

Parametric study on the dynamics of horizontally curved beams due to a moving inertial load considering the induced torsional moment

H. Abdoos¹, M. A. Foyouzat², A. R. Khaloo^{3*}

1- Ph.D. student, Department of civil engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran

2- Assistant Professor, Department of civil engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran

3- Distinguished Professor, Department of civil engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran

ABSTRACT

This paper is devoted to investigating the effect of applied torsional moment on the out-of-plane behavior of horizontally curved beams (HCBs) subjected to the excitation induced by a moving mass. As the mass travels along the top surface of HCBs, a torsional moment will be introduced into the system due to the eccentricity of the in-plane centrifugal action with respect to the shear center of the HCB section. The differential equations governing the HCB-moving mass system are first established considering the effect of mass inertia, Coriolis and centrifugal forces, and then numerically solved within the transition matrix approach. Thereafter, a parametric study is conducted to evaluate the influence of radius of curvature and central subtended angle of HCB, as well as the mass and velocity of the moving object. In general, with an increase in the values of radius of curvature and subtended angle of HCBs, a decreasing effect in the response of the system is observed. Moreover, a general magnifying effect is essentially experienced due to an increase in the mass and velocity of the moving object. As the results suggest, the magnifying effect of the induced torsional moment due to the in-plane centrifugal force is at most six percent for the results studied herein. For long-span HCBs, the torsional effect can be deemed as insignificant on the out-of-plane response of HCB-moving mass systems. In conclusion, it is indicated that considering the contribution of the torsional moment can offer a more realistic response estimation regarding the dynamics of HCBs acted upon by a moving inertial load.

ARTICLE INFO

Receive Date: 05 November 2022

Revise Date: 17 January 2023

Accept Date: 17 February 2023

Keywords:

Horizontally curved beam

Moving mass

Torsional moment

Dynamic response

Parametric study

Visco-elastic foundation

All rights reserved to Iranian Society of Structural Engineering.

doi: <https://doi.org/10.22065/jsce.2023.368612.2964>

*Corresponding author: Alireza Khaloo.

Email address: khaloo@sharif.edu

مطالعه پارامتری پاسخ دینامیکی تیرهای خمیده در صفحه افق تحت تحریک جرم متحرک با در نظر گرفتن مؤلفه لنگر پیچشی

هاتف عبدوس^۱، محمدعلی فیوضات^۲، علیرضا خالو^{۳*}

۱- دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران

۲- استادیار، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران

۳- استاد، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران

چکیده

در این مطالعه، به اثرات ناشی از لنگر پیچشی بر پاسخ دینامیکی خارج از صفحه تیرهای خمیده در صفحه افق و متکی بر بستر ویسکو-الاستیک پرداخته می‌شود که تحت تحریک جرم متحرک قرار دارند. ابتدا در معادلات تعادل دینامیکی حاکم بر تیرهای خمیده در صفحه افق، اثرات ناشی از اینرسی دورانی، شتاب کوریولیس و نیروی مرکزگر لحاظ شده، و سپس بر اساس روش ماتریس انتقال حل عددی آن ارائه شده است. دقت مدل نیمه تحلیلی این پژوهش بر اساس مطالعات موجود در ادبیات فنی ارزیابی شد که مؤید عملکرد مطلوب آن در برآورد پاسخ دینامیکی خارج از صفحه تیرهای خمیده در صفحه افق است. در بخش مطالعات پارامتری، به چگونگی تأثیر شعاع انحنای تیر و زاویه مرکزی آن، و نیز جرم و سرعت جسم متحرک بر طیف پاسخ جابه‌جایی خارج از صفحه و لنگر خمشی اشاره شد. با مشاهده طیف پاسخ، در حالت کلی، با افزایش شعاع انحنا و زاویه مرکزی تیر، مقادیر جابه‌جایی خارج از صفحه و لنگر خمشی حداکثر روند کاهشی داشته است. همچنین، با افزایش جرم و سرعت جسم متحرک، سیستم جابه‌جایی و لنگر بیشتری را تجربه می‌کند. در انتها، به منظور تعیین میزان اثرگذاری مؤلفه لنگر پیچشی بر پاسخ دینامیکی سیستم، طیف پاسخ در حالت با و بدون اثر لنگر پیچشی مقایسه شدند که بر اساس مقادیر بررسی شده در این مقاله، به ترتیب حداکثر تا ۶ و ۵ درصد می‌تواند بیشینه جابه‌جایی و لنگر خمشی تیرهای خمیده در صفحه افق را افزایش دهد. در نتیجه، در نظر گرفتن لنگر پیچشی می‌تواند ارزیابی واقع‌بینانه‌تری از رفتار دینامیکی سیستم تیرخمیده-جرم متحرک داشته باشد و موجبات تحلیل و طراحی ایمن‌تری را به همراه آورد.

کلمات کلیدی: تیرهای خمیده در صفحه افق، جرم متحرک، لنگر پیچشی، پاسخ دینامیکی، مطالعات پارامتری، بستر ویسکو-الاستیک.

| شناسه دیجیتال: | | سابقه مقاله: | | | |
|---|------------|---------------|------------------------------------|------------|------------|
| doi: | پایه | انتشار آنلاین | پذیرش | بازنگری | دریافت |
| https://doi.org/10.22065/jsce.2023.368612.2964 | چاپ | ۱۴۰۱/۱۱/۲۸ | ۱۴۰۱/۱۱/۲۸ | ۱۴۰۱/۱۰/۲۷ | ۱۴۰۱/۰۸/۱۴ |
| 10.22065/jsce.2023.368612.2964 | ۱۴۰۲/۰۸/۳۰ | ۱۴۰۱/۱۱/۲۸ | ۱۴۰۱/۱۱/۲۸ | ۱۴۰۱/۱۰/۲۷ | ۱۴۰۱/۰۸/۱۴ |
| علیرضا خالو khaloo@sharif.edu | | | *نویسنده مسئول: پست الکترونیکی: | | |

