

## بکارگیری روش اجزای محدود تطابقی در مسائل گسترش ترک با تخمین خطای ضریب شدت تنش

علیرضا حکیمی<sup>۱\*</sup>، حمید مسلمی<sup>۲</sup>

۱- کارشناس ارشد مهندسی سازه، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه آزاد اسلامی قزوین

۲- استادیار، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه شاهد

### چکیده

امروزه استفاده از روش‌های عددی به ویژه روش اجزای محدود، در حل مسائل متفاوت کاربرد فراوانی دارد. از آنجا که این روشها تقریبی هستند، داشتن درکی واقعی از میزان و نحوه توزیع خطاها اهمیت بسیار زیادی دارد. بررسی‌ها نشان می‌دهد که شبکه مورد استفاده در روش اجزای محدود نقش بسیار اساسی در میزان خطای روش خواهد داشت. بنابراین روش‌های مختلفی برای یافتن شبکه بهینه و کاستن خطای روش پیشنهاد شده است. این روشها عمدتاً هدف را بر کاستن خطا در میدان تنش به دست آمده قرار داده‌اند. هر چند کاهش خطای میدان تنش یکی از اهداف روش اجزای محدود تطابقی می‌باشد، ولی تضمینی برای رسیدن به اهداف در مسائل خاص مورد نظر نمی‌باشد. از جمله این مسائل می‌توان به مسائل تحلیل ترک اشاره نمود که در تحلیل الاستیک آن پارامتر ضریب شدت تنش نقشی کلیدی در تعیین مسیر ترک و طراحی مربوطه خواهد داشت. در این تحقیق هدف این است که معیار آنالیز تطابقی بر روی پارامتر ضریب شدت تنش قرار گیرد تا به جای اصلاح پارامترهای جانبی نظیر کرنش به اصلاح پارامتر هدف یعنی ضریب شدت تنش بپردازیم.

**کلمات کلیدی:** ضریب شدت تنش، تخمین خطا، روش اجزای محدود تطابقی، گسترش ترک

## Modeling of Analysis Craek using Adaptive Finite Element Method via Stress Intensity Factor Error Estimation

Alireza Hakimi<sup>\*1</sup>, Hamid Moslemi<sup>2</sup>

1- MSc Structural Engineering, Department of Civil Engineering, Islamic Azad University, Qazvin Branch

2- Assistant Professor, Department of Civil Engineering, University Shahed

### Abstract

*The use of numerical methods, particularly finite element methods in solving different problems are used in abundance. Because these methods are approximate, having a real understanding of the extent and distribution of the errors is extremely important. Studies show that the mesh used in the finite element method will be an essential error rate. So many different ways to find the optimal mesh and minimize the error of the proposed method. These methods are mainly aimed at reducing the error in the stress field have been obtained. Although one of the aims of reducing errors tension field finite element method is adaptive, but no guarantee is intended to achieve specific issues. These issues can be Craek to the issues noted in the analysis of the elastic parameters of*

\* مؤلف مسئول: Alireza.ha66@gmail.com

تاریخ دریافت مقاله: ۹۳/۱۱/۵، تاریخ پذیرش مقاله: ۹۴/۹/۳

*the stress intensity factor will play a key role in determining the direction and Craek the design. The purpose of this study is to measure the stress intensity factor adaptive analysis on the parameter to be modified to accommodate ancillary parameters such as strain, stress intensity factor able to modify the target parameter.*

**Keywords:** Adaptive finite element method, Analysis cracks, Stress intensity factor, Parameter estimation error

## ۱- مقدمه

همگام با رشد علوم و فناوری، مسائل مهندسی نیز روز به روز پیچیده‌تر می‌شوند. با پیچیده‌تر شدن مسائل و لزوم حل سریع‌تر و دقیق‌تر آن‌ها، روش‌های تحلیلی، دیگر جوابگوی نیازهای روز افزون جوامع نیستند. با چنین نگرشی، محققان همواره سعی میکنند در کنار توسعه مبانی علوم، روشهای عددی را نیز توسعه بخشند. روش اجزای محدود، یکی از روشهایی است که کاربرد فراوانی در حل مسائل بسیاری از رشته‌های مهندسی و به خصوص مسائل مکانیک جامدات دارد و در چند دهه گذشته به عنوان یکی از دروس دانشگاهی در بسیاری از رشته‌های مهندسی آموزش داده می‌شود. با توجه به استفاده بسیار وسیع از این روش در نرم افزارهای تجاری تحلیل و طراحی مهندسی و نظر به اینکه عدم توجه به تقریبی بودن آن می‌تواند منجر به نتایج کاملاً اشتباه و بعضاً فاجع بار گردد، پرداختن به موضوع مهم بررسی خطاها و گنجاندن مباحث برآورد خطا و حل تطابقی در سر فصل دروس دانشگاهی و نیز دوره‌های آموزشی از اهمیت بسیار زیادی برخوردار می‌باشد که متأسفانه از آن غفلت شده است. ریشه‌های توسعه این روش را باید در اوایل دهه ۱۹۴۰ میلادی جستجو کرد روشهای اجزای محدود به شکل امروزی آن، ریشه در کارهای ترنر و همکاران وی در سال ۱۹۵۷ دارد. در سال ۱۹۶۰، کلاف نام اجزای محدود را بر این روش نهاد. کاربرد این روش برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای در سال ۱۹۶۵ توسط زینکوویچ و چونگ پیشنهاد شد [۱]. از همان آغاز مدلسازی رخدادهای فیزیکی توسط کامپیوتر و شکل‌گیری مبانی اجزای محدود، وجود خطاهای عددی در محاسبات، منشأ اصلی نگرانی بوده است. از اولین مقاله‌هایی که در آن مسأله تخمین خطا مطرح گردید، می‌توان به مقاله‌هایی که توسط ریچاردسون در سال ۱۹۱۰ نوشته شده اشاره کرد. کار اصلی در تخمین خطا در سال ۱۹۷۸ و توسط بابوشکا و رینبولت آغاز شد. روش آنها بر این اساس بود، که باقیمانده را در یک گروه از المانها و یا یک المان تنها مورد بررسی قرار میدادند و به کمک آن می‌توانستند خطا را تخمین بزنند [۲]. در سال ۱۹۸۷ زینکوویچ و زو روشی برای برآورد خطا بر اساس بازیافت تنشها پیشنهاد کردند [۳]. همین محققین در همان سال روش ساده ای برای تخمین خطای کلی و محلی در حل المانهای محدود و شکلی ساده از آنالیز تطابقی برای به روش  $h$  ارائه کردند [۳]. در ادامه، این دو محقق در سال ۱۹۹۲ روش SPR را در برآورد خطای حل المانهای محدود و آنالیز تطابقی، طی دو مقاله معروف، معرفی کردند [۴، ۵]. تحقیق حاضر سعی کرده است تا خواننده را با اصول روش تخمین خطا، آشنا سازد و همچنین چگونگی حل تطابقی در روش اجزای محدود را بیان کند و در نهایت با ارائه یک روش با قابلیت اطمینان بالا و دقت کنترل شده به تعیین ضریب شدت تنش صفحات ترکدار تحت کشش پردازد. به این منظور برنامه‌های کامپیوتری توسط اینجانب نوشته شده است که قادر به تخمین خطای تحلیل اجزای محدود و تولید شبکه تطابقی می‌باشد، برای آنالیز مدل به نرم افزار Ansys انتقال یافته است.

