. شکل (۹) شش مود اول ارتعاش اجباری تیر تیموشنکو را نشان می‌دهد. همچنین پاسخ ارتعاش اجباری این تیر برای مدهای $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ در شکل (۱۰) نشان داده شده است.

جدول ۴: نتایج تحلیل فرکانس های طبیعی حاصل از تحلیل ایزوژئومتریکی.

حل دقیق (DSM)	تعداد المان های تیر						تعداد مود
	ne=170	ne=160	ne=150	ne=140	ne=130	ne=120	
12,6278	12,6282	12,6298	12,6307	12,6318	12,6338	12,6352	1
47,4981	47,4989	47,5002	47,5019	47,5036	47,5074	47,5095	2
97,8492	97,8499	97,8510	97,8527	97,8543	97,8567	97,8591	3
157,0800	157,0815	157,0836	157,0856	157,0874	157,0912	157,0951	4
220,6462	220,6482	220,6502	220,6528	220,6578	220,6621	220,6698	5
285,9724	285,9745	285,9798	285,9851	285,9886	285,9921	285,9973	6



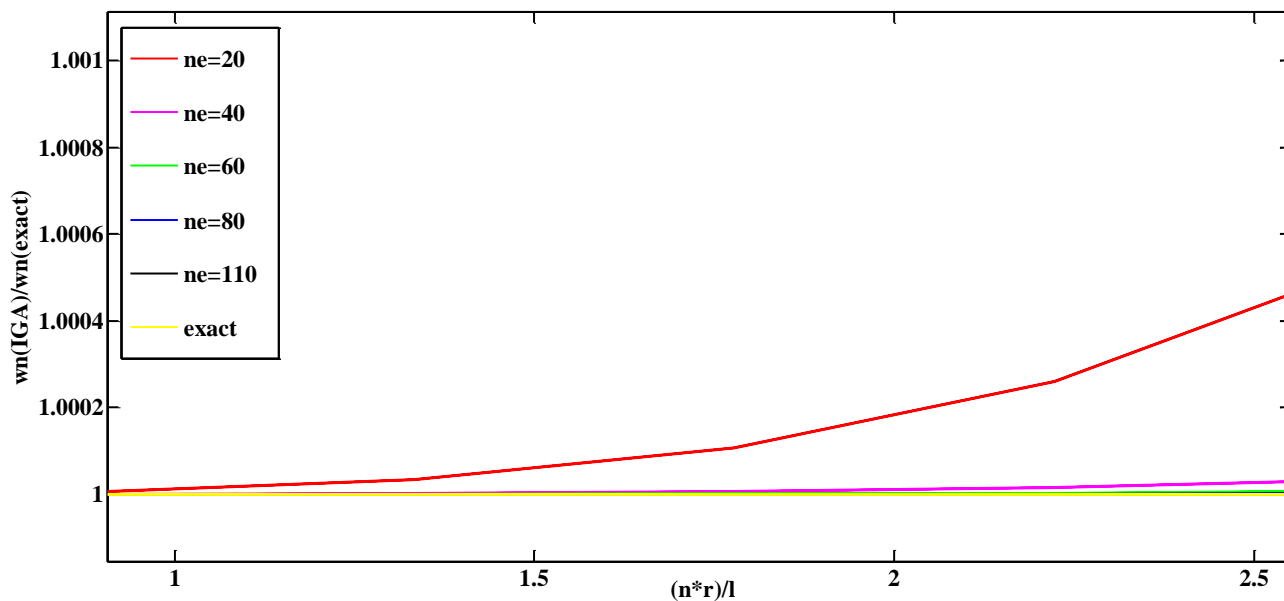
شکل ۹: شکل مودهای ارتعاش اجباری تیر تیموشنکو حاصل از تحلیل ایزوژئومتریکی با استفاده از نرم افزار متلب.