۱- مقدمه

امروزه استفاده از المان‌های خمیده در صفحه افق با توجه مزایای معماری و عملکرد سازه‌ای منحصر بفرد از اهمیت ویژه‌ای در مهندسی عمران برخوردار است. پل‌ها، ورودی و خروجی رمپ بزرگراه‌ها، خطوط راه‌آهن و مترو، و نیز برخی از وسائل و تجهیزات شهرسازی به عنوان کاربردهایی از این المان‌های سازه‌ای مطرح هستند. با توجه به پیچیدگی روابط تعادل استاتیکی و دینامیکی حاکم بر المان‌های خمیده در صفحه افق نسبت به مقاطع مستقیم، تحلیل و طراحی این المان‌ها با پیچیدگی‌های زیادی همراه بوده و ارزیابی دقیق عملکرد آنها را تحت بارگذاری‌های وارده دشوار خواهد کرد. یکی از مسائل به‌روزی که توجه پژوهشگران را به خود معطوف داشته، بررسی رفتار دینامیکی تیرهای خمیده در صفحه افق^۱ تحت بارگذاری دینامیکی ناشی از تحریک جسم یا اجسام متحرک است. در اثر حرکت اجسام متحرک در صفحه افق، نیروی مرکزگرایی در معادلات تعادل دینامیکی ظاهر می‌شود که با توجه ابعاد مقطع و شعاع انحنای سازه، جرم و سرعت جسم متحرک روی آن می‌تواند لنگر پیچشی قابل توجهی را ایجاد نماید و عملکرد دینامیکی المان خمیده را تحت تأثیر قرار دهد. لذا، عدم شناخت کافی نسبت به اثرگذاری نیروهای وارده به یک المان سازه و در نظر نگرفتن آنها می‌تواند به یک طراحی غیرایمن منجر شود و این مهم می‌تواند با بررسی دقیق تر رفتار واقعی سازه‌ها به حداقل برسد.

بیشتر مطالعات موجود در ادبیات فنی پیرامون بررسی تأثیر بار متحرک بر پاسخ دینامیکی کابل‌ها، جرثقیل‌ها، تیرهای مستقیم و صفحات بوده که در تک‌نگاشت^۲ فرایبا^۳ [۱] و مقاله مروری اوپانگ^۴ [۲] به بسیاری از آنها اشاره شده است. این در حالی است که مطالعات نسبتاً محدودتری بر روی المان‌های سازه‌ای خمیده در صفحه افق تحت اثر نیروی متحرک صورت گرفته که در ادامه به برخی از مهمترین مراجع و دستاوردهای آنها در برآورد پاسخ دینامیکی سیستم تیر خمیده-نیروی متحرک پرداخته می‌شود.

روش تقریبی تن^۵ و شور^۶ [۳] در سال ۱۹۶۸ به عنوان یکی از اولین مراجع در تعیین پاسخ دینامیکی پل‌های با دهانه ساده و خمیده در صفحه افق تحت بار متحرک با شدت ثابت یاد می‌شود. ونگ^۷ و برن^۸ [۴] در سال ۱۹۸۲ اثر ثابت بستر ارتجاعی و زاویه مرکزی را در فرکانس‌های طبیعی خارج از صفحه تیرهای خمیده بررسی نمودند. همچنین، در سال‌های ۱۹۸۸ و ۱۹۹۰ ارتعاش آزاد و فرکانس‌های طبیعی تیرهای خمیده متکی بر بسترهای وینکلر^۹ و پاسترناک^{۱۰} توسط ایسا^{۱۱} و همکاران [۵،۶] ارزیابی شد. کنگ^{۱۲} و همکاران [۷] در سال ۱۹۹۶ با استفاده از روش تفاضلات مربعی^{۱۳} DQM توانستند فرکانس‌های طبیعی و مقادیر ویژه تیرهای خمیده در صفحه افق را محاسبه کنند. هوانگ^{۱۴} و همکاران [۸] در سال ۱۹۹۸ اثرات تغییر شکل‌های اعوجاجی را در عملکرد دینامیکی مقطع جعبه‌ای پل‌های خمیده در صفحه افق لحاظ نمودند. هوسان^{۱۵} و جما^{۱۶} [۹] در سال ۱۹۹۹ بر مبنای روش سختی دینامیکی، حل دقیقی از فرکانس‌های طبیعی تیرهای تیموشکنوی خمیده در صفحه افق پیشنهاد دادند. لی^{۱۷} و همکاران [۱۰] در سال ۲۰۰۰ با استفاده از روش حل عددی رانگ‌کوتا، پاسخ ارتعاش آزاد تیرهای خمیده در صفحه افق و متکی بر بستر وینکلر را با شرایط تکیه‌گاهی مختلف مطالعه نمودند. ینگ^{۱۸} و همکاران [۱۱] در سال ۲۰۰۱ با در نظر گرفتن یک مود ارتعاشی، توانستند یک راه‌حل تقریبی برای تیرهای خمیده در صفحه افق و تحت تحریک ناشی از بار متحرک ارائه کنند. شامالتا^{۱۹} و متریکین^{۲۰} [۱۲] در سال ۲۰۰۳ رفتار دینامیکی ریل‌های راه‌آهن مدفون را تحت

¹ Horizontally Curved Beams (HCBs)

² Monograph

³ Fryba

⁴ Ouyang

⁵ Tan

⁶ Shore

⁷ Wang

⁸ Brannen

⁹ Winkler

¹⁰ Pasternak

¹¹ Issa

¹² Kang

¹³ Differential Quadrature Method

¹⁴ Huang Method

¹⁵ Howsan

¹⁶ Jemah

¹⁷ Lee

¹⁸ Yang

¹⁹ Shamalta

²⁰ Metrikine

تحریک ناشی از بار متحرک قطار به صورت تحلیلی مطالعه نمودند. در همان سال، وو^{۲۱} و چیانگ^{۲۲} [۱۳] با استفاده از روش انتگرال گیری نیومارک توانستند اثر مؤلفه اینرسی را در پاسخ ارتعاش خارج از صفحه تیرهای خمیده دایروی در نظر بگیرند.

نالاسیوام^{۲۳} و همکاران [۱۴] در سال ۲۰۰۷ با تعریف ضریب بزرگنمایی دینامیکی برای پل‌های خمیده در صفحه افق و با مقطع جعبه‌ای، رفتار دینامیکی آنها را ارزیابی نمودند. در سال ۲۰۰۷، خالو و کافی موسوی [۱۵] به اثرات قابل توجه شعاع انحنا در عملکرد پل-های خمیده در صفحه افق اشاره داشتند. با استفاده از سری‌های توانی، کیم^{۲۴} و همکاران [۱۶] در همان سال ماتریس سختی دینامیکی تیرهای جدارنازک خمیده در صفحه افق و متکی بر بسترهای وینکلر و پاسترناک را ارائه دادند. چلیم^{۲۵} و آکورت^{۲۶} [۱۷] در سال ۲۰۱۱ پاسخ استاتیکی و ارتعاش آزاد تیرهای خمیده و متکی بر بستر الاستیک را بر مبنای توابع مکمل^{۲۷} و به صورت عددی ارزیابی نمودند.