## ۲- روش‌های برآورد خطا مبتنی بر بازیافت تنش

به طور کلی می‌توان گفت که بازیافت تنش، روشی است که هدف از آن بالا بردن دقت، و هموار نمودن میدان تنش به دست آمده از حل اجزای محدود است. در این روش، با استفاده از حل اجزای محدود، تابع مورد نظر را در نقاط خاصی که دقت بالاتری نسبت به سایر نقاط و گرہها دارند به دست آورده و از آنها در به دست آوردن مقادیر بهبود یافته استفاده می‌کنیم. لازم به یادآوری است که با به دست آوردن مقادیر بهبود یافته تنش در نقاط خاص مذکور در بالا، به راحتی میتوان تنش بهبود یافته در هر نقطه دیگر، و به ویژه نقاط گرهی را به وسیله درونبایی با استفاده از توابع شکل المانها در رابطه (۱) به دست آورد [۶]:

$$\sigma^* = N \bar{\sigma}^* \quad (1)$$

$\sigma^*$  را طوری تعریف می‌کنیم که خطای هموار سازی روی کل دامنه صفر شود. تابع وزنی این خطا را نیز همان توابع شکل در نظر می‌گیریم.

$$\int_{\Omega} N^T (\sigma^* - \hat{\sigma}) d\Omega \quad (2)$$

با جایگذاری  $\sigma^*$  از رابطه اولی مقدار  $\bar{\sigma}^*$  به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\bar{\sigma}^* = A^{-1} \int_{\Omega} N^T \hat{\sigma} d\Omega \quad (3)$$

که در آن بردار ضرایب  $A$  به صورت زیر می‌باشد:

$$A = \int_{\Omega} N^T N d\Omega \quad (4)$$

توابع شکل مورد استفاده در المان است.  $N$  مقادیر مربوط به نقاط با دقت بالاتر و  $\bar{\sigma}^*$  که در روابط فوق با استفاده از این میدان بهبود یافته خطای بازیافت بصورت رابطه (5) تعریف می‌شود:

$$e_{\sigma} \approx \sigma^* - \hat{\sigma} \quad (5)$$

که در رابطه بالا  $\hat{\sigma}$  تنش ناشی از تحلیل متعارف اجزای محدود میباشد. روشهای متعددی برای بازیافت تنش از حل اجزای محدود وجود دارد که از آن میان میتوان به روش میانگین گیری، روش تصویر  $L_2$  و روش استفاده از نقاط فوق همگرا اشاره کرد. تعریف فوق مقدار خطای برآورد شده را در تک تک نقاط دامنه می‌دهد، ولی برای ریز سازی شبکه معیار مناسبی نمی‌باشد. چرا که ممکن است در یک نقطه خاص مثل نوک ترک تنش به سمت بی‌نهایت برود که خطا در این نقطه بسیار بالا خواهد بود ولی در مجموع خطای کل جواب قابل قبول باشد. از این رو به جای خطای نقطه به نقطه نرم خطا تعریف می‌شود که به صورت انتگرال عددی از تابع خطا روی دامنه است. یکی از معروفترین نرم‌های خطا، نرم  $L_2$  می‌باشد که در واقع همان جذر مربعات، ولی به صورت تابع پیوسته می‌باشد. به این ترتیب نرم  $L_2$  تابع خطای تنش برابر خواهد بود با:

$$\|e_{\sigma}\| = \|\sigma^* - \hat{\sigma}\| = \left( \int_{\Omega} (\sigma^* - \hat{\sigma})^T (\sigma^* - \hat{\sigma}) d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

نرم خطای فوق برای کل دامنه محاسبه شده است، ولی می‌توان آن را روی یک المان تنها نیز محاسبه نمود. از تعریف نرم خطا واضح است که مجموع مربعات نرم خطای کلیه المانها برابر مربع نرم خطای کل دامنه خواهد شد. بنابراین اگر کل المانها را با  $m$  نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$\|e_{\sigma}\|^2 = \sum_{i=1}^m \|e_{\sigma_i}\|^2 \quad (7)$$

برای آنکه شبکه‌ای به صورت بهینه درآید، باید خطا روی کل دامنه آن به صورت یکنواخت توزیع شود، در غیر اینصورت قسمتی از دامنه بیش از حد نیاز ریز و قسمت دیگری از آن خیلی درشت و کم دقت شبکه‌بندی شده است. بنابراین طبق رابطه فوق کل نرم خطا باید به صورت یکنواخت بین المانها توزیع گردد. مساله توزیع یکنواخت خطا معیاری برای نحوه تولید شبکه جدید می‌باشد.

