

بهینه سازی توپولوژی براساس قابلیت اعتماد در سازه پل با استفاده از روش های قابلیت اعتماد مرتبه اول و دوم

میثم جوهری*^۱، بهروز احمدی ندوشن^۲

۱- کارشناس ارشد مهندسی سازه، دانشکده مهندسی عمران، پردیس فنی و مهندسی، دانشگاه یزد، یزد، ایران

۲- دانشیار، دانشکده مهندسی عمران، پردیس فنی و مهندسی، دانشگاه یزد، یزد، ایران

چکیده

بهینه سازی توپولوژی براساس قابلیت اعتماد، منجر به یک توپولوژی بهینه با ارضای قیودی که شامل عدم قطعیت متغیرهاست، می‌گردد. به دلیل عدم قطعیت‌های ذاتی از قبیل بارگذاری خارجی، خواص مصالح و کیفیت ساخت، نمونه‌های اولیه و اعضا تولید شده ممکن است عملکردهای مورد نیاز را ارضا نکنند. در بهینه سازی توپولوژی بر اساس قابلیت اعتماد، هرکدام از این پارامترهای عدم قطعیت به عنوان متغیر تصادفی در نظر گرفته می‌شود و قیود قابلیت اعتماد، به منظور حاصل شدن سازه قابل اعتمادتر در فرمول بندی مسئله بهینه سازی توپولوژی استفاده می‌شود. در این مقاله، به منظور به دست آوردن توپولوژی قابل اعتماد در دو سازه پل، بهینه سازی توپولوژی براساس قابلیت اعتماد از روش ریز ساختارهای ایزوتروپیک جامد با جریمه، استفاده شده است. روش‌های قابلیت اعتماد مرتبه اول و دوم به عنوان روش‌های تحلیل قابلیت اعتماد، به منظور در نظر گرفتن پارامترهای عدم قطعیت مربوط به بارگذاری، مدول یانگ و ضخامت استفاده می‌شود. مشخص شد که در توپولوژی‌های بهینه به دست آمده به وسیله بهینه سازی توپولوژی براساس قابلیت اعتماد، مقادیر نرمی بالاتر از مقادیر متناظر به دست آمده از روش بهینه سازی توپولوژی قطعی می‌باشد و با افزایش تعداد پارامترهای عدم قطعیت، نرمی سازه بیشتر می‌گردد.

کلمات کلیدی: بهینه سازی توپولوژی، بهینه سازی توپولوژی براساس قابلیت اعتماد، تحلیل قابلیت اعتماد، روش قابلیت اعتماد مرتبه دوم.

*نویسنده مسئول: میثم جوهری

پست الکترونیکی: meysam2135@yahoo.com

DOI: 10.22065/jsce.2016.40432

شناسه دیجیتال

<http://dx.doi.org/10.22065/jsce.2016.40432>

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۴/۱۲/۰۸، تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۵/۰۹/۰۵

۱- مقدمه

بهینه سازی سازه را می توان یافتن چیدمانی جهت تحمل و انتقال بار به بهترین شکل ممکن تعریف کرد [۱]. بهینه سازی توپولوژی، یکی از شاخه های بهینه سازی سازه ای است که به تعیین بهترین چیدمان سازه می پردازد [۲]. در مسائل بهینه سازی سازه ها، شاخه بهینه سازی توپولوژی عمومی ترین شاخه در این زمینه به حساب می آید زیرا بسیاری از پارامترها از جمله ارتباط بین المان های تشکیل دهنده سازه در ابتدای حل مجهولند و در روند بهینه سازی تعیین می گردند [۳].

از طرفی، قابلیت اعتماد سازه ها را می توان توانایی سازه ها در برآورده کردن الزامات طراحی شان برای طول عمر معین شده طراحی تعریف نمود [۴]. ادغام روش های محاسبه قابلیت اعتماد در بهینه سازی توپولوژی، نوع جدیدی از بهینه سازی را ارائه می دهد که بهینه سازی توپولوژی براساس قابلیت اعتماد (RBTO) نامیده می شود [۵]. بهینه سازی توپولوژی براساس قابلیت اعتماد، بهینه سازی توپولوژی براساس قیود احتمالاتی است که به بهترین برآیند میان هزینه و ایمنی می رسد [۶].

در زمینه ی RBTO تا کنون مطالعات مختلفی انجام گرفته است که از جمله ی آن ها می توان به مقاله های کارماندا و همکاران [۵]، یانگ و همکاران [۷]، کیم و همکاران [۶]، کیم و همکاران [۸]، یو و همکاران [۹] و لیو و همکاران [۱۰] اشاره کرد. تا به امروز به طور معمول، پژوهشگران برای سادگی و اجتناب از محاسبات پیچیده تر، از روش قابلیت اعتماد مرتبه اول، برای تحلیل قابلیت اعتماد در بهینه سازی توپولوژی براساس قابلیت اعتماد استفاده کرده اند. اما در این مقاله از روش قابلیت اعتماد مرتبه دوم نیز، که دقیق تر از روش مرتبه اول می باشد، استفاده می شود.

در این مقاله ابتدا تفاوت بهینه سازی توپولوژی براساس قابلیت اعتماد با بهینه سازی توپولوژی قطعی و سپس فرمول بندی و مراحل مختلف انجام آن بیان می گردد. در ادامه نیز دو مثال از سازه پل جهت بررسی عددی مدل بهینه سازی توپولوژی براساس قابلیت اعتماد و اهمیت آن ارائه می شود.

۲- تفاوت بهینه سازی توپولوژی قطعی و بهینه سازی توپولوژی براساس قابلیت اعتماد

به دلیل عدم قطعیت های ذاتی از قبیل بارگذاری خارجی، خواص مصالح و کیفیت ساخت، ممکن است نمونه های اولیه و محصولات تولید شده عملکردهای مورد نیاز را ارضا نکنند. به منظور کم کردن امکان تنزل عملکرد در فرآیند تولید، این عدم قطعیت ها باید در طول فرآیند بهینه سازی طراحی توپولوژی در نظر گرفته شود [۸]. روش های بهینه سازی توپولوژی قطعی نمی توانند این متغیرهای تصادفی را به حساب بیاورند [۹] و طرح بهینه بدون در نظر گرفتن اثرات عدم قطعیت های هندسه، خواص مصالح و بارگذاری تعیین می گردد [۵]. اما در بهینه سازی توپولوژی براساس قابلیت اعتماد، هر کدام از این پارامترهای عدم قطعیت را می توان به عنوان متغیر تصادفی انتخاب و قیود قابلیت اعتماد را در یک فرمول بندی بهینه سازی اعمال کرد، در نتیجه سازه به دست آمده از این روش قابل اعتمادتر و ایمن تر می باشد.

توابع هدف در مسائل بهینه سازی توپولوژی قطعی و بهینه سازی توپولوژی براساس قابلیت اعتماد یکسان است و معمولاً به صورت کمینه کردن نرمی سازه (افزایش سختی سازه)، حجم سازه، هزینه سازه و ... مطرح می شوند. اما قیود این دو نوع مسئله با هم متفاوت هستند؛ در بهینه سازی توپولوژی براساس قابلیت اعتماد، علاوه بر قیود بهینه سازی توپولوژی قطعی که معمولاً به صورت قیود حداکثر تنش، حداکثر جابجایی، برآورده شدن معادلات تعادل و ... مطرح می شود، قیود قابلیت اعتماد هم در نظر گرفته می شوند.