همچنین، لی^{۲۸} و همکاران [۱۸] در سال ۲۰۱۳ توانستند با استفاده از روش انتگرال دوهمال، حل تحلیلی رفتار دینامیکی خارج از صفحه ریل‌های خمیده را ناشی از اثر بار متحرک ارائه دهند. دای^{۲۹} و انگ^{۳۰} [۱۹] در سال ۲۰۱۵ با ارائه یک راه‌حل تحلیلی، پاسخ دینامیکی خارج از صفحه تیرهای خمیده و متکی بر بستر وینکلر را تحت اثر بارهای متمرکز متحدالفاصله و بر مبنای توابع مثلثاتی ارزیابی نمودند. کوتلو^{۳۱} و همکاران [۲۰] در سال ۲۰۱۷ پاسخ دینامیکی تیرهای خمیده متکی بر بستر پاسترناک را تحت تحریک مثلثی در وسط دهانه ارزیابی نمودند. در همان سال، مشخصات دینامیکی ریل‌های راه‌آهن خمیده در صفحه افق ناشی از عبور بارهای هارمونیک در دامنه زمانی و فرکانسی توسط دای^{۳۲} و همکاران [۲۱] ارزیابی شد.

لیو^{۳۳} و همکاران [۲۲] در سال ۲۰۱۸ رفتار دینامیکی ریل‌های خمیده در صفحه افق و متکی بر فنرهای تکیه‌گاهی متحدالفاصله را تحت بارگذاری هارمونیک مطالعه کردند. همچنین، در پژوهش لی^{۳۴} و رن^{۳۵} [۲۳] که در سال ۲۰۱۸ انجام شد، یک حل تحلیلی سه-بعدی و نسبتاً کامل از رفتار تیرهای خمیده تحت بارگذاری ناشی از نیروی متحرک پیشنهاد شد که در آن تأثیر پارامترهای کلیدی در نظر گرفته شده است. عبدوس و همکاران [۲۴] در سال ۲۰۲۰ اثر مؤلفه‌های اینرسی جرم متحرک را در پاسخ دینامیکی خارج از صفحه تیرهای خمیده در صفحه افق لحاظ نمودند و روابطی رگرسیونی و کاربردی جهت تخمین ضرایب بزرگنمایی دینامیکی جابه‌جایی خارج از صفحه و لنگر خمشی ارائه دادند. در سال ۲۰۲۲، لو^{۳۶} و همکاران [۲۵] با استفاده از روش گالرکین^{۳۷} و تعامد مودها، حل نیمه‌تحلیلی پاسخ‌های ارتعاش اجباری و آزاد تیرهای اویلر-برنولی خمیده در صفحه افق و با شرایط تکیه‌گاهی ساده را ارائه و بر اساس آن، روابط حاصل را با در نظر گرفتن اندرکنش چرخ قطار و ریل راه‌آهن در یک مسیر خمیده در صفحه افق تعمیم دادند.

بررسی ادبیات فنی نشان می‌دهد که در هیچ یک از مطالعات موجود، تأثیر مؤلفه پیچشی بر پاسخ دینامیکی تیرهای خمیده در صفحه افق تحت اثر جرم متحرک مطالعه نشده است. لذا، در این پژوهش مد نظر است تا اثر این لنگر خارجی بر رفتار دینامیکی تیرهای خمیده در صفحه افق بر اساس مقادیر جابه‌جایی خارج از صفحه و نیز لنگر خمشی ارزیابی شود. در این راستا، ساختار مقاله به شرح زیر است. در بخش دوم به فرضیات و فرمول‌بندی حاکم بر مسئله اشاره می‌شود. در فصل سوم، حل مسئله بر اساس روش ماتریس انتقال^{۳۸} بیان می‌شود. صحت‌سنجی مدل نیمه‌تحلیلی پیشنهادی بر اساس مطالعات پیشین در فصل چهارم انجام می‌شود. در فصل پنجم، با انجام

²¹ Wu

²² Chiang

²³ Nallasivam

²⁴ Kim

²⁵ Çalim

²⁶ Akkurt

²⁷ Complementary functions

²⁸ Li

²⁹ Dai

³⁰ Ang

³¹ Kutlu

³² Du

³³ Liu

³⁴ Li

³⁵ Ren

³⁶ Luo

³⁷ Galerkin

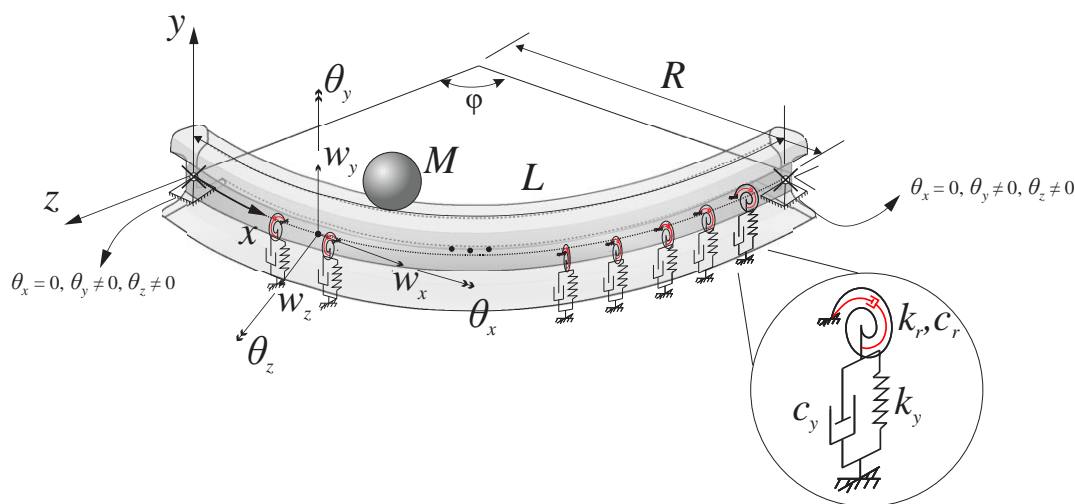
³⁸ Transition Matrix Method

مطالعات پارامتری بر روی مدل نیمه تحلیلی، به چگونگی تأثیر پارامترهای شعاع و زاویه مرکزی تیر و نیز جرم و سرعت جسم متحرک در تغییر رفتار دینامیکی سیستم تیر خمیده-جرم متحرک اشاره می‌شود و در فصل ششم خلاصه‌ای از نتایج ارائه خواهد شد.