### ۳- حل تطابقی در اجزای محدود

یکی از اهداف مهم روش آنالیز تطابقی پیدا کردن شبکه المان بهینه است. منظور از شبکه المان بهینه شبکه‌ای است که با تعداد المانهای ثابت، حداقل خطای حل به روش اجزای محدود را داشته باشد. اولین تلاش برای رسیدن به شبکه المان بهینه توسط نایس و مارکال در

سال ۱۹۷۴ صورت گرفت [۱۷]. در این روش موقعیت گرهها به صورت نامعلوم در نظر گرفته میشود و سپس با استفاده از حداقل نمودن انرژی پتانسیل میتوان موقعیت گرهها را تعیین نمود. پس از آنکه مقدار خطا بر روی المانهای شبکه قبلی مشخص گردید، باید شبکه به نحوی اصلاح شود که این خطا در حد قابل قبول قرار گیرد. به طور کلی دو روش برای بهبود کیفیت شبکه مورد استفاده قرار میگیرد: روش  $h$ -refinement که در آن بهبود شبکه با تغییر اندازه المانها در نقاط مختلف دامنه انجام می شود و روش  $p$ -refinement که در آن بهبود شبکه از طریق بالا بردن درجه توابع شکلی انجام می شود، در اینجا از روش اول برای بهینه سازی شبکه استفاده می شود. در گام نخست برای آنکه میزان خطای قابل قبول دامنه وابسته به نوع مساله نباشد، خطای دامنه را نسبت به نرم تنش نرمال می کنیم. به این ترتیب درصد خطای تخمین زده شده بر روی دامنه برابر است با:

$$\eta = \frac{\|e_\sigma\|}{\|\hat{\sigma}\|} \quad (8)$$

مقدار درصد خطای قابل قبول برای جواب مساله نیز که به صورت پیش فرض تعیین می گردد نسبت به نرم تنش نرمال سازی می گردد:

$$\eta_{aim} = \frac{\|e_\sigma\|_{aim}}{\|\hat{\sigma}\|} \quad (9)$$

اگر بخواهیم خطا به صورت یکنواخت بر روی شبکه توزیع شود و با توجه به رابطه های قبلی، میزان خطای قابل قبول برای هر المان به صورت رابطه (۱۰) تعیین می شود:

$$(\|e_\sigma\|_i)_{aim} = \frac{1}{\sqrt{m}} \|\hat{\sigma}\| \eta_{aim} \quad (10)$$

اندازه جدید المانها  $(h_i)_{new}$  برای رسیدن به خطای هدف از رابطه (۱۱) بدست می آید:

$$(h_i)_{new} = \left[ \frac{(\|e_\sigma\|_i)_{aim}}{(\|e_\sigma\|_i)_{old}} \right] (h_i)_{old} \quad (11)$$

برای آنکه مولد شبکه هنگام تولید شبکه جدید براساس چگالی المان داده شده دچار مشکل نگردد، از تولید المانهای خیلی درشت و خیلی ریز اجتناب می گردد. بنابراین یک حد بالا و پایین در رابطه (۱۲) برای اندازه المانها تعیین می گردد:

$$h_{min} \leq (h_i)_{new} \leq h_{max} \quad (12)$$

این امکان وجود دارد که با یک مرحله ریز سازی شبکه، درصد خطای جواب به مقدار هدف نرسد. بدیهی است که در چنین حالتی مراحل ارزیابی خطا و ریز سازی شبکه با شبکه مرحله جدید باید مجدداً انجام پذیرد. بررسی مسائل مختلف نشان می دهد که بکار گیری تکنیک ذکر شده در حداکثر دو مرحله، جوابها را به خطای هدف خواهد رساند.

#### ۴- روش همبستگی جابجایی ها

روش همبستگی جابجایی ها یکی از ساده ترین و نخستین روشهای استخراج مقادیر ضریب شدت تنش از حل اجزای محدود می باشد. مبنای این روش استفاده از جوابهای تحلیلی سه مود و ارتباط دادن میدانهای جابجایی به ضرایب شدت تنش از طریق این روابط است. با مراجعه به جوابهای تحلیلی می توان رابطه بین میدانهای جابجایی سه جهت مختلف با ضرایب شدت تنش مود را به ترتیب در رابطه (۱۳) بیان نماییم:

$$u = \frac{k_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[ 2 - 2\theta - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

$$v = \frac{k_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left[ 2 - 2\theta - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (13)$$

$$w = \frac{k_{III}}{G} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2}$$

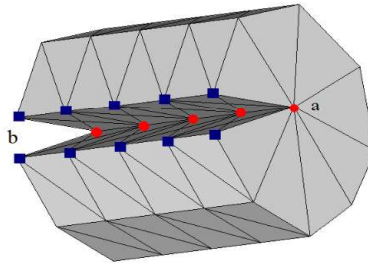
که  $\theta$  زاویه نقطه مورد نظر با امتداد لبه ترک و  $r$  فاصله آن نقطه تا نوک ترک می‌باشد. حال اگر نقطه مورد نظر را روی لبه آزاد ترک در نظر بگیریم مقدار زاویه  $\theta$  برابر  $\pi$  خواهد بود اگر نقاط روی نوک ترک را با اندیس  $a$  و نقاط روی لبه ترک را با اندیس  $b$  نشان دهیم، جابجایی نسبی این نقاط از رابطه فوق با  $\theta$  برابر  $\pi$  بدست می‌آید. در این حالت مقادیر  $K_{II}$ ،  $K_I$ ،  $K_{III}$ ، به صورت رابطه (۱۴) خواهند شد:

$$K_I = \frac{G\sqrt{2\pi}(u_{y,b} - u_{y,a})}{\sqrt{r}(2-2\theta)} \quad (14)$$

$$K_{II} = \frac{G\sqrt{2\pi}(v_{x,b} - v_{x,a})}{\sqrt{r}(2-2\theta)}$$

$$K_{III} = \frac{G\sqrt{\pi}(\omega_{z,b} - \omega_{z,a})}{\sqrt{2r}}$$

وضعیت نقاط انتخاب شده بر روی نوک ترک و لبه ترک که با اندیس  $a$  و  $b$  مشخص شده‌اند در شکل (۱) نشان داده شده است. همانگونه که در شکل مشخص است به ازای هر گره نوک ترک می‌توان دو گره در لبه بالایی و پایینی انتخاب نمود. در عمل برای آنکه اثر المان بندی در حل از بین برود، مقدار ضریب شدت تنش از هر دو گره محاسبه شده و میانگین‌گیری می‌شود همچنین اگر نحوه آرایش گره‌ها به گونه‌ای نبود که گره‌ها دقیقاً مقابل هم قرار بگیرند، روش را برای یک نقطه که مقابل گره است ولی خود گره نیست بکار می‌بریم. برای تعیین جابجایی‌های آن نقطه از توابع شکلی المان‌ها استفاده می‌نماییم.



شکل ۱: گره‌های انتخابی در روش همبستگی جابجایی‌ها

مزایای استفاده از این روش سادگی آن و تفکیک مودها در محاسبه ضرایب شدت تنش می‌باشد. در نقطه مقابل مشکلی که در این روش موجود است آن است که کدام گره برای انجام روش انتخاب گردد. این گره از سویی باید نزدیک به لبه ترک باشد تا در منطقه تحت تاثیر ترک قرار داشته باشد، و از سوی دیگر نباید دارای جابجایی خیلی کوچک باشد تا خطا در محاسبه جابجایی منجر به خطای زیاد در روش نشود. برای جبران این نقیصه می‌توان روش را برای چند گره با فواصل مختلف از نوک ترک بکار برد و به ازای هر گره ضرایب شدت تنش را محاسبه کرد. ضریب شدت تنش دقیقتر از برونیابی این مقادیر به ازای  $r=0$  تعیین خواهد شد.

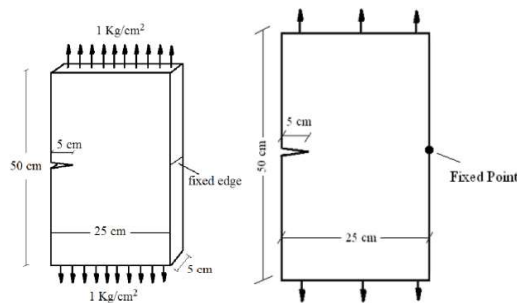
## ۵- نتایج مدل سازی عددی

برای آنکه قابلیت استراژی آنالیز تطابقی در قالب مسائل گسترش ترک روشن شود، در این قسمت یک مثال به صورت عددی آنالیز شده است. ایده‌های ذکر شده در بندهای قبل در قالب برنامه کامپیوتری به زبان سی شارپ، توسط اینجانب نوشته شده است و مثال توسط این برنامه آنالیز شده است، تولید شبکه تطابقی با نرم افزار نوشته شده توسط اینجانب انجام شده و برای آنالیز به نرم افزار Ansys انتقال یافته

است. در طول آنالیز، تکنیک المان محدود تطابقی بر مدل اعمال شده است و شبکه تطابقی بدست آمده آورده شده است. همچنین برای نشان دادن اثر این تکنیک، میزان خطا برای هر دو شبکه قبل و بعد از آنالیز تطابقی برآورد شده است. پارامترهای مکانیک شکست برای هر دو شبکه محاسبه شده و مقایسه گردیده‌اند. برای محاسبه پارامتر ضریب شدت تنش از روش همبستگی جابجایی‌ها استفاده شده است. این مثال برای دو المان سه گره‌ای و چهار گره‌ای بررسی شده است.

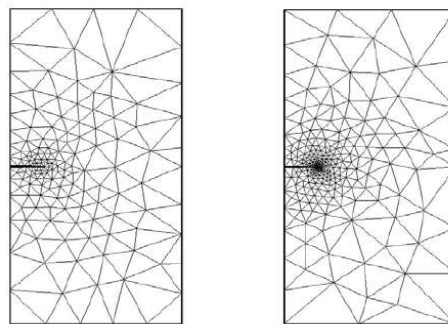
### ۶- ترک در ورق دوبعدی مستطیلی

همانگونه که در شکل (۲) نشان داده شده است، یک ورق مستطیلی شکل به عرض ۲۵ سانتیمتر و طول ۵۰ سانتیمتر با یک ترک گوشه است که تحت کشش یکنواخت قرار گرفته است. جنس ورق از شیشه بوروسیلیکات می‌باشد که مدول الاستیسیته و ضریب پواسون آن  $\nu = 0.2$ ،  $E = 6.4 \times 10^4 \frac{kg}{cm^2}$  و لبه‌های بالایی و پایینی این ورق تحت تنش کششی یکنواخت برابر  $\sigma = 1 \frac{kg}{cm^2}$  قرار گرفته‌اند. طول ترک اولیه ۵ سانتیمتر بوده نقطه مقابل ترک در هر دو جهت بسته شده‌اند.