۳- روش بهینه سازی توپولوژی براساس قابلیت اعتماد

در بهینه سازی توپولوژی براساس قابلیت اعتماد، اولاً سازه باید قیود قابلیت اعتماد را برآورده سازد، یعنی قید ایمنی سازه اقلان شود و ثانیاً باید قسمت های غیر بحرانی سازه (مانند نواحی کم تنش) برای کاهش وزن سازه بررسی شوند. در ادامه روش بهینه سازی توپولوژی براساس قابلیت اعتماد تشریح می گردد.

۱-۳- متغیرها در RBTO

در مدل RBTO سه نوع متغیر تعریف و به کار برده می‌شوند:

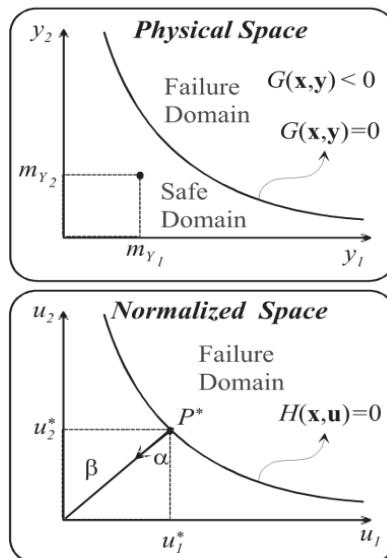
۱- متغیرهای طراحی توپولوژی قطعی x ، چگالی مواد در هر المان محدود به صورت متغیرهای قطعی در نظر گرفته می‌شوند.

۲- متغیرهای تصادفی y ، که نشان دهنده عدم قطعیت‌های موجود هستند و به کمک توزیع‌های احتمالاتی تعیین می‌شوند. به عنوان مثال، این متغیرها می‌توانند ابعاد هندسی، مشخصات مواد و یا بارگذاری خارجی اعمال شده باشند.

۳- متغیرهای نرمالیزه u ، که به متغیرهای تصادفی y و مقادیر میانگین و انحراف استاندارد آن‌ها مربوط هستند.

برای ارزیابی احتمال شکست، بر اساس سناریوی شکست انتخاب شده، یک تابع حالت حدی $G(x, y)$ تعریف می‌گردد و مطابق

شکل ۱، حد بین حالت شکست $G(x, y) < 0$ و حالت ایمنی $G(x, y) > 0$ ، به عنوان سطح حالت حدی $G(x, y) = 0$ در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۱: فضاهای فیزیکی و نرمال؛ شکل بالا: فضای فیزیکی، شکل پایین: فضای نرمال [۵].

تبدیل از متغیرهای فیزیکی y به متغیرهای نرمالیزه u ، به وسیله رابطه زیر امکان پذیر است:

$$u = T(x, y) \quad , \quad y = T^{-1}(x, u) \quad (1)$$

که در آن اپراتور $T(\cdot)$ تبدیل احتمالاتی نامیده می‌شود.

در این فضای استاندارد، تابع حالت حدی به صورت شکل زیر می‌باشد:

$$H(x, u) \equiv G(x, y) = 0 \quad (2)$$

مطابق شکل ۱، برای یک سناریوی شکست، شاخص قابلیت اعتماد β با بردار نرمال u ، به وسیله حل یک مسئله بهینه سازی مقید، ارزیابی شده است. محاسبه شاخص قابلیت اعتماد، که به صورت حداقل فاصله مبدأ از نقطه طراحی P^* می‌باشد؛ به صورت رابطه زیر می‌باشد:

$$\beta = \min \left(\sqrt{u_1^2 + \dots + u_j^2 + \dots + u_l^2} \right) \quad \text{Subject to} \quad G \leq 0 \quad (3)$$

که در آن

$$u_j = \frac{y_j - m_{y_j}}{\sigma_{y_j}} \quad (4)$$

که y_j ، J زمین متغیر تصادفی با مقدار میانگین m_{y_j} و انحراف استاندارد σ_{y_j} می‌باشد. G تابع حالت حدی و J تعداد متغیرهای تصادفی انتخاب شده است [۵].

۳-۲- فرمول‌بندی مسئله RBTO با هدف کمینه کردن نرمی

همان‌طور که مشخص است، با توجه به چگونگی در نظر گرفتن نوع تابع هدف، فرمول‌بندی مسئله بهینه‌سازی متفاوت خواهد بود. مسئله بهینه‌سازی توپولوژی براساس قابلیت اعتماد با هدف کمینه کردن نرمی (بیشینه‌سازی سختی)، شامل قیدهای یک کران بالای داده شده روی حجمی از مواد، برآورده شدن معادله تعادل و قیود قابلیت اعتماد می‌باشد. چگالی مواد استفاده شده در هرالمان محدود به صورت متغیرهای طراحی پیوسته در نظر گرفته می‌شود. بنابراین مسئله بهینه‌سازی توپولوژی قطعی با استفاده از روش ریز ساختارهای ایزوتروپیک جامد با جریمه، به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & C(x) = q^T K q = \sum_{e=1}^N (x_e)^P q_e^T k_0 q_e \\ \text{subject to} \quad & \frac{V(x)}{V_0} \leq f \\ & K q = F \\ & 0 < x_{\min} \leq x \leq 1 \end{aligned} \quad (5)$$

با اعمال قیود قابلیت اعتماد، مسئله بهینه‌سازی توپولوژی براساس قابلیت اعتماد را می‌توان به صورت زیر فرمول‌بندی کرد:

$$\begin{aligned} \min \quad & C(x) = q^T K q = \sum_{e=1}^N (x_e)^P q_e^T k_0 q_e \\ \text{subject to} \quad & \beta(u) \geq \beta_t \\ & K(x, y, u) \cdot q(x, y, u) = F(y, u) \\ & \frac{V(x, y, u)}{V_0} \leq f \\ & 0 < x_{\min} \leq x \leq 1 \end{aligned} \quad (6)$$

در روابط بالا، C مقدار نرمی، q بردار جابجایی کلی، F بردار نیرو و K ماتریس سختی کلی می‌باشند. k_0 و q_e ، به ترتیب بردار جابجایی المان e ام و ماتریس سختی المان‌ها می‌باشند. x بردار متغیرهای طراحی، x_{\min} بردار چگالی‌های نسبی مینیمم (غیر صفر به منظور اجتناب از تکینگی)، N تعداد المان‌های ناحیه طراحی گسسته شده، p توان جریمه، $V(x)$ حجم مصالح، V_0 حجم ناحیه طراحی و f یک کران بالای تعیین شده روی کسر حجم می‌باشند. β و β_t به ترتیب شاخص قابلیت اعتماد سیستم و شاخص قابلیت اعتماد هدف هستند [۵].

متغیرهای طراحی x چگالی مواد در هر المان محدود هستند، در حالی که متغیرهای تصادفی y ، مربوط به پارامترهایی که به عنوان پارامترهای عدم قطعیت در نظر گرفته شده‌اند، می‌باشند. در روابط معادله ۶ میتوان هر یک از پارامترهای مربوط به هندسه، بارگذاری و خواص مصالح و یا همه را به عنوان متغیر تصادفی در نظر گرفت.