۲- فرضیات و فرمول‌بندی مسئله

شکل ۱، یک تیر خمیده با مقطع یکنواخت در صفحه افق و با شعاع R ، زاویه مرکزی φ و طول L را نشان می‌دهد که شرایط مرزی آن در هر دو انتها بر اساس تکیه‌گاه‌های ساده بوده و فاقد دوران پیچشی در نواحی انتهایی تیر است [۱۱، ۲۶]. تحریک دینامیکی وارده، ناشی از حرکت جسمی به جرم متمرکز M بوده که با سرعت ثابت V_0 روی سطح فوقانی تیر در حال حرکت است. همچنین، تیر خمیده متکی بر بستر ویسکو-الاستیک بوده که k_y و c_y به ترتیب بیانگر سختی و میرایی بستر ارتجاعی در راستای قائم، و نیز k_r و c_r به ترتیب به عنوان نماینده سختی و میرایی پیچشی می‌باشند. سیستم مختصاتی تعریف شده به صورت دستگاه راست‌گرد بوده که در آن محور x در طول تیر و مار بر محور عبوری از مرکز سطح مقطع و نیز محورهای y و z به ترتیب محورهای قائم و افقی در مقطع تیر هستند که به تبع آن، (u_x, u_y, u_z) و $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ به ترتیب به عنوان درجات آزادی جابه‌جایی و دورانی تعریف می‌شوند. در ادامه، به منظور فرمول‌بندی مسئله، مطابق با هندسه مفروض و تحریک دینامیکی اعمال شده، فرضیات زیر لحاظ می‌شوند:

- (۱) مسیر حرکت جرم روی سطح فوقانی تیر خمیده فاقد اصطکاک است؛
- (۲) در تمام مدت حرکت، تماس کامل بین جسم و تیر برقرار بوده و امکان جداشدگی آن از روی تیر وجود ندارد [۲۴]؛
- (۳) از اثر اعوجاج پیچشی^{۳۹} صرف‌نظر می‌شود [۲۷]؛
- (۴) فرض اویلر-برنولی برای تیرها برقرار است [۲۵]؛
- (۵) از اثر تغییرشکل‌های برشی صرف‌نظر می‌شود [۲۴]؛



شکل ۱: شکل شماتیک تیر خمیده در صفحه افق متکی بر بستر ویسکو-الاستیک و با تکیه‌گاه‌های ساده تحت تحریک جرم متحرک.

معادلات تعادل حاکم بر رفتار خارج از صفحه تیرهای خمیده بر صفحه افق به صورت همبسته بوده و درجات آزادی آن، جابه‌جایی خارج از صفحه، u_y و دوران پیچشی، θ_x ، می‌باشند. جزئیات مربوط به روند اثبات معادلات تعادل استاتیکی حاکم بر تیرهای خمیده در صفحه افق در مقاله ینگ و همکاران [۲۸] آورده شده است. حال، با اعمال فرضیات مطرح شده و نیز افزودن مؤلفه‌های دینامیکی ناشی از

³⁹ Warping torsion

حرکت جرم متحرک، معادلات تعادل دینامیکی حاکم بر سیستم تیر خمیده-جرم متحرک را می توان به صورت زیر بازنویسی نمود [۱۹،۲۴،۲۸]:

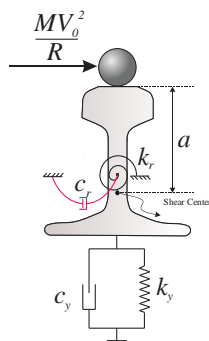
$$\mu \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} + EI_z \left(\frac{\partial^4 u_y}{\partial x^4} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} \right) - \frac{GJ}{R} \left(\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right) + k_y u_y + c_y \frac{\partial u_y}{\partial t} = -M \left(g + \frac{d^2 u_y}{dt^2} \right) \delta[x - V_0 t] \quad (1)$$

$$\rho I_o \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} - \frac{EI_z}{R} \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - \frac{\theta_x}{R} \right) - GJ \left(\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} \right) - k_r \theta_x - c_r \frac{\partial \theta_x}{\partial t} = T_0 \delta[x - V_0 t] \quad (2)$$

که در آن، μ جرم واحد طول تیر، E و G مدول الاستیسیته و مدول برشی مقطع، g شتاب جاذبه، d_z و I_o به ترتیب ممان اینرسی حول محور z ، ثابت پیچشی و ممان اینرسی قطبی مقطع و ρ چگالی تیر خمیده هستند. δ بیانگر تابع دلتای دیراک بوده و $d^2 u_y / dt^2$ ، مشتق کامل مرتبه دوم نسبت به زمان بوده که تعریف آن بر اساس رابطه (۳) است [۲۴]:

$$\frac{d^2 u_y}{dt^2} = \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} + V_0^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + 2V_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial t} \quad (3)$$

همچنین مطابق شکل ۲، T_0 پیچش متمرکز ناشی از خروج از مرکزیت مؤلفه نیروی مرکزگرا در حد فاصل تراز فوقانی مقطع تیر خمیده نسبت به مرکز برش آن، a بوده [۲۹،۳۰] و از رابطه (۴) محاسبه می شود:



شکل ۲: مؤلفه لنگر پیچشی اعمال شده به مقطع تیر خمیده ناشی از حرکت جرم متحرک.

$$T_0 = \frac{MV_0^2}{R} a \quad (4)$$

قابل ذکر است در روابط (۱) و (۲)، اثر مربوط به پیچش متمرکز T_0 ، سختی و میرایی پیچشی و همچنین اثر مؤلفه های ناشی از اینرسی جرم متحرک توسط نگارندگان در نظر گرفته شده اند و اثر مربوط به سایر مؤلفه های تاثیرگذار در این روابط در مراجع فوق الذکر بیان و فرمول بندی شده است. همچنین لازم به ذکر است که معادلات دینامیکی درون صفحه و خارج از صفحه تیرهای خمیده غیرهمبسته بوده، و به تبع آن، رفتار خارج از صفحه می تواند مستقل از رفتار درون صفحه ارزیابی شود [۳۱]. همچنین، اعمال لنگر پیچشی تغییری در معادلات تعادل درون صفحه تیرهای خمیده ایجاد نخواهد کرد و لذا روش حل مسئله صرفاً متکی بر درجات آزادی خارج از صفحه می باشد.