شکل ۲: ترک در ورق دوبعدی مستطیلی، هندسه و شرایط مرزی

آنالیز مساله به صورت خطی و الاستیک و با فرض کرنش صفحه‌ای انجام شده است. روش اجزای محدود تطابقی با خطای هدف ۵ درصد بکار رفته است. همان گونه که انتظار می‌رود، در این تکنیک بکار رفته یک شبکه بسیار ریز در اطراف نوک ترک مشاهده می‌شود.

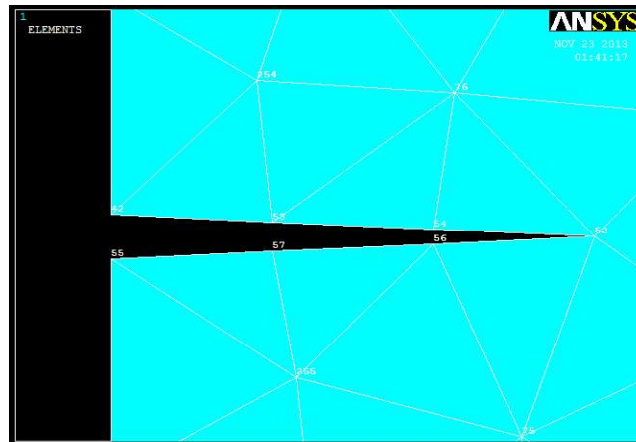


(الف)

(ب)

شکل ۳: ترک در ورق دوبعدی مستطیلی (المان مثلثی)، الف) شبکه اولیه ب) شبکه تطابقی (انجام شده توسط برنامه کامپیوتری)

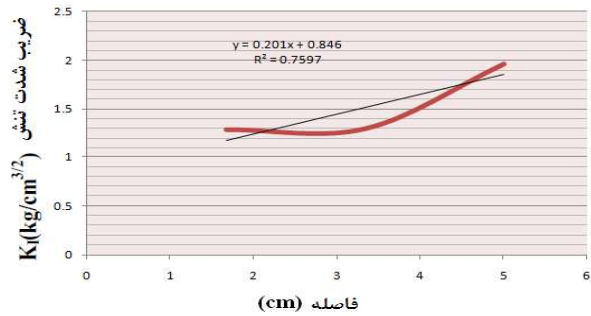
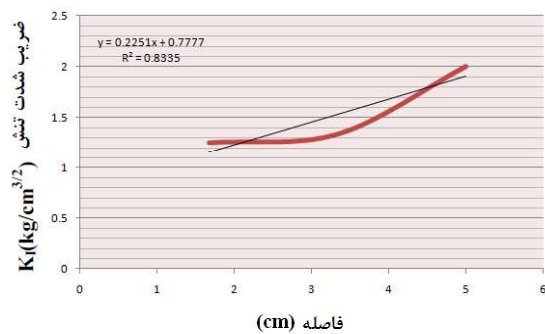
۱-۶- ترک در ورق دوبعدی مستطیلی با المان سه گره‌ای



شکل ۴: ترک ۵ سانتیمتری برای شبکه معمولی (المان مثلثی، گره ۵۲ در نوک ترک، سایر گره‌ها ۵۴، ۵۳، ۴۲، ۵۶، ۵۷، ۵۵)

جدول ۱: ضریب شدت تنش بدست آمده برای شبکه معمولی، المان سه گره‌ای

گره	فاصله	ضریب شدت تنش
۵۲-۵۴	۱/۶۷	۱/۲۵
۵۲-۵۳	۳/۳۴	۱/۳۳
۵۲-۴۲	۵	۲/۰
۵۲-۵۶	۱/۶۷	۱/۲۹
۵۲-۵۷	۳/۳۴	۱/۳
۵۲-۵۵	۵	۱/۹۶

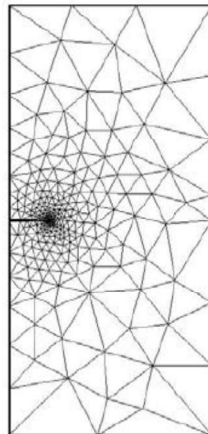


شکل ۵: نمودار فاصله - ضریب شدت تنش برای نقاط ۵۲، ۵۶، ۵۷، ۵۵ (نمودار سمت راست) - ضریب شدت تنش برای نقاط ۴۲، ۵۳، ۵۴ (نمودار سمت چپ)

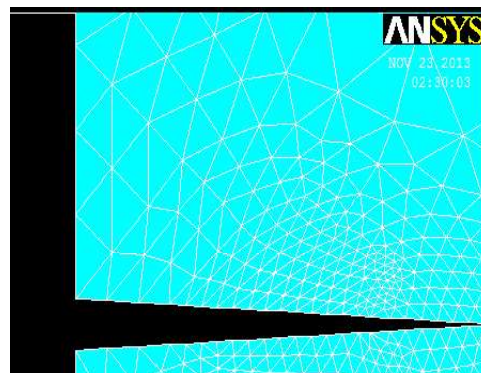
جدول ۲: درصد خطا بدست آمده برای شبکه معمولی، المان چهار گره‌ای

درصد خطا	گره
۸/۰	۵۲-۵۴
۱۴/۴	۵۲-۵۳
۵/۰	۵۲-۴۲
۶/۰	۵۲-۵۶
۱۶/۱۵	۵۲-۵۷
۵/۶۱	۵۲-۵۵

باتوجه به نتایج جدول (۲) مشاهده می‌شود که متوسط خطای ضریب شدت تنش برای شبکه با مش بندی معمولی با المان چهار گره‌ای برابر ۵/۳۱ درصد می‌شود که خطای بالایی دارد بنابراین براساس نرم افزار شبکه تطابقی را تشکیل داده و آنالیز می‌کنیم تا میزان خطای حاصل را بدست آوریم. نمودار شکل (۵) نشان می‌دهد که میزان خطای شبکه اجزای محدود معمولی زیاد است چون خط برازش یافته بر نمودار کاملاً این نتایج را ثابت می‌کند.