۳-۳- مراحل بهینه سازی توپولوژی براساس قابلیت اعتماد

محاسبات بهینه سازی توپولوژی براساس قابلیت اعتماد شامل سه مرحله اصلی متوالی: تحلیل حساسیت، محاسبه شاخص قابلیت اعتماد و فرآیند بهینه سازی توپولوژی می باشد که هر یک از این مراحل به عنوان یک فرآیند کاملاً مستقل، بررسی می شوند [۵]. بهینه سازی توپولوژی براساس قابلیت اعتماد، به صورت یک روش ترتیبی متشکل از حلقه های تکرار می باشد.

فرآیند بهینه سازی توپولوژی براساس قابلیت اعتماد به این صورت است که ابتدا یک مجموعه از متغیرها در بردار m_y که بردار متغیرهای میانگین نامیده می شود، در نظر گرفته می شود. سپس به منظور انتخاب متغیرهای با اهمیت تر، حساسیت تابع هدف با توجه به این میانگین ها بررسی می شود. با توجه به نتایج به دست آمده از تحلیل حساسیت، پارامترهای مؤثرتر انتخاب شده و در بردار متغیرهای تصادفی y جایگذاری می شوند. در مرحله بعد، در فضای نرمال، شاخص قابلیت اعتماد مرتبه اول β_{FORM} ، با ارضای قیود قابلیت اعتماد مربوطه، ارزیابی خواهد شد و β_{FORM} محاسبه شده، به همراه بردار نرمال U_{FORM} استخراج شده از آن، به منظور محاسبه شاخص قابلیت اعتماد مرتبه دوم β_{SORM} ، به عنوان ورودی در فرآیند قابلیت اعتماد مرتبه دوم استفاده می شوند. پس از محاسبات مربوط به روش قابلیت اعتماد مرتبه دوم، شاخص قابلیت اعتماد β_{SORM} محاسبه می گردد و در نتیجه آن، بردار نرمال U_{SORM} به منظور فرموله کردن بردار پارامتر تصادفی y استفاده خواهد شد که این بردار به عنوان یک ورودی برای فرآیند بهینه سازی توپولوژی در فضای استاندارد به کار می رود. البته در صورت استفاده از روش قابلیت اعتماد مرتبه اول کفایت بردار نرمال U_{FORM} به منظور فرموله کردن بردار پارامتر تصادفی y استفاده شود. در هر حالت، نهایتاً با استفاده از روش ریز ساختارهای ایزوتروپیک جامد با جریمه، توپولوژی بهینه و قابل اعتماد به دست خواهد آمد.

۳-۳-۱- تحلیل حساسیت

به مطالعه تاثیرپذیری متغیرهای خروجی از متغیرهای ورودی یک مدل تحلیل حساسیت گفته می شود. به عبارت دیگر، تحلیل حساسیت روشی برای تغییر در ورودی های یک مدل به صورت سازمان یافته است که بتوان تأثیرات این تغییرات را در خروجی مدل پیش بینی نمود [۱۱]. در مدل بهینه سازی توپولوژی براساس قابلیت اعتماد، متغیرهای پیشنهادی ممکن است نقش مهمی را در تابع شاخص قابلیت اعتماد ایفا کنند، اما این متغیرها لزوماً نقش مشابهی را در تابع هدف ایفا نمی کنند. بنابراین باید حساسیت تابع هدف، با توجه به متغیرهای انتخاب شده بررسی شود [۵]. با انجام تحلیل حساسیت می توان پارامترهایی را که تابع هدف نسبت به آنها مقدار حساسیت کمتری دارد، را به عنوان پارامتر تصادفی در نظر نگرفت و فقط از مقدار میانگین آنها در ادامه روند محاسبات استفاده نمود.

۳-۳-۲- محاسبه شاخص قابلیت اعتماد

استفاده از الگوریتم قابلیت اعتماد مرتبه اول، معمولاً برای توابع حالت حدی که در نزدیکی نقطه ی طراحی خطی می باشند، روشی مناسب است. زمانی که سطح شکست داری انحنای بزرگی باشد، استفاده از الگوریتم قابلیت اعتماد مرتبه اول در جهت برآورد شاخص ایمنی موثر و دقیق نمی باشد، لذا در این مورد استفاده از روش مرتبه دوم پیشنهاد شده است. جهت تحلیل قابلیت اعتماد در این مقاله از هر دو روش قابلیت اعتماد مرتبه اول و دوم استفاده می گردد، بنابراین ابتدا باید شاخص قابلیت اعتماد از روش مرتبه اول محاسبه شود و پس از آن، با استفاده از β_{FORM} و بردار نرمال استخراج شده از آن، شاخص قابلیت اعتماد مرتبه دوم (β_{SORM}) را محاسبه نمود.

براساس روش تقریبی مرتبه اول، شاخص قابلیت اعتماد β_{FORM} با تبدیل به یک مسئله بهینه سازی به صورت زیر انجام می شود:

$$\beta_{(u)} = \min d(u) = \sqrt{\sum u_j^2} \quad \text{Subject to } \beta_{(u)} \geq \beta_t \quad (7)$$

به منظور حل معادله (۷)، از روشی مبتنی بر گرادیان استفاده می شود. اگر از $\beta_{(u)}$ نسبت به مؤلفه های بردار نرمال مشتق گرفته شود، رابطه زیر به دست می آید [۱۲]:

$$\frac{\partial \beta}{\partial u_j} = \frac{1}{2} (\sum u_j^2)^{-0.5} \cdot 2u_j = \frac{u_j}{\beta} = \frac{u_j}{d(u)} \quad (8)$$

بنابراین در طول فرآیند بهینه سازی می توان به طور تحلیلی مشتق فاصله d نسبت به u_j را به وسیله رابطه زیر محاسبه نمود:

$$\frac{\partial d}{\partial u_j} = \frac{u_j}{d(u)} \quad (9)$$

روش محاسبه β_{FORM} به این صورت است که ابتدا یک بردار نرمال اولیه، با توجه به یکسان بودن علامت u_j با گرادینان مربوطه $\partial C / \partial m_{y_j}$ معرفی می شود [5]. سپس با استفاده از رابطه (7) مقدار $d = \beta(u)$ مربوط به این بردار نرمال، محاسبه می شود و این مقدار با شاخص قابلیت اعتماد هدف مقایسه می گردد. اگر اختلاف موجود بزرگتر از یک مقدار معین در نظر گرفته شده (مثلاً 0,001 در اینجا) بود، بردار نرمال U باید بروز رسانی گردد. این چرخه تا زمانی که اختلاف شاخص قابلیت اعتماد محاسباتی و شاخص قابلیت اعتماد هدف کمتر از مقدار تعیین شده شود، ادامه می یابد. بروز رسانی بردار نرمال U در هر چرخه، با استفاده از مشتق به دست آمده از رابطه (9)، که در هر چرخه محاسبه می گردد، به صورت رابطه 10 انجام می شود:

$$U_{k+1} = U_k + \alpha \frac{\partial d}{\partial u_j} \quad (10)$$

در رابطه فوق U بردار نرمال، k شماره تکرار، α طول گام، d فاصله تابع حالت حدی از مبدأ می باشد. در نهایت پس از به دست آمدن شاخص قابلیت اعتماد قابل قبول β_{FORM} ، از بردار نرمال حاصل از آن (U_{FORM})، به منظور ارزیابی بردار متغیرهای تصادفی y ، با استفاده از رابطه (4) استفاده می شود. پس از محاسبه y ، این بردار به عنوان ورودی در مسئله بهینه سازی توپولوژی قطعی استفاده می گردد.