۳- روش حل مسئله

روش جداسازی متغیرها به عنوان یکی از روش‌های شناخته شده در حل مسائل دینامیکی مربوط به تحریک ناشی از جرم متحرک بر روی تیرهای خمیده می‌باشد که در آن بر اساس شرایط تکیه‌گاهی حاکم بر مسئله از توابع مناسب در برآورد پاسخ سیستم استفاده می‌شود. با توجه به معادلات حاکم بر ارتعاش خارج از صفحه تیرهای خمیده در صفحه افق و شرایط تکیه‌گاهی مفصلی برای دو انتهای تیر می‌توان از بسط سینوسی استفاده نمود [۱۹، ۲۵، ۳۱، ۳۲]:

$$u_y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} T_{yi}(t) \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \quad (5)$$

$$\theta_x(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \theta_{xi}(t) \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \quad (6)$$

که در آن، $T_{yi}(t)$ و $\theta_{xi}(t)$ به ترتیب بیانگر توابع تعمیم‌یافته دامنه متناظر با جابه‌جایی خارج از صفحه و دوران پیچشی مود i -ام تیرهای خمیده هستند. با جایگذاری معادلات (۵) و (۶) در معادلات تعادل اصلی، معادلات (۱) و (۲)، و سپس انتگرال‌گیری در طول تیر خمیده و با استفاده از خاصیت تعامد مودها، می‌توان فرم ماتریسی زیر را برای معادلات تعادل حاکم مطرح نمود که به صورت دستگاهی از $2N$ معادله دیفرانسیل معمولی بوده که ضرایب آن تابع زمان هستند و با استفاده از روش‌های عددی متداول حل خواهند شد.

$$\mathbf{M}(t) \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{T}}(t) \\ \ddot{\boldsymbol{\Theta}}(t) \end{Bmatrix} + \mathbf{C}(t) \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{T}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\Theta}}(t) \end{Bmatrix} + \mathbf{K}(t) \begin{Bmatrix} \mathbf{T}(t) \\ \boldsymbol{\Theta}(t) \end{Bmatrix} = \mathbf{F}(t) \quad (7)$$

در رابطه فوق، $\mathbf{M}(t)$ ، $\mathbf{C}(t)$ ، و $\mathbf{K}(t)$ به ترتیب ماتریس‌های معادل برای جرم، میرایی و سختی سیستم و نیز بیانگر ماتریس نیروهای وارده به سیستم است. جزئیات بیشتر مربوط به نحوه محاسبه و مقدار درایه‌های ماتریس‌های فوق در مقاله عبدوس و همکاران [۲۴] آورده شده، با این تفاوت که تغییرات لازم متناظر با تأثیر مؤلفه لنگر پیچشی در درایه‌های ماتریس نیرو اعمال شده است. به منظور حل برخی از معادلات پیچیده، مانند معادلات حاکم بر سیستم‌های دینامیکی، متداول است از نمایش فضای حالت^{۴۰} استفاده شود و این موضوع روند حل عددی را در برنامه‌های کامپیوتری تسهیل می‌بخشد. از این ویژگی برای تیرهای خمیده در صفحه افق نیز استفاده شده که فرم کلی آن برای معادله دیفرانسیل مرتبه اول مطابق رابطه (۸) است [۳۳-۴۰]:

$$\dot{\mathbf{Z}}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{Z}(t) + \mathbf{Q}(t) \quad (8)$$

که در آن،

$$\mathbf{Z}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{T}(t) \\ \boldsymbol{\Theta}(t) \\ \dot{\mathbf{T}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\Theta}}(t) \end{Bmatrix}_{4N \times 1} \quad (9)$$

$$\mathbf{W}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}(t)\mathbf{K}(t) & -\mathbf{M}^{-1}(t)\mathbf{C}(t) \end{bmatrix}_{4N \times 4N} \quad (10)$$

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}(t)\mathbf{F}(t) \end{bmatrix}_{4N \times 1} \quad (11)$$

⁴⁰ State-space

که در آن، \mathbf{I} ماتریس همانی از مرتبه $2N$ است. به منظور حل عددی رابطه (۸)، از روش ماتریس انتقال استفاده می‌شود که بر مبنای آن، بردار $\mathbf{Z}(t)$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$\mathbf{Z}(t) = \Psi(t, t_0)\mathbf{Z}(t_0) + \int_{t_0}^t \Psi(t, \tau)\mathbf{Q}(\tau) d\tau \quad (12)$$

در معادله (۱۲)، شرایط اولیه در زمان t_0 تعیین و سپس ماتریس $\Psi(t, t_0)$ به عنوان ماتریس انتقال با ابعاد مناسب انتخاب شده است. سپس با انتخاب گام‌های زمانی به اندازه کافی کوچک، می‌توان شرایط اولیه گام‌های بعدی (t_{k+1}) را بر اساس وضعیت نهایی مرحله قبل از آن (t_k) در نظر گرفت. لذا می‌توان نوشت:

$$\mathbf{Z}(t_{k+1}) = \Psi(t_{k+1}, t_k)\mathbf{Z}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Psi(t_{k+1}, \tau)\mathbf{Q}(\tau) d\tau \quad (13)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، رابطه (۱۳) یک معادله تفاضلی در دامنه زمانی بوده که برای بردار حالت $\mathbf{Z}(t)$ بیان شده است. همچنین، با دقت مناسبی می‌توان ماتریس انتقال را به صورت زیر تقریب زد [۳۹]:

$$\Psi(t_{k+1}, t_k) = \exp[(t_{k+1} - t_k)\mathbf{W}(t_k)] \quad (14)$$

با ادامه این روند گام به گام، معادله (۱۲) فرم کلی زیر را خواهد داشت [۳۹]:

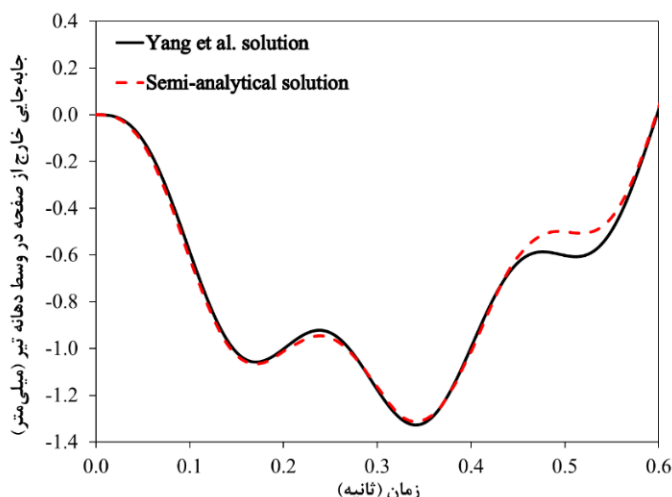
$$\mathbf{Z}(t_{k+1}) = \Psi(t_{k+1}, t_k)\mathbf{Z}(t_k) + [\Psi(t_{k+1}, t_k) - \mathbf{I}]\mathbf{W}^{-1}(t_k)\mathbf{Q}(t_k) \quad (15)$$

پس از مشخص شدن روند حل عددی، اطمینان از عملکرد آن بر اساس صحت‌سنجی، در بخش ۴ مقاله، ارزیابی می‌شود.

۴- صحت‌سنجی مدل نیمه تحلیلی

به منظور بررسی صحت مدل نیمه تحلیلی تیرهای خمیده تحت بارگذاری ناشی از جرم متحرک، پاسخ مبتنی بر روش پیشنهادی این مطالعه با نتایج مطالعات تحلیلی موجود در ادبیات فنی مقایسه می‌شود. در این راستا، مدل تحلیلی ینگ و همکاران [۱۱، ۳۲] به عنوان مبنای صحت‌سنجی انتخاب شده که در آن، یک تیر دو سر ساده خمیده در صفحه افق به طول ۲۴ متر و زاویه مرکزی ۳۰ درجه، تحت اثر بار متحرک متمرکز به جرم ۲۹/۹ تن و سرعت ۴۰ کیلومتر بر ساعت قرار دارد. مساحت مقطع تیر استفاده شده توسط ینگ و همکاران، ۹ مترمربع و ممان اینرسی آن حول محورهای y و z به ترتیب ۱۸،۷۵ و ۲،۴۳ متر به توان چهار می‌باشد. همچنین، مدول الاستیسیته و مدول برشی مقطع به ترتیب ۳۲/۲۰ و ۱۳/۸۳ گیگاپاسکال است. با در نظر گرفتن مشخصات هندسی و مکانیکی تیر خمیده تحت اثر بارگذاری وارده، جابه‌جایی خارج از صفحه در وسط دهانه تیر به عنوان پاسخ سیستم بر اساس رابطه تحلیلی ینگ و نیز مدل نیمه تحلیلی این مطالعه محاسبه و در شکل (۳) ترسیم شده است. لازم به ذکر است که پاسخ بر اساس مشارکت اولین مود ارتعاشی در نظر گرفته شده تا امکان مقایسه معنادار در فرایند صحت‌سنجی فراهم شود.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، مدل نیمه تحلیلی ارائه شده در این مطالعه مطابقت بالایی با پاسخ تحلیلی ینگ و همکاران دارد و به خوبی مقادیر کلیدی نمودار مانند جابه‌جایی خارج از صفحه حداکثر سیستم، دامنه و فاز ورود بار به تیر خمیده و نیز خروج از آن را پیش‌بینی نموده است. لذا، انتظار می‌رود نتایج حاصل از مطالعات پارامتری این پژوهش از دقت مطلوبی برخوردار باشد و بتوان از آن در تحلیل و طراحی تیرهای خمیده تحت تحریک جرم متحرک استفاده نمود.



شکل ۳: صحت‌سنجی مدل نیمه‌تحلیلی ارائه شده بر اساس مدل تحلیلی ینگ و همکاران [۱۱،۳۲] بر مبنای مقایسه مقادیر جابه‌جایی خارج از صفحه در وسط دهانه تیر خمیده.

۵- مطالعات پارامتری

پس از صحت‌سنجی و حصول اطمینان از دقت مطلوب پاسخ‌ها، مطالعات پارامتری بر اساس متغیرهای اثرگذار (۱) شعاع انحنای تیر خمیده، (۲) زاویه مرکزی تیر خمیده، (۳) جرم جسم، و (۴) سرعت جرم انجام می‌شود. همچنین، پارامترهای مربوط به بستر ویسکو-الاستیک مقادیری ثابت و بر اساس طبقه‌بندی مشخصی از خاک‌ها که در مطالعات پیشین به آنها استناد شده، انتخاب شده است. با توجه به اهمیت و کاربردی بودن مطالعات این پژوهش، مقطع تیرهای خمیده از نوع UIC-60 بوده که به عنوان یکی از مقاطع متداول در خطوط حمل و نقل ریلی شناخته می‌شود. مشخصات موردنیاز این مقطع که در روند محاسبات از آنها استفاده شده، در جدول (۱) آورده شده است.

| جدول ۱: مشخصات مقطع ریل UIC-60 [۴۱]. | | | |
|--------------------------------------|--------|--------|---------------------|
| متغیر | نماد | کمیت | واحد |
| سطح مقطع | A | ۷۶٫۷۰ | سانتی‌مترمربع |
| جرم واحد طول | μ | ۶۰٫۲۱ | کیلوگرم بر متر |
| چگالی | ρ | ۷۸۵۰ | کیلوگرم بر مترمکعب |
| مدول الاستیسیته | E | ۲۱۰ | گیگاپاسکال |
| مدول برشی | G | ۸۰٫۷۷ | گیگاپاسکال |
| ممان اینرسی حول محور z | I_z | ۳۰۳۸٫۳ | سانتی‌متر به توان ۴ |
| ممان اینرسی قطبی | I_o | ۳۵۵۰٫۶ | سانتی‌متر به توان ۴ |
| خروج از مرکزیت نیروی مرکزگرا | a | ۱۲٫۴۹ | سانتی‌متر |

مشخصات هندسی و دینامیکی متغیرهای اثرگذار در رفتار تیرهای خمیده تحت تحریک جرم متحرک که در مطالعات پارامتری از آنها استفاده شده، در جدول زیر خلاصه شده است.