شکل ۶: شبکه تطابقی بدست آمده در برنامه

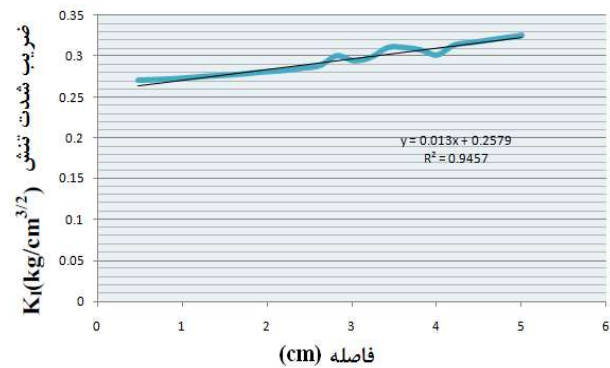
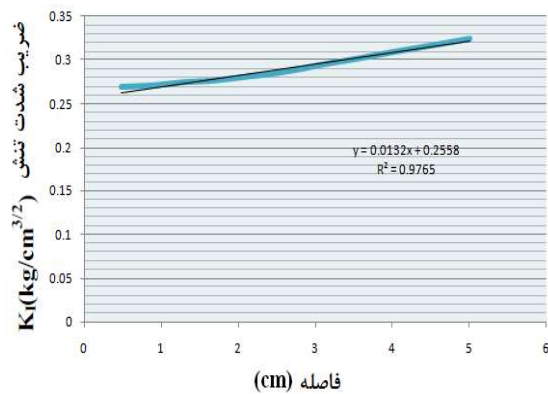


شکل ۷: ترک ۵ سانتیمتری برای شبکه تطابقی



جدول ۳: ضریب شدت تنش بدست آمده برای شبکه تطابقی، المان مثلثی

گره	فاصله	ضریب شدت تنش	گره	فاصله	ضریب شدت تنش
۱۹۵-۲۱۲	۰/۴۸	۰/۲۶۹	۱۹۵-۲۱۲	۰/۴۸	۰/۲۶۹
۱۹۵-۲۲۹	۰/۹۱	۰/۲۷۱	۱۹۵-۲۲۹	۰/۹۱	۰/۲۷۱
۱۹۵-۲۴۷	۱/۲۹	۰/۲۷۵	۱۹۵-۲۴۷	۱/۲۹	۰/۲۷۵
۱۹۵-۲۶۴	۱/۶۳	۰/۲۷۶	۱۹۵-۲۶۴	۱/۶۳	۰/۲۷۶
۱۹۵-۲۸۱	۱/۹۳	۰/۲۷۹	۱۹۵-۲۸۱	۱/۹۳	۰/۲۷۹
۱۹۵-۲۹۵	۲/۲	۰/۲۸۲	۱۹۵-۲۹۵	۲/۲	۰/۲۸۲
۱۹۵-۳۰۷	۲/۴۲	۰/۲۸۴	۱۹۵-۳۰۷	۲/۴۲	۰/۲۸۴
۱۹۵-۳۱۷	۲/۶۲	۰/۲۸۷	۱۹۵-۳۱۷	۲/۶۲	۰/۲۸۷
۱۹۵-۳۲۶	۲/۸۲	۰/۲۹	۱۹۵-۳۲۶	۲/۸۲	۰/۲۹
۱۹۵-۳۳۷	۳/۰۲	۰/۲۹۴	۱۹۵-۳۳۷	۳/۰۲	۰/۲۹۴
۱۹۵-۳۴۷	۳/۲۲	۰/۲۹۷	۱۹۵-۳۴۷	۳/۲۲	۰/۲۹۷
۱۹۵-۳۵۵	۳/۴۲	۰/۳	۱۹۵-۳۵۵	۳/۴۲	۰/۳
۱۹۵-۳۶۲	۳/۶۲	۰/۳۰۳	۱۹۵-۳۶۲	۳/۶۲	۰/۳۰۳
۱۹۵-۳۶۷	۳/۸۱	۰/۳۰۶	۱۹۵-۳۶۷	۳/۸۱	۰/۳۰۶
۱۹۵-۳۷۴	۴/۰	۰/۳۰۹	۱۹۵-۳۷۴	۴/۰	۰/۳۰۹
۱۹۵-۳۷۹	۴/۲۰	۰/۳۱۳	۱۹۵-۳۷۹	۴/۲۰	۰/۳۱۳
۱۹۵-۳۸۳	۴/۴۰۵	۰/۳۱۶	۱۹۵-۳۸۳	۴/۴۰۵	۰/۳۱۶
۱۹۵-۳۸۷	۴/۶۰	۰/۳۱۹	۱۹۵-۳۸۷	۴/۶۰	۰/۳۱۹
۱۹۵-۳۸۹	۴/۸۰	۰/۳۲۲	۱۹۵-۳۸۹	۴/۸۰	۰/۳۲۲
۱۹۵-۳۹۰	۵	۰/۳۲۵	۱۹۵-۳۹۰	۵	۰/۳۲۵



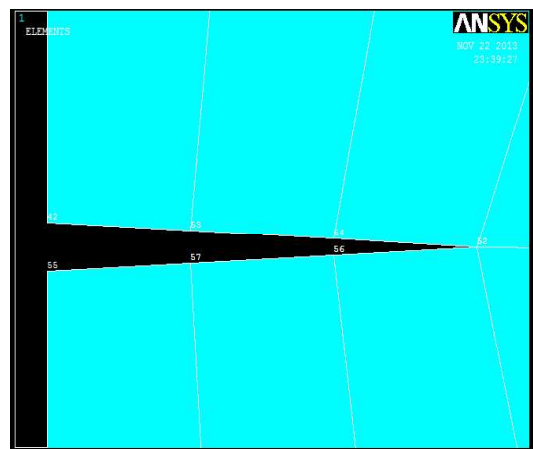
شکل ۸: نمودار فاصله - ضریب شدت تنش برای نقاط لبه بالایی ترک (شکل چپ) - نمودار فاصله - ضریب شدت تنش برای نقاط لبه پایینی ترک (شکل راست).