اما در صورت استفاده از روش قابلیت اعتماد مرتبه دوم، پس از همگرایی، شاخص قابلیت اعتماد مرتبه اول محاسبه شده به همراه بردار نرمال استخراج شده از آن، به عنوان پارامترهای ورودی در فرآیند محاسبه شاخص قابلیت اعتماد مرتبه دوم که به مراتب دقیقتر از مرتبه اول است، استفاده می شوند. در این روش، ابتدا مشتق اول و دوم تابع حالت حدی نسبت به تک تک مؤلفه های بردار نرمال به دست آمده از روش قابلیت اعتماد مرتبه اول که با U^* نمایش داده می شود، در نقطه طراحی به دست آمده از روش قابلیت اعتماد مرتبه اول، محاسبه می شود. با توجه به آن که تابع حالت حدی در نظر گرفته شده در این پژوهش، اختلاف بین جابجایی مجاز و جابجایی حداکثر به دست آمده از روش اجزای محدود می باشد، بنابراین تابع صریحی برای محاسبه مشتق وجود ندارد و باید از مشتق عددی استفاده نمود. رابطه زیر مشتق گیری عددی با استفاده از قاعده ریچاردسون، که به منظور بالا بردن دقت فرآیند مشتق گیری، از پنج نقطه استفاده می نماید را ارائه می دهد:

$$\frac{\partial g}{\partial y_j} = \frac{-g(y_j+2h)+8g(y_j+h)-8g(y_j-h)+g(y_j-2h)}{12h} \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y_j^2} = \frac{g(y_j+h)-2g(y_j)+g(y_j-h)}{h^2} \quad (12)$$

که در روابط بالا h مقدار تغییر متغیر، g تابع حالت حدی و y_j متغیر تصادفی زام می باشد. با استفاده از روابط بالا، مشتق اول و دوم تابع حالت حدی نسبت به هر یک از پارامترهای تصادفی در نقطه طراحی به دست آمده از روش قابلیت اعتماد مرتبه اول، محاسبه می گردد. اما در روش قابلیت اعتماد مرتبه دوم، مشتق تابع حالت حدی نسبت به تک تک مقادیر بردار نرمال متغیرهای تصادفی مورد نیاز است. با استفاده از قاعده زنجیره ای مشتق ها که به صورت

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \quad (13)$$

می باشد و رابطه (4)، داریم:

$$u_j = \frac{y_j - m_{y_j}}{\sigma_{y_j}} \Rightarrow y_j = \sigma_{y_j} u_j + m_{y_j} \rightarrow \frac{\partial y_j}{\partial u_j} = \sigma_{y_j} \quad (14)$$

بنابراین، مشتق اول و دوم تابع حالت حدی نسبت به هر یک از مقادیر بردار نرمال متغیرهای تصادفی در نقطه طراحی به دست آمده از روش قابلیت اعتماد مرتبه اول، به صورت زیر به دست می آید:

$$\frac{\partial g}{\partial u_j} = \frac{\partial g}{\partial y_j} \times \sigma_{y_j} \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u_j^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial y_j^2} \times (\sigma_{y_j})^2 \quad (16)$$

که y_j ، z امین متغیر تصادفی با مقدار میانگین m_{y_j} و انحراف استاندارد σ_{y_j} و g تابع حالت حدی می‌باشد.

در گام بعدی، α بردار حساسیت تابع حالت حدی در نقطه طراحی به دست آمده از روش قابلیت اعتماد مرتبه اول و ماتریس هسین

H به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\alpha = \frac{\nabla g(U^*)}{|\nabla g(U^*)|} \quad (17)$$

$$H = \frac{\nabla^2 g(U^*)}{|\nabla g(U^*)|} \quad (18)$$

که در آن:

$$\nabla g(U^*) = \left[\frac{\partial g}{\partial u_1} \quad \frac{\partial g}{\partial u_2} \quad \dots \quad \frac{\partial g}{\partial u_j} \right]^t \quad (19)$$

$$|\nabla g(U^*)| = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial g}{\partial u_j}\right)^2} \quad (20)$$

$$\nabla^2 g(U^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial u_1^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial u_1 \partial u_2} & \dots & \frac{\partial^2 g}{\partial u_1 \partial u_j} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Sym} & \dots & \dots & \frac{\partial^2 g}{\partial u_j^2} \end{bmatrix} \quad (21)$$

در روابط بالا $\nabla g(U^*)$ بردارگرادیان، متشکل از مشتقات مرتبه اول تابع حالت حدی نسبت به بردار نرمال و $|\nabla g(U^*)|$ مقدار این

بردار می‌باشد. $\nabla^2 g(U^*)$ یک ماتریس متقارن متشکل از مشتقات مرتبه دوم تابع حالت حدی نسبت به بردار نرمال در نقطه طراحی می‌باشد.

z نیز تعداد متغیرهای تصادفی نرمال می‌باشد.

در این پژوهش برای محاسبه شاخص قابلیت اعتماد مرتبه دوم از رابطه زیر استفاده می‌گردد [۱۳]:

$$\beta_{SORM} = \left(1 - \frac{k_s}{3\beta_{FORM} + 3(n-1)/k_s + 1}\right) \beta_{FORM} + \frac{1}{2}k_s \quad k_s \geq 0$$

$$\beta_{SORM} = \left(1 - \frac{k_s^2}{3(n-\beta_{FORM}+3)}\right) \beta_{FORM} + \frac{1}{2}k_s \quad k_s < 0$$

$$k_s = \sum_{i=1}^n h_{ii} - \alpha^T H \alpha \quad (22)$$

که در آن n تعداد پارامترهای تصادفی نرمال، h_{ii} درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس هسین و α بردار حساسیت مطابق رابطه (۱۷)

می‌باشد. سپس بردار نرمال متغیرهای تصادفی مربوط به تحلیل قابلیت اعتماد مرتبه دوم (U_{SORM}) به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$U_{SORM} = \alpha \times \beta_{SORM} \quad (23)$$

که α بردار حساسیت و β_{SORM} شاخص قابلیت اعتماد مرتبه دوم می‌باشد.

به منظور ارضای قید شاخص قابلیت اعتماد در فرآیند بهینه سازی توپولوژی براساس قابلیت اعتماد، همانند روش FORM از روش

مبتنی بر گرادیان استفاده می‌گردد. یعنی با استفاده از بردار نرمال U_{SORM} به دست آمده و روابط (۹) و (۱۰)، تا زمان ارضای قید شاخص

قابلیت اعتماد، چرخه‌ای تشکیل می‌گردد که در هر چرخه بردار نرمال U_{SORM} و شاخص قابلیت اعتماد β_{SORM} جدیدی تولید می‌شود. در

نهایت پس از به دست آمدن شاخص قابلیت اعتماد قابل قبول β_{SORM} ، از بردار نرمال حاصل از آن (U_{SORM})، به منظور ارزیابی بردار متغیرهای

تصادفی y ، با استفاده از رابطه (۴) استفاده می‌شود. پس از محاسبه y ، از این بردار به عنوان ورودی در مسئله‌ی بهینه‌سازی توپولوژی قطعی استفاده می‌شود.