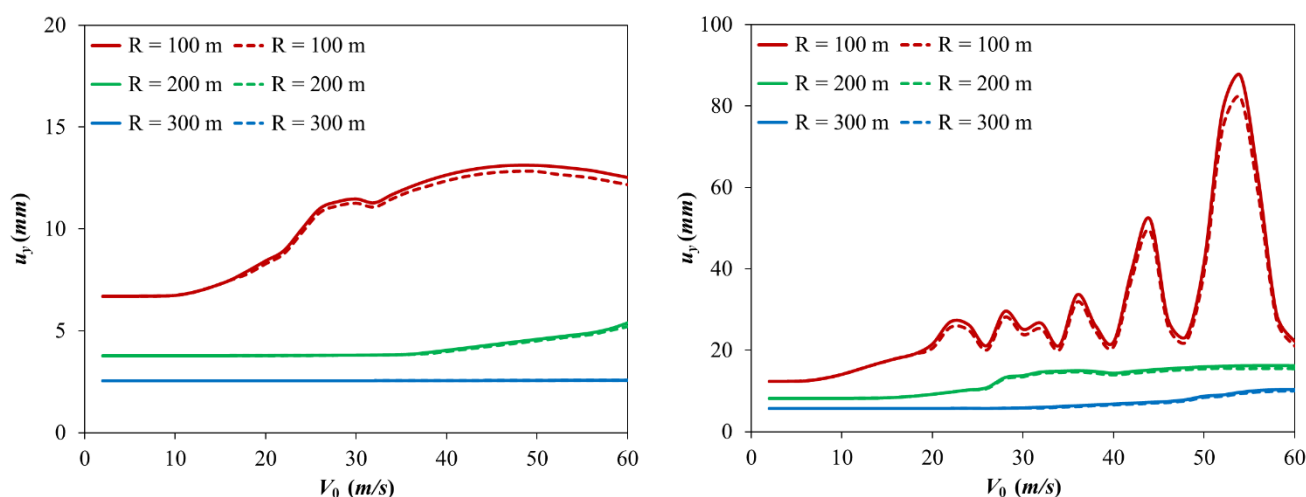
| جدول ۲: مشخصات متغیرها و مقادیر استفاده شده در مطالعات پارامتری. | | | | | |
|--|----------------------------|-------------|-----------|---------------------|--------------------|
| مرجع | واحد | کمیت | نماد | متغیر | جزء سیستم دینامیکی |
| [۴۲،۴۳] | متر | ۱۰۰-۲۰۰-۳۰۰ | R | شعاع انحنا تیر | تیر خمیده |
| [۲۴،۳۱] | درجه | ۳۰-۴۵-۶۰ | φ | زاویه مرکزی تیر | |
| [۲۴،۴۴] | تن | ۵-۱۰-۱۵ | M | جرم جسم | جسم متحرک |
| [۴۲،۴۳] | متر بر ثانیه | ۰-۶۰ | V_0 | سرعت جسم | |
| [۲۴،۴۵] | کیلونیوتن بر مترمربع | ۳۴۲۶ | k_y | سختی بستر ارتجاعی | بستر ویسکو-الاستیک |
| [۲۴،۴۵] | کیلونیوتن ثانیه بر مترمربع | ۲،۴۵ | c_y | میرایی بستر ارتجاعی | |
| [۱۹،۲۲] | کیلونیوتن بر رادیان | ۱۱۸،۳ | k_r | سختی پیچشی | |
| [۱۹،۲۲] | نیوتون رادیان بر ثانیه | ۸،۰۶۷ | c_r | میرایی پیچشی | |

به عنوان یکی از محدودیت‌های روش حل عددی پیشنهادی، در نظر گرفتن تعداد مودهای دینامیکی ناکافی در برآورد پاسخ سیستم است. بر اساس تحلیل حساسیت انجام شده توسط عبدوس و همکاران [۲۴] و فیوضات و همکاران [۳۱] پیرامون تعیین تعداد مودهای دینامیکی مؤثر در رفتار تیرهای خمیده در صفحه افق، در نظر گرفتن ۲۰ مود اول می‌تواند برآورد مطلوبی، با دقت حداکثر تا دو رقم اعشار (دقت ۰/۰۱)، از پاسخ واقعی سیستم به همراه داشته باشد و با افزایش تعداد مودها بیشتر از ۲۰ مود، تغییرات محسوسی در پاسخ سیستم ایجاد نخواهد شد. لذا با استناد به این موضوع، محاسبات مربوط به تمامی پاسخ‌ها در این مطالعه با در نظر گرفتن ۲۰ مود دینامیکی اول صورت گرفته است. پس از معرفی و تعیین کمیت پارامترهای مطرح شده، مقادیر آنها در برنامه کامپیوتری جایگذاری شده و خروجی به صورت طیف پاسخ، تغییرات جابه‌جایی خارج از صفحه و نیز لنگر خمشی بر حسب تغییرات سرعت جسم متحرک ارائه خواهد شد. لازم به ذکر است که در کنار محدودیت فوق‌الذکر، به عنوان یکی از مزیت‌های مهم روش نیمه‌تحلیلی پیشنهادی این مطالعه، می‌توان به سرعت همگرایی بالای روش حل عددی و نیز هزینه محاسباتی نسبتاً کم آن با توجه به محدود بودن تعداد مودهای دینامیکی در نظر گرفته شده اشاره نمود.

در ادامه و در شکل‌های (۴) تا (۹)، نمودارهای مربوط به طیف پاسخ در قالب سه گروه مختلف ارائه می‌شوند که در آنها به ترتیب، تغییرات (۱) شعاع انحنای تیر، (۲) زاویه مرکزی تیر، و (۳) جرم جسم متحرک به ازای تغییرات سرعت آن نشان داده شده است. در هر نمودار، منحنی‌های توپر بیانگر پاسخ سیستم با در نظر گرفتن مؤلفه لنگر پیچشی بوده و منحنی‌هایی که با خط‌چین ترسیم شده‌اند، در آنها از اثر لنگر پیچشی صرف‌نظر شده است. لذا با مقایسه این دو گروه از منحنی‌ها می‌توان پیرامون تأثیر مؤلفه لنگر پیچشی و پارامترهای اثرگذار در پاسخ سیستم اظهار نظر نمود.