مطابق جدول (۴) مقدار خطای متوسط ۰/۵۶۷ درصد بدست آمد.

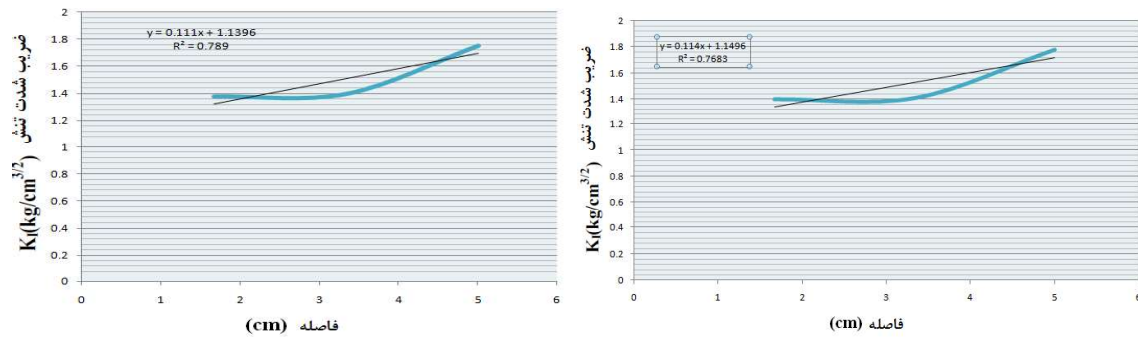
جدول ۴: درصد خطا بدست آمده برای شبکه تطابقی، المان مثلثی

گره	درصد خطا	گره	درصد خطا
۱۹۵-۲۱۲	۰/۴۳	۱۹۵-۲۱۳	۰/۴۵
۱۹۵-۲۲۹	۰/۸۶	۱۹۵-۲۳۰	۰/۸۹
۱۹۵-۲۴۷	۰/۹	۱۹۵-۲۴۸	۰/۹۱
۱۹۵-۲۶۴	۰/۶۵	۱۹۵-۲۶۵	۰/۶۶
۱۹۵-۲۸۱	۰/۸	۱۹۵-۲۸۲	۰/۸۱
۱۹۵-۲۹۵	۱/۱	۱۹۵-۲۹۶	۱/۱
۱۹۵-۳۰۷	۱/۰	۱۹۵-۳۰۸	۱/۰
۱۹۵-۳۱۷	۱/۱	۱۹۵-۳۱۸	۱/۱
۱۹۵-۳۲۶	۰/۷	۱۹۵-۳۲۷	۰/۷۱
۱۹۵-۳۳۷	۰/۶۲	۱۹۵-۳۳۸	۰/۶۳
۱۹۵-۳۴۷	۰/۳۲	۱۹۵-۳۴۸	۰/۴۵
۱۹۵-۳۵۵	۰/۴	۱۹۵-۳۵۶	۰/۳۳
۱۹۵-۳۶۲	۰/۳۵	۱۹۵-۳۶۳	۰/۴۱
۱۹۵-۳۶۷	۰/۳۱	۱۹۵-۳۶۸	۰/۳۶
۱۹۵-۳۷۴	۰/۲۱	۱۹۵-۳۷۵	۰/۳۱
۱۹۵-۳۷۹	۰/۳۶	۱۹۵-۳۸۰	۰/۲۱
۱۹۵-۳۸۳	۰/۳۹	۱۹۵-۳۸۴	۰/۳۶
۱۹۵-۳۸۷	۰/۲۹	۱۹۵-۳۸۸	۰/۴
۱۹۵-۳۸۹	۰/۲۹	۱۹۵-۳۹۱	۰/۳۱
۱۹۵-۳۹۰	۰/۶	۱۹۵-۳۹۲	۰/۳

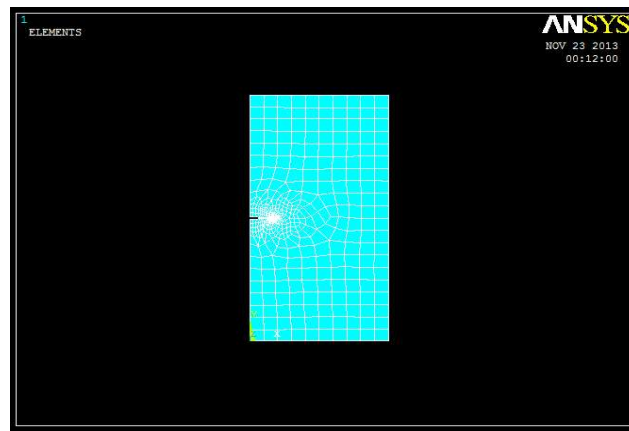
مطابق همین روش برای المان چهار گره‌ای آنالیز را انجام می‌دهیم.