۳-۳-۳- فرآیند بهینه‌سازی توپولوژی

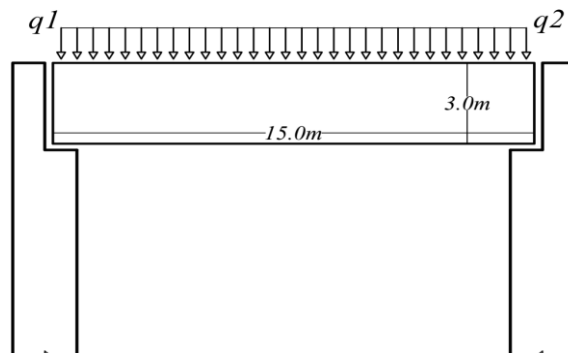
پس از برآورده شدن قیود قابلیت اعتماد و مشخص کردن بردار متغیرهای تصادفی y ، فرآیند بهینه‌سازی توپولوژی با یک مجموعه جدید از مقادیر تصادفی فراخوانده می‌شود. بنابراین نتایج توپولوژی بهینه اصولاً به مقدار شاخص قابلیت اعتماد بستگی دارد [۵]. روش بهینه‌سازی استفاده شده برای بروز کردن متغیر طراحی x ، روش معیار بهینگی می‌باشد. در ادامه با توجه به فرآیند شرح داده شده، بهینه‌سازی توپولوژی براساس قابلیت اعتماد در دو سازه پل مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۴- مثال‌های نمونه

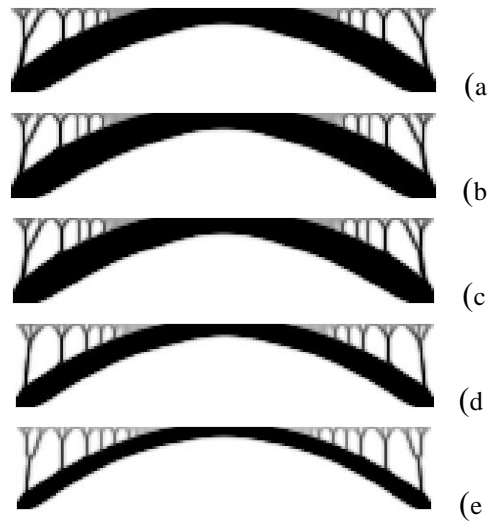
در این مثال‌ها از روش بهینه‌سازی SIMP با هدف کمینه‌سازی نرمی برای بهینه‌سازی توپولوژی و از روش قابلیت اعتماد مرتبه اول و دوم به منظور تحلیل قابلیت اعتماد استفاده می‌شود، به نحوی که ابتدا توپولوژی بهینه براساس قابلیت اعتماد برای عرشه یک پل سواره رو و پس از آن برای یک پل عابر اعمال گردیده و سپس نتایج مورد تحلیل و بررسی می‌گردند.

۴-۱- پل سواره رو

مطابق شکل ۲، عرشه پل سواره رو با ارتفاع ۳ متر که دهانه‌ای به طول ۱۵ متر را پوشش می‌دهد، بر روی کوله‌ها قرار گرفته است. سازه پل تحت بار گسترده $q=15 \text{ KN/m}^2$ قرار گرفته است. با توجه به اینکه در روی پل، بار وارده در ابتدا و انتهای پل ممکن است در هر لحظه یکسان نباشد، در این مثال هر کدام از بارهای ابتدا و انتهای پل (q_1 و q_2) به طور مستقل به عنوان پارامترهای تصادفی انتخاب شده‌اند که برای یک متر عرض پل $q_1=q_2=15 \text{ KN/m}$ می‌باشد. ناحیه‌ی طراحی به 4500 المان چهارضلعی مربعی تنش مسطح گسسته‌سازی شده است. مدول یانگ $E=207 \text{ GPa}$ و ضریب پواسون $\nu=0.3$ در نظر گرفته شده‌اند و تنها استفاده از ۴۰ درصد مصالح مجاز خواهد بود. علاوه بر بارگذاری، پارامترهای کسر حجم و مدول یانگ نیز به عنوان متغیرهای تصادفی در نظر گرفته می‌شوند تا تأثیر تعداد پارامترهای عدم قطعیت بر روی توپولوژی بهینه نیز بررسی گردد. پارامترهای عدم قطعیت با داشتن توزیع نرمال، با ۱۰ درصد واریانس از مقدار متوسط در نظر گرفته شده‌اند. همچنین جابجایی مجاز برای تابع حالت حدی برابر 0.085 متر، ضخامت 0.1 متر و شعاع فیلتر برابر 0.12 متر فرض می‌شود. توپولوژی‌های بهینه در شکل ۳ نمایش داده شده و نتایج در جدول ۱ ارائه شده‌اند.



شکل ۲: ناحیه طراحی و بارگذاری مثال ۴-۱؛ عرشه پل سواره رو



شکل ۳: نتایج توپولوژی بهینه عرشه پل سواره رو؛ شکل a: نتیجه DTO، شکل b: نتیجه FORM با عدم قطعیت بارگذاری، شکل c: نتیجه SORM با عدم قطعیت بارگذاری، شکل d: نتیجه FORM با عدم قطعیت‌های بارگذاری، مدول یانگ و کسر حجم، شکل e: نتیجه SORM با عدم قطعیت‌های بارگذاری، مدول یانگ و کسر حجم.

جدول ۱: نتایج مثال ۴-۱

	DTO	FORM با عدم قطعیت	SORM با عدم قطعیت	FORM با عدم قطعیت‌های	SORM با عدم قطعیت‌های	
		های q_1, q_2	های q_1, q_2	q_1, q_2, E, f	q_1, q_2, E, f	
L	۱۵	۱۵	۱۵	۱۵	۱۵	
H	۳	۳	۳	۳	۳	
T	۰,۱	۰,۱	۰,۱	۰,۱	۰,۱	
ورودی	E	2.07×10^9	2.07×10^9	$1.65, 6 \times 10^9$	$1.80, 2 \times 10^9$	
	q_1	۱۵۰۰۰	۱۹۲۴۳	۱۸۰۰۰	۱۵۶۴۸	
	q_2	۱۵۰۰۰	۱۹۲۴۳	۱۸۰۰۰	۱۵۶۴۸	
	f	۰,۴۰	۰,۴۰	۰,۴۰	۰,۳۲	۰,۲۴۵
نتایج	U_E	-	-	-۲,۰۰	-۱,۲۹۵	
	U_{q_1}	-	۲,۸۲۸۷	۲,۸۲۸۷	۰,۴۳۱۷	
	U_{q_2}	-	۲,۸۲۸۷	۲,۸۲۸۷	۰,۴۳۱۷	
	U_f	-	-	-۲,۰۰	-۳,۸۸۵۱	
	Beta	-	۴,۰۰۰۵	۴,۰۰۰۵	۴,۰۰۰۰	۴,۰۰۰۸
	Volume	۱,۸۰	۱,۸۰	۱,۸۰	۱,۴۴	۱,۱۰
	Compliance γ	۲۹۷۸۴۰۳,	۴۹۱۲۵۳۴,۷	۴۹۱۲۵۳۴,۷	۶۳۹۰۰۳۴,۰	۵۷۵۹۶۳۷,۹
	Iteration	۱۰۸	۸۶	۸۶	۵۰	۱۴۵
	Time (s)	۳۰۴,۱۱	۲۴۰,۸۶	۳۷۵,۱۰	۲۰۶,۵۱	۸۰۷,۸۲