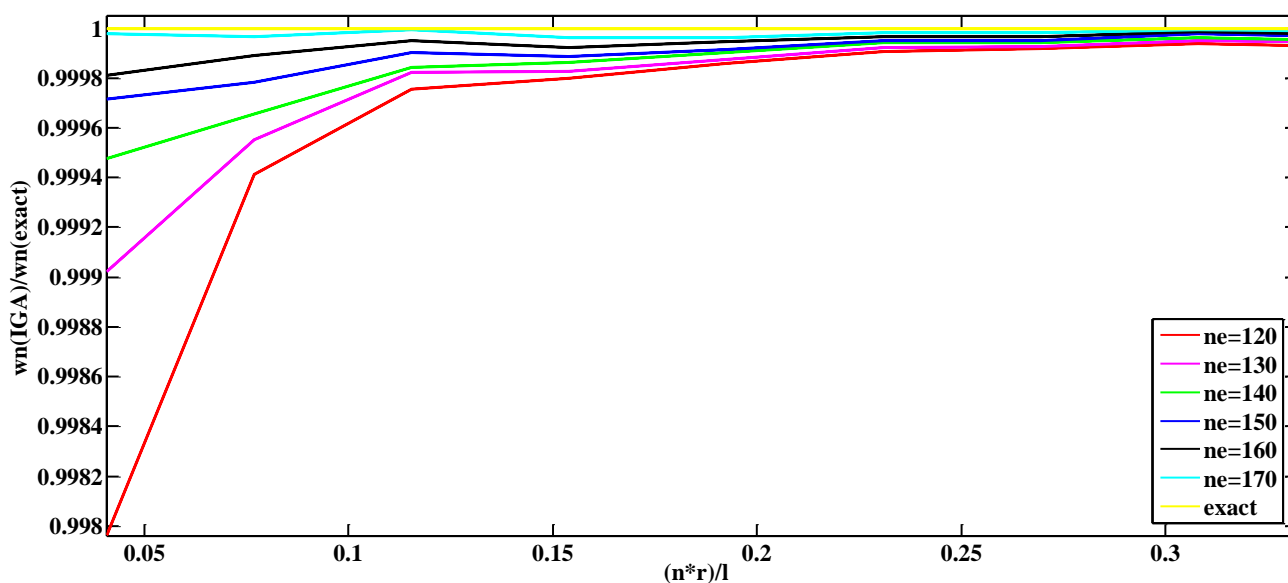
شکل ۱۰: پاسخ ارتعاش اجباری تیر تیموشنکو حاصل از تحلیل ایزوژئومتری با استفاده از نرم افزار متلب.

۴-۵- نمودار تغییرات نسبت فرکانس‌های طبیعی در تیرها

مطابق شکل (۱۱) و (۱۲) تغییرات نسبت فرکانس طبیعی حاصل از تحلیل ایزوژئومتری به فرکانس طبیعی دقیق براساس تعداد مودها، شعاع ژیراسیون و طول عضو برای هر دو نوع تیر مقدار وابستگی ایزوژئومتری به مش‌بندی را نشان می‌دهد. یعنی اگر تیر به المان‌های ریزتر تقسیم‌بندی شود نتایج دقیق‌تری حاصل می‌شود. توجه داشته باشید که در این روش با بالا بردن تعداد المان‌ها نمودار به مقدار دقیق خود در تغییرات فرکانس‌ها نزدیک‌تر می‌شود، بنابراین با تعداد المان مشخص می‌توان به همگرایی بهتری با حل دقیق رسید.