شکل ۹: ترک ۵ سانتیمتری برای شبکه معمولی (المان چهار گره‌ای، گره ۵۲ در نوک ترک، سایر گره‌ها ۵۴، ۵۳، ۴۲، ۵۶، ۵۷، ۵۵)

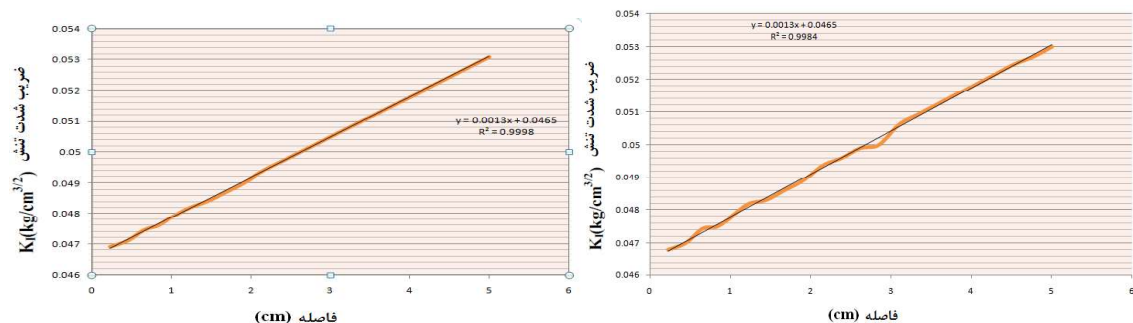


شکل ۱۰: نمودار فاصله - ضریب شدت تنش برای نقاط لبه بالایی و پایینی ترک (شبکه معمولی)



شکل ۱۱: ترک ۵ سانتیمتری برای شبکه تطابقی (المان چهار گرهی، گره ۲۶۹ در نوک ترک)

برای نتایج شبکه تطابقی نموداری رسم می‌کنیم که محور افقی آن طول ترک است و محور قائم آن ضریب شدت تنش می‌باشد، بنابراین با توجه به رابطه همبستگی جابجایی‌ها فاصله برابر می‌شود با فاصله هر گره تا نوک ترک بنابراین برای لبه بالا و پایین ترک نمودار مربوطه را رسم می‌کنیم تا تغییرات خطا مشخص شود، با برازش خط بر روی نمودار مشخص می‌گردد که شبکه تطابقی چه میزان خطایی را دارد. در شکل (۱۲) مشخص است که شبکه تطابقی میزان خطای بسیار کمتری دارد که نشان دهنده کاهش میزان خطای روش اجزای محدود تطابقی است.



شکل ۱۲: نمودار فاصله - ضریب شدت تنش برای نقاط لبه بالایی و پایینی ترک (شبکه تطابقی)

جدول ۵: نتایج کلی مدل سازی

مشخصات	المان مثلثی	المان چهار گره ای
تعداد گره ها در شبکه اولیه	۲۰۱	۱۹۶
تعداد گره ها در شبکه نهایی	۳۹۰	۴۳۶
تعداد المان ها در شبکه اولیه	۳۴۸	۱۶۹
تعداد المان ها در شبکه نهایی	۷۰۹	۳۹۸
درصد خطا نسبی شبکه اولیه	۹/۱۹	۵/۳۱
درصد خطا نسبی شبکه نهایی	۰/۵۶۷	۰/۲۴۷

### ۷- نتیجه گیری

با توجه به این که در روش اجزای محدود معمولی هیچ ابزاری، به جز قضاوت مهندسی، برای تعیین مناسب بودن اندازه المان به کار رفته و نیز دقت حل مسائل، در دسترس مهندسين نمی باشد، و انتخاب اندازه المان بیشتر بر اساس توصیه های داده شده صورت میگیرد، در این پژوهش با هدف جلب توجه محققین، مهندسين به مسأله مهم خطاها در روشهای عددی به ویژه اجزای محدود، ضمن بیان مبانی تخمین خطا و حل تطابقی در اجزای محدود، از روش اجزای محدود تطابقی به عنوان یک ابزار قوی برای غلبه بر محدودیت های روش اجزای محدود معمولی، استفاده شد. در مثال این پژوهش به کمک روش اجزای محدود تطابقی نرم افزاری نوشته شد که، روشی جهت تعیین ضریب شدت تنش، که برای هر ترک در یک سازه تحت بارگذاری دلخواه قابل اعمال است، با قابلیت اطمینان بالا معرفی گردید.

### ۸- مراجع

- [1] Zienkiewicz O.C., *Achievements and some unsolved problems of the finite element method*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 47, 2000, pp.28.
- [2] Zienkiewicz O.C., *The background of error estimation and adaptivity in finite element computations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol. 195, pp. 207-213, 2006.
- [3] Zienkiewicz O.C. and Zhu Z., *A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 24, 1987, pp. 337-357.
- [4] Zienkiewicz O.C. and Zhu Z., *The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 33, 1992, pp. 1331-1364.
- [5] Zienkiewicz O.C. and Zhu Z., *The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2: Error estimates and adaptivity*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol. 33, 1992, pp. 1365-1382.
- [6] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. and Zhu J.Z., *The finite element method*, 6th edition, Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.
- [7] McNeice G.M. and Marcal P.V., *Optimization of finite element grids based on minimum potential energy*, Journal engineering of Industry. ASME, Vol. 95, No.3, 1974, pp. 995-1019.
- [8] Khoei AR, Azadi H, Moslemi H. *Modeling of crack propagation via an automatic adaptive mesh refinement based on modified superconvergent recovery technique*. Engng Fract Mech 2008;75:2921-45.
- [9] H. Moslemi, A.R. Khoei, *3D adaptive finite element modeling of non-planar curved crack growth using the weighted superconvergent patch recovery method*, Eng. Fracture Mech. 76 (2009) 1703-1728.
- [10] Release 12.0 Documentation for ANSYS, ANSYS HELP, 2009.