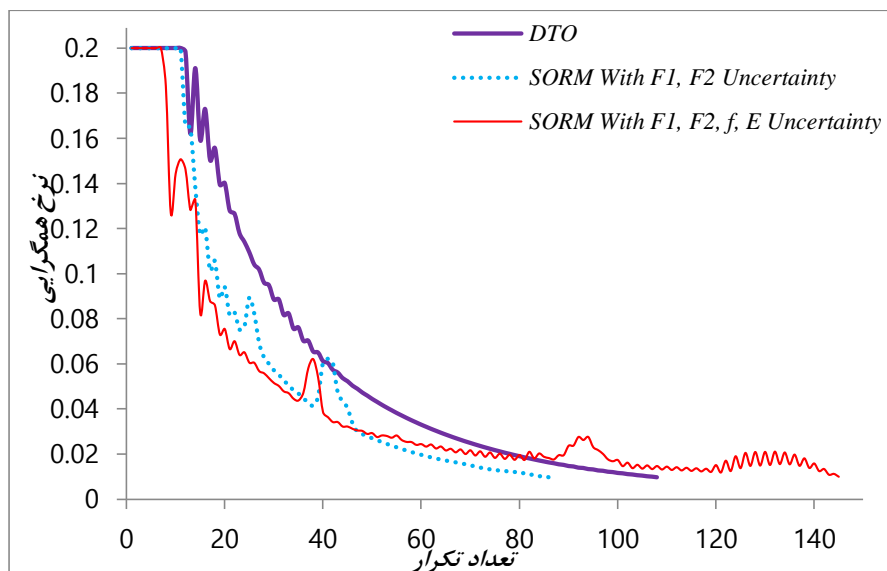
تمامی واحدهای به کار رفته در جدول بر حسب نیوتن، متر و ثانیه هستند.

با توجه به جدول ۱، در حالتی که فقط بارگذاری به عنوان پارامتر تصادفی در نظر گرفته شده است، در هر دو روش مرتبه اول و دوم، نتایج بردار نرمال متغیرهای تصادفی و به تبع آن، بردار متغیرهای تصادفی یکسان شده است و بنابراین مقادیر نرمی، حجم و تعداد تکرار نیز با یکدیگر برابر می‌باشند. اما زمان محاسبات در روش مرتبه دوم بیشتر از روش مرتبه اول می‌باشد.

همان طور که مشاهده می‌گردد توپولوژی‌های به دست آمده براساس قابلیت اعتماد و نتایج مقادیر نرمی آنها از توپولوژی‌های به دست آمده قطعی متفاوت هستند؛ بدین صورت که مقادیر نرمی به دست آمده از هر دو روش قابلیت اعتماد مرتبه اول و دوم، از روش بهینه سازی توپولوژی قطعی بزرگتر می‌باشند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که هر دو روش قابلیت اعتماد مرتبه اول و دوم، نسبت به بهینه سازی توپولوژی قطعی، سازه‌های قابل اعتمادتر اما با مقدار نرمی بیشتر را نتیجه می‌دهند. به علاوه، در هر دو روش قابلیت اعتماد مرتبه اول و دوم، با افزایش تعداد پارامترهای عدم قطعیت نرمی نیز افزایش می‌یابد.

به غیر از موارد خاص، در بیشتر موارد، بردار نرمال به دست آمده از روش‌های قابلیت اعتماد مرتبه اول و مرتبه دوم با یکدیگر متفاوتند. این اختلاف ناشی از آن است که در روش قابلیت اعتماد مرتبه اول، تابع حالت حدی به صورت یک خط تقریب زده شده و کمترین فاصله مبدأ از آن به عنوان شاخص قابلیت اعتماد شناخته می‌شود؛ اما در روش قابلیت اعتماد مرتبه دوم، تابع حالت حدی به صورت یک منحنی تقریب زده شده و به طور معمول نقطه‌ای از منحنی که دارای کمترین فاصله از مبدأ باشد، دارای مختصات متفاوتی نسبت به روش قابلیت اعتماد مرتبه اول می‌باشد. با توجه به منحنی بودن تابع حالت حدی در روش قابلیت اعتماد مرتبه دوم، به طور حتم تحلیل قابلیت اعتماد از این روش بسیار دقیق‌تر و معتبرتر می‌باشد و به تبع آن نتایج بهینه سازی نیز به نسبت دقیق‌تر و با عدم قطعیت موجود سازگارتر می‌باشند [۱۴].

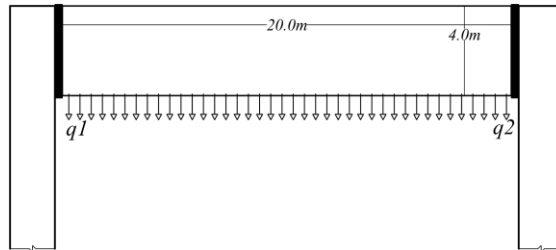
در ضمن، از نتایج توپولوژی‌های ارائه شده در شکل ۳، می‌توان در مراحل اولیه طراحی پل در جهت شناخت فرم کلی سازه بهره‌مند شد. در ادامه، در شکل ۴، نمودار نرخ همگرایی در تکرارهای مختلف برای روش قابلیت اعتماد مرتبه دوم و روش بهینه سازی توپولوژی قطعی ارائه گردیده است.



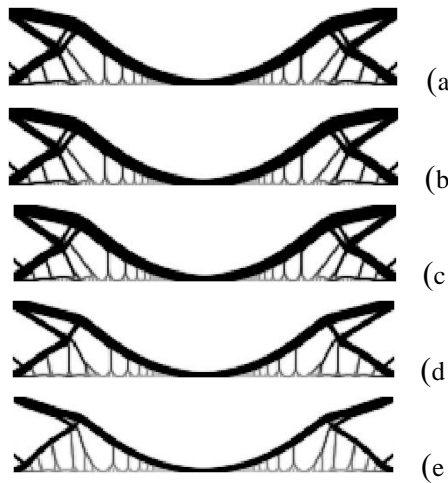
شکل ۴: نمودار نرخ همگرایی بر حسب تعداد تکرار در مثال عرشه پل سواره رو

۲-۴- پل عابر

در این بخش، مثال قسمت قبل برای یک پل عابر بررسی می‌شود. شکل ۵، ناحیه طراحی اولیه یک پل عابر به طول ۲۰ متر، عرض ۲ متر و ارتفاع ۴ متر را که به پایه های اطرافش متصل شده است، را نمایش می‌دهد. پل تحت بار گسترده $q=4 \text{ KN/m}^2$ قرار گرفته است که برای یک متر عرض پل $q_1=q_2=4 \text{ KN/m}$ می‌باشد. ناحیه طراحی به 8000 المان چهارضلعی مربعی تنش مسطح گسسته‌سازی شده است. تنها استفاده از ۳۰ درصد مصالح مجاز خواهد بود و جابجایی مجاز برای تابع حالت حدی برابر 0.1 متر فرض می‌شود. سایر مشخصات این مثال همانند مثال پل سواره رو می‌باشد. توپولوژی‌های بهینه در شکل ۶ نشان داده شده و نتایج در جدول ۲ ارائه شده‌اند.