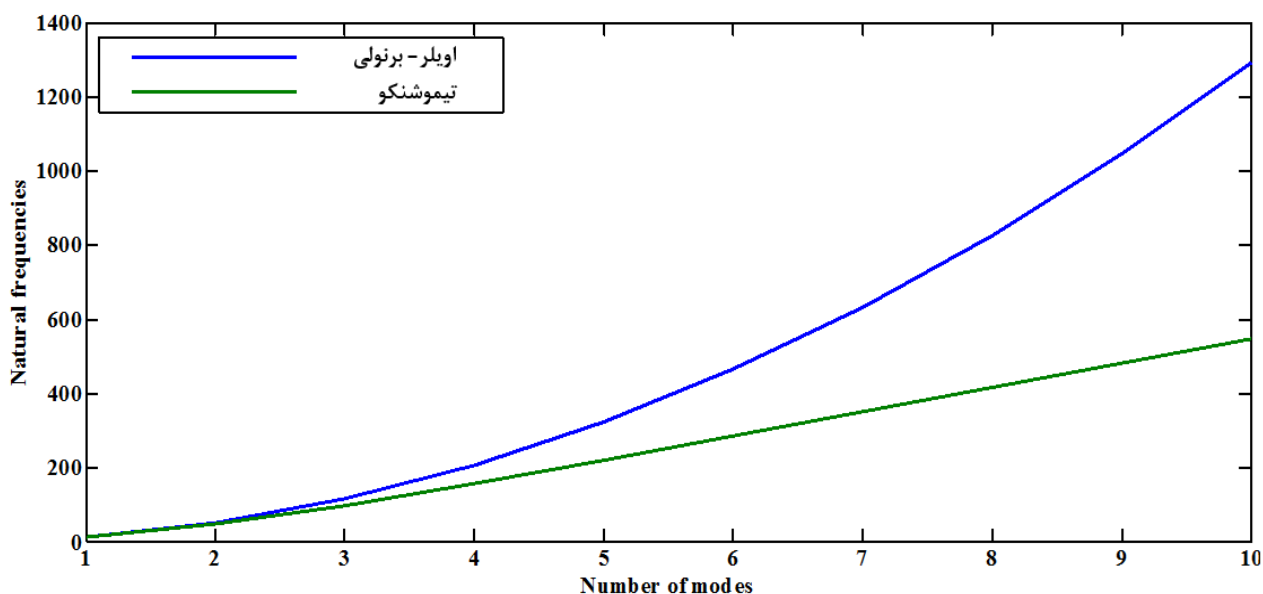
شکل ۱۱: تغییرات فرکانس طبیعی برای تیر اویلر-برنولی با استفاده از نرم افزار متلب.



شکل ۱۲: تغییرات فرکانس طبیعی برای تیر تیموشنکو با استفاده از نرم افزار متلب.

۴-۶- تاثیر فرضیات تیر تیموشنکو در فرکانس‌های طبیعی حاصل از تحلیل ایزوژئومتریکی

شکل (۱۳) تاثیر تغییر شکل برشی بر فرکانس طبیعی را نشان می‌دهد. دلیل کاهش مقدار فرکانس طبیعی در تیر تیموشنکو اضافه شدن ترم تغییر شکل برشی در معادلات تعادل است. طبق شکل (۱۳) شدت کاهش فرکانس در مدهای بالا بیشتر است. همچنین فرکانس طبیعی با افزایش چگالی و طول تیر کاهش می‌یابد.



شکل ۱۳: تاثیر تغییر شکل برشی بر فرکانس طبیعی با استفاده از نرم افزار متلب.

۴- نتیجه گیری

در این مقاله تحلیل ایزوژئومتریکی ارتعاش اجباری سیستم‌های پیوسته تحت بار هارمونیک مورد بررسی قرار گرفت. ابتدا روش استخراج معادلات حرکت سیستم‌های پیوسته مانند تیرهای اویلر-برنولی و تیموشنکو مطالعه شد. سپس روش پیدا کردن فرکانس‌های

طبیعی، اشکال مود ارتعاش و راه حل ارتعاش اجباری براساس توابع نریز و هم چنین اثرات تغییر شکل برشی و اینرسی چرخشی بر ارتعاش تیرها ارائه داده شد. اساس این تحقیق استفاده از توابع نسبی غیریکنواخت بی اسپلاین به جای توابع تقریبی که برای راه حل ارتعاش در نظر گرفته می شوند است. به این معنی که توابعی که به صورت چندجمله ای در راه حل تقریبی المان محدود استفاده می شوند، با توابع شکل آن متفاوت است که منجر به جواب تقریبی می شود. اما در تحلیل ایزوژئومتریکی توابع شکل مورد استفاده که همان توابع نریز هستند، به عنوان چندجمله ای در راه حل انتخابی استفاده می شوند. در این روش می توان درجه چندجمله ای را بدون ایجاد تغییر در هندسه و پارامتر افزایش داد. این خاصیت توابع بی اسپلاین منجر به هندسه دقیق با پیوستگی بالا در سرتاسر دامنه و باعث نتایج دقیق سختی و جرم می شود. کارایی و صحت این روش با مثال های عددی ارزیابی شد. در نهایت می توان نتیجه گرفت که تحلیل ایزوژئومتریکی پتانسیل قابل توجهی در حل مسائل ارتعاشات، الاستیسیته خطی، پواسیون و غیره دارد و جایگزین امیدوارکننده ای برای روش های تحلیل فعلی است.