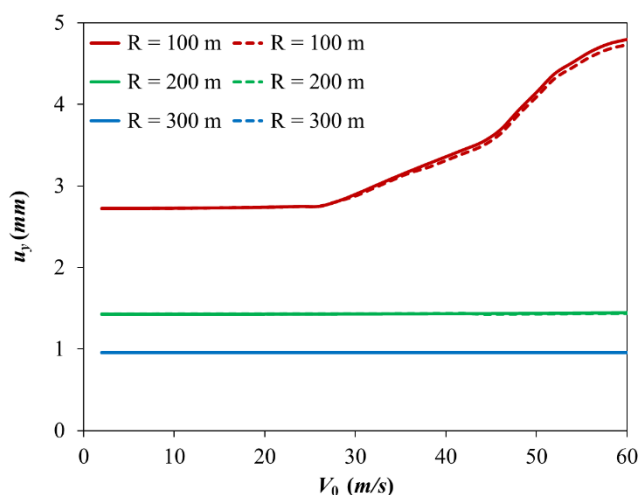
۵-۱- طیف پاسخ جابه‌جایی خارج از صفحه

- بررسی اثر شعاع انحنا



(ب) جرم ۱۰ تن و زاویه مرکزی ۴۵ درجه

(الف) جرم ۱۵ تن و زاویه مرکزی ۳۰ درجه

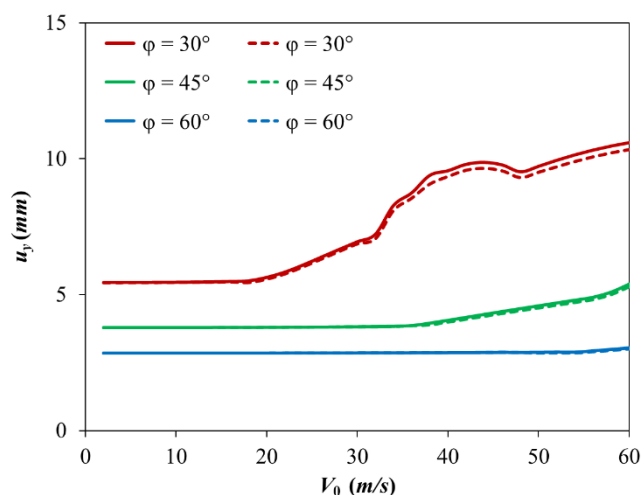


(ج) جرم ۵ تن و زاویه مرکزی ۶۰ درجه

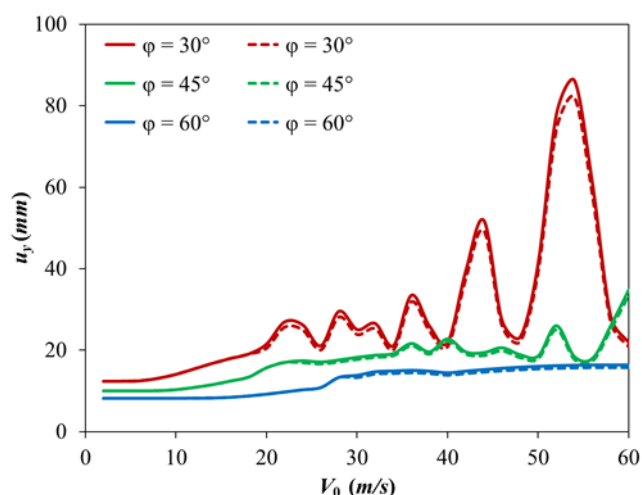
شکل ۴: بررسی تأثیر شعاع انحنای تیر بر جابه‌جایی خارج از صفحه تیرهای خمیده در صفحه افق.

با مشاهده نمودارهای گروه اول می‌توان دریافت که با افزایش شعاع تیر، مقادیر جابه‌جایی خارج از صفحه وارده به تیر کاهش می‌یابد. همچنین، با کاهش شعاع قوس تیر، صعود طیف پاسخ جابه‌جایی سیستم به ازای سرعت‌های کمتری رخ می‌دهد. لازم به ذکر است که بیشترین جابه‌جایی خارج از صفحه در حالت با و بدون اثر لنگر پیچشی در تیر خمیده به شعاع ۱۰۰ متر، زاویه مرکزی ۳۰ درجه و تحت تحریک جرم ۱۵ تن رخ داده و این مقادیر به ترتیب حدوداً ۸۷٫۴۲ و ۸۲٫۰۶ میلی‌متر می‌باشند و نشانگر تأثیر حدوداً ۶ درصدی مؤلفه لنگر پیچشی بر جابه‌جایی حداکثر سیستم است.

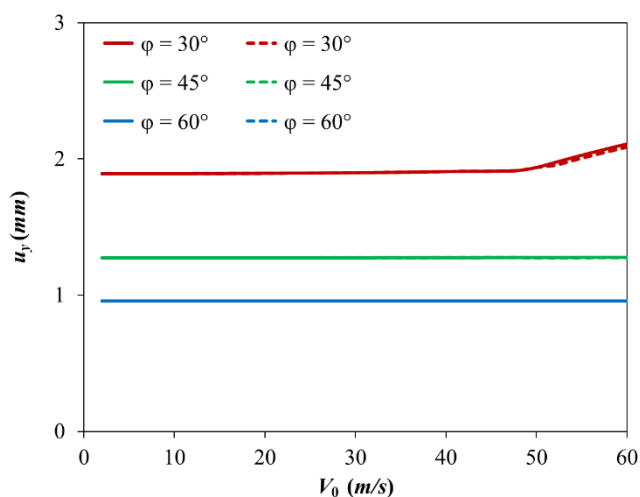
• بررسی اثر زاویه مرکزی



(ب) جرم ۱۰ تن و شعاع ۲۰۰ متر



(الف) جرم ۱۵ تن و شعاع ۱۰۰ متر

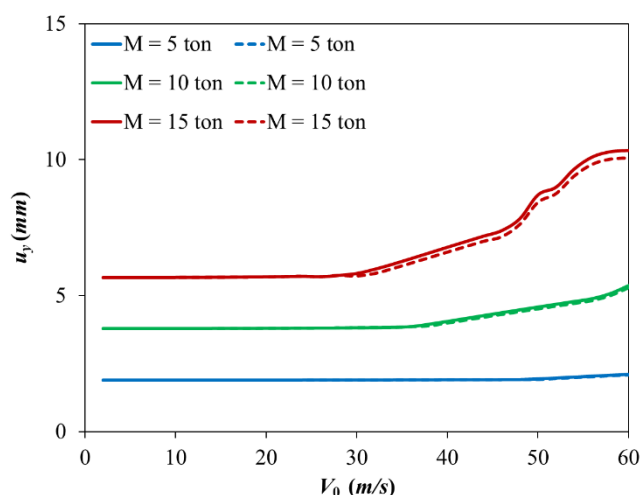


(ج) جرم ۵ تن و شعاع ۳۰۰ متر