شکل ۵: ناحیه طراحی و بارگذاری مثال ۲-۴: پل عابر



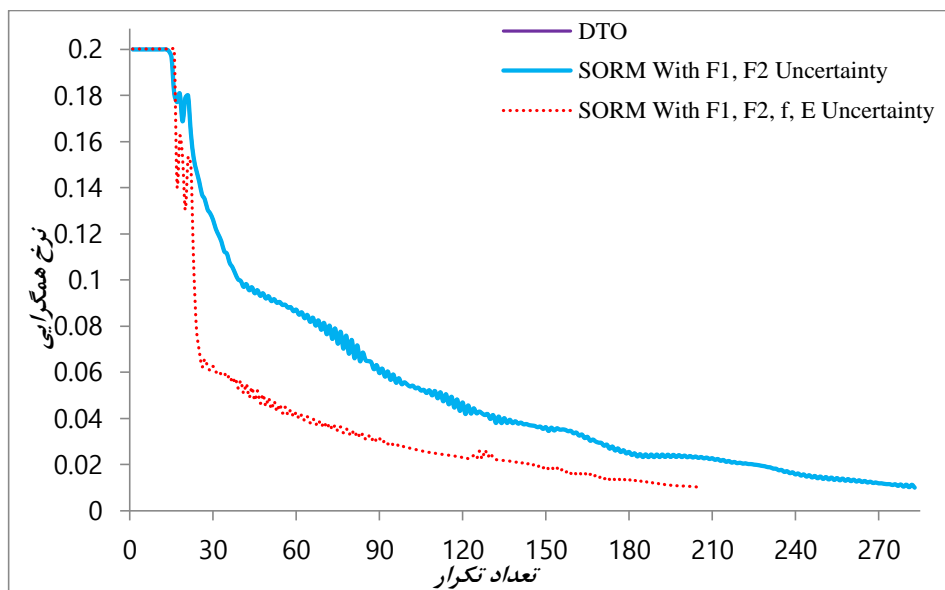
شکل ۶: نتایج توپولوژی بهینه پل عابر؛ شکل a: نتیجه DTO، شکل b: نتیجه FORM با عدم قطعیت بارگذاری، شکل c: نتیجه SORM با عدم قطعیت بارگذاری، شکل d: نتیجه FORM با عدم قطعیت های بارگذاری، مدول یانگ و کسر حجم، شکل e: نتیجه SORM با عدم قطعیت های بارگذاری، مدول یانگ و کسر حجم.

جدول ۲: نتایج مثال ۴-۲

	DTO	FORM با عدم قطعیت‌های q_1, q_2	SORM با عدم قطعیت‌های q_1, q_2	FORM با عدم قطعیت‌های q_1, q_2, E, f	SORM با عدم قطعیت‌های q_1, q_2, E, f
L	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰
H	۴	۴	۴	۴	۴
T	۰,۱	۰,۱	۰,۱	۰,۱	۰,۱
ورودی E	۲۰۷×10^{-9}	۲۰۷×10^{-9}	۲۰۷×10^{-9}	$۱۶۵,۶ \times 10^{-9}$	$۱۸۲,۲ \times 10^{-9}$
q_1	۴۰۰۰	۵۱۳۱,۵	۵۱۳۱,۵	۴۸۰۰	۴۱۷۲,۷
q_2	۴۰۰۰	۵۱۳۱,۵	۵۱۳۱,۵	۴۸۰۰	۴۱۷۲,۷
f	۰,۳۰۰	۰,۳۰۰	۰,۳۰۰	۰,۲۴۰	۰,۱۸۳
U_E	-	-	-	-۲,۰۰۰	-۱,۲۹۵
U_{q_1}	-	۲,۸۲۸۷	۲,۸۲۸۷	۲,۰۰۰	۰,۴۳۱۷
U_{q_2}	-	۲,۸۲۸۷	۲,۸۲۸۷	۲,۰۰۰	۰,۴۳۱۷
U_f	-	-	-	-۲,۰۰۰	-۳,۸۸۵۱
Beta	-	۴,۰۰۰۵	۴,۰۰۰۵	۴,۰۰۰۰	۴,۰۰۰۸
نتایج Volume	۲,۴۰	۲,۴۰	۲,۴۰	۱,۹۲	۱,۴۷
Compliance	۵۴۶۱۱۴,۵	۸۹۸۷۷۷,۶	۸۹۸۷۷۷,۶	۱۲۹۴۱۰۶,۲	۱۳۱۴۹۴۸,۲
Iteration	۲۸۳	۲۸۳	۲۸۳	۴۱۳	۲۰۵
Time (s)	۱۹۸۴,۸۰	۲۰۶۴,۱۹	۲۲۸۸,۹۴	۲۷۹۰,۴۳	۲۴۸۸,۳۳

تمامی واحدهای به کار رفته در جدول بر حسب نیوتن، متر و ثانیه هستند.

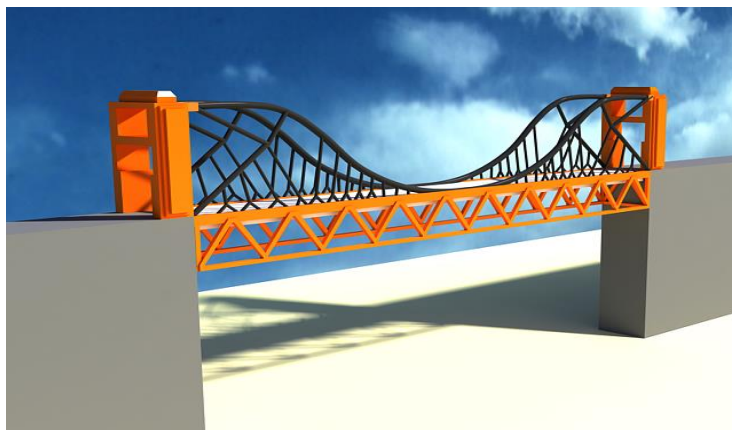
با توجه به جدول ۲، تمامی نتایج مثال عرشه پل سواره رو در این مثال نیز صادق است. می توان مشاهده کرد که تعداد تکرارها در بهینه سازی توپولوژی قطعی با حالت هایی که فقط بارگذاری به عنوان پارامتر تصادفی در نظر گرفته شده است، یکسان است، اما زمان محاسبات در روش قابلیت اعتماد مرتبه دوم از همه بیشتر و در بهینه سازی توپولوژی قطعی از بقیه کمتر می باشد.