مراجع

- [1] A. Amani Dashlekeh and A. Arabzadeh, "Experimental and analytical study on reinforced concrete deep beams," *Int. J. Struct. Eng.*, vol. 10, no. 1, pp. 1–24, 2019.
- [2] P. Kagan, A. Fischer, and P. Z. Bar-Yoseph, "New B-Spline Finite Element approach for geometrical design and mechanical analysis," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 41, no. 3, pp. 435–458, Feb. 1998.
- [3] T. Hughes, J. Cottrell, Y. B.-C. methods in Applied, and U. 2005, "Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement," *Elsevier*.
- [4] O. Weeger, "Isogeometric analysis of nonlinear structural vibrations," *Nonlinear Dyn.*, vol. 194, no. April, p. 5296, 2015.
- [5] W. A. Wall, M. A. Frenzel, and C. Cyron, "Isogeometric structural shape optimization," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 197, no. 33–40, pp. 2976–2988, 2008.
- [6] R. N. Simpson, S. P. A. Bordas, H. Lian, and J. Trevelyan, "An isogeometric boundary element method for elastostatic analysis: 2D implementation aspects," *Comput. Struct.*, vol. 118, pp. 2–12, Mar. 2013.
- [7] A. Amani Dashlekeh, "Isogeometric analysis of coupled thermo-elastodynamic problems under cyclic thermal shock," *Front. Struct. Civ. Eng.*, V. 13, No. 2, pp. 397-405, 2019..
- [8] İ. Çelik, "Free vibration of non-uniform Euler–Bernoulli beam under various supporting conditions using Chebyshev wavelet collocation method," *Appl. Math. Model.*, vol. 54, pp. 268–280, Feb. 2018.
- [9] S. Sınır, M. Çevik, and B. G. Sınır, "Nonlinear free and forced vibration analyses of axially functionally graded Euler–Bernoulli beams with non-uniform cross-section," *Compos. Part B Eng.*, vol. 148, pp. 123–131, Sep. 2018.
- [10] A. Ghannadiasl and S. Khodapanah Ajirlou, "Forced vibration of multi-span cracked Euler–Bernoulli beams using dynamic Green function formulation," *Appl. Acoust.*, vol. 148, pp. 484–494, May 2019.
- [11] X. Zhao, Y. R. Zhao, X. Z. Gao, X. Y. Li, and Y. H. Li, "Green's functions for the forced vibrations of cracked Euler–Bernoulli beams," *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 68–69, pp. 155–175, Feb. 2016.
- [12] S. Orhan, "Analysis of free and forced vibration of a cracked cantilever beam," *NDT E Int.*, vol. 40, no. 6, pp. 443–450, Sep. 2007.
- [13] M. Ghafarian and A. Ariaei, "Forced vibration analysis of a Timoshenko beam featuring bending-torsion on Pasternak foundation," *Appl. Math. Model.*, vol. 66, pp. 472–485, Feb. 2019.
- [14] B. Chen, X. Zhao, Y. H. Li, and Y. Guo, "Forced vibration analysis of multi-cracked Timoshenko beam with the inclusion of damping by virtue of Green's functions," *Appl. Acoust.*, vol. 155, pp. 477–491, Dec. 2019.
- [15] H. Rouhi, F. Ebrahimi, R. Ansari, and J. Torabi, "Nonlinear free and forced vibration analysis of Timoshenko nanobeams based on Mindlin's second strain gradient theory," *Eur. J. Mech. - A/Solids*, vol. 73, pp. 268–281, Jan. 2019.
- [16] M. Şimşek, "Bi-directional functionally graded materials (BDFGMs) for free and forced vibration of Timoshenko beams with various boundary conditions," *Compos. Struct.*, vol. 133, pp. 968–978, Dec. 2015.
- [17] T. Yokoyama, "Free vibration characteristics of rotating Timoshenko beams," *Int. J. Mech. Sci.*, vol. 30, no. 10, pp. 743–755, 1988.
- [18] K. Avramov and S. Malyshev, "Bifurcations and chaotic forced vibrations of cantilever beams with breathing cracks," *Eng. Fract. Mech.*, vol. 214, pp. 289–303, Jun. 2019.