شکل ۷: نمودار نرخ همگرایی بر حسب تعداد تکرار در مثال پل عابر

با توجه به شکل ۷ که نمودار نرخ همگرایی در تکرارهای مختلف را نشان می دهد، منحنی مربوط به بهینه سازی توپولوژی قطعی و روش قابلیت اعتماد مرتبه دوم (و همچنین روش قابلیت اعتماد مرتبه اول) برای حالتی که فقط بارگذاری به عنوان متغیر تصادفی انتخاب شده است، کاملاً بر هم منطبق اند؛ این در حالیست که در مثال پل سواره رو این طور نبود. علت این اختلاف را می توان به شرایط مرزی متفاوت نسبت داد، یعنی می توان ثابت کرد که در حالت تیر دو سر گیردار تحت بار گسترده (مانند پل عابر)، با تغییر در مقدار بارگذاری نرخ همگرایی و تعداد تکرار بهینه سازی ثابت می ماند.

از نتایج توپولوژی این مثال در شکل ۶ نیز می توان در طراحی پل عابر، در مراحل اولیه طراحی بهره مند شد. مثلاً به این نکته پی برد که در طراحی پل عابر می توان از کابل های پر مقاومت استفاده نمود؛ بدین صورت که در دو سمت عرض پل، کابل هایی به صورت نمایش داده شده در شکل ۶ طراحی شود؛ شکل ۸ می تواند نمایش شماتیکی از این پل باشد. بنابراین از بهینه سازی توپولوژی سازه ها براساس قابلیت اعتماد، می توان در فاز اولیه طراحی سازه ها برای یافتن فرم بهینه سازه که به طرحی با قابلیت اعتماد مناسب منجر شود استفاده نمود.



شکل ۸: نمایش شماتیک پل عابر طراحی شده از توپولوژی براساس قابلیت اعتماد [۱۴].

۵- نتیجه گیری

در این پژوهش، بهینه سازی توپولوژی براساس قابلیت اعتماد در سازه پل با هدف کمینه سازی نرمی انجام گرفت و مشخص شد که مقادیر نرمی به دست آمده از هر دو روش قابلیت اعتماد مرتبه اول و دوم، از روش بهینه سازی توپولوژی قطعی بزرگتر می باشند. به عبارت دیگر، بهینه سازی توپولوژی براساس قابلیت اعتماد نسبت به بهینه سازی توپولوژی قطعی، سازه های قابل اعتمادتر اما با مقدار نرمی بیشتر نتیجه می دهند. در ضمن، پس از تغییر در تعداد پارامترهای تصادفی مشخص شد که در هر دو روش قابلیت اعتماد مرتبه اول و دوم، با افزایش تعداد پارامترهای عدم قطعیت نرمی افزایش می یابد.

با بررسی های به عمل آمده مشخص شد که به طور معمول، بردار نرمال به دست آمده از روش های قابلیت اعتماد مرتبه اول و مرتبه دوم با یکدیگر متفاوتند. این اختلاف ناشی از آن است که در روش قابلیت اعتماد مرتبه اول، تابع حالت حدی به صورت یک خط تقریب زده شده اما در روش قابلیت اعتماد مرتبه دوم، تابع حالت حدی به دقت بیشتر به صورت یک منحنی تقریب زده می شود. با توجه به منحنی بودن تابع حالت حدی در روش قابلیت اعتماد مرتبه دوم، به طور حتم انجام تحلیل قابلیت اعتماد با این روش دقیق تر و معتبرتر می باشد و به تبع آن نتایج بهینه سازی نیز به نسبت دقیق تر می باشند. همچنین در حالتی که تعداد تکرار برابر اتفاق بیافتد، زمان محاسبات در روش مرتبه دوم به دلیل محاسبه ی شاخص قابلیت اعتماد مرتبه دوم، بیشتر می باشد و طبیعتاً این زمان در بهینه سازی توپولوژی قطعی از همه کمتر می باشد. طبق نتایج به دست آمده در حالت تیر دو سر گیردار تحت بار گسترده (مانند پل عابر)، با تغییر در مقدار بارگذاری، نرخ همگرایی و تعداد تکرار بهینه سازی ثابت می ماند، اما اگر شرایط تکیه گاهی تغییر نماید دیگر این نتیجه پابرجا نخواهد بود. ضمناً از شکل های

به دست آمده از توپولوژی‌های بهینه براساس قابلیت اعتماد می‌توان در مرحله‌ی اولیه طراحی سازه‌ها برای یافتن فرم کلی و قابل اعتماد سازه‌ها استفاده نمود.

مراجع

- [1] Christensen, P. W. and Klarbring, A.; "An introduction to structural optimization"; 5th edition, Springer. (2009)
- [۲] حسینی، ب؛ و قاسم نژاد مقری، ح؛ « بهینه سازی توپولوژیک لایه تقویتی سازه‌های صفحه‌ای با استفاده از قید تنش»؛ هشتمین کنگره بین‌المللی مهندسی عمران، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران، ۲۳-۲۱ اردیبهشت ۱۳۸۸.
- [3] Bendsoe, M. P. and Sigmund, O.; "Topology optimization: theory, methods and applications"; 2nd edition, Springer, Berlin. (2002).
- [4] Nowak, A. S. and Collins, K. R.; "Reliability of Structures"; 2nd edition, Boston, McGraw-Hill. (2000).
- [5] Kharmanda, G., Olhoff, N., Mohamed, A. and Lemaire, M.; "Reliability-based topology optimization"; *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 26 (5), (2004) 295-307.
- [6] Kim, C., Wang, S., Bae, K. R., Moon, H. and Choi, K. K.; "Reliability-based topology optimization with uncertainties"; *Journal of mechanical science and technology*, 20 (4), (2006) 494-504.
- [7] Jung, H. S., and Cho, S.; "Reliability-based topology optimization of geometrically nonlinear structures with loading and material uncertainties"; *Finite elements in analysis and design*, 41 (3), (2004) 311-331.
- [8] Kim, S. R., Park, J. Y., Lee, W. G., Yu, J. S. and Han, S. Y.; "Reliability-based topology optimization based on evolutionary structural optimization"; *International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering*, 1 (8), (2007) 135-139.
- [9] Yoo, K. S., Eom, Y. S., Park, J. Y., Im, M. G. and Han, S. Y.; "Reliability-based topology optimization using successive standard response surface method"; *Finite Elements in Analysis and Design*, 47 (7), (2011) 843-849.
- [10] Luo, Y., Zhou, M., Yu Wang, M. and Deng, Z.; "Reliability based topology optimization for continuum structures with local failure constraints"; *Computers & Structures*, 143, (2014) 73-84.
- [11] Saltelli, A., Ratto, M., Andres, T., Campolongo, F., Cariboni, J., Gatelli, D., Saisana, M., and Tarantola, S.; "Global sensitivity analysis: the primer"; 1st edition, John Wiley & Sons. (2008).
- [12] Zhang, X., and Ouyang, G.; "A level set method for reliability-based topology optimization of compliant mechanisms"; *Science in China Series E: Technological Sciences*, 51(4), (2008) 443-455.
- [13] Zhao, Y. G., and Ono, T.; "New approximations for SORM: Part 1"; *Journal of engineering mechanics*, 125(1), (1999) 79-85.
- [14] Johari, M.; "Reliability-based topology optimization of continuum structures under static loads"; M. Eng. dissertation, Yazd University, Yazd, Iran. (2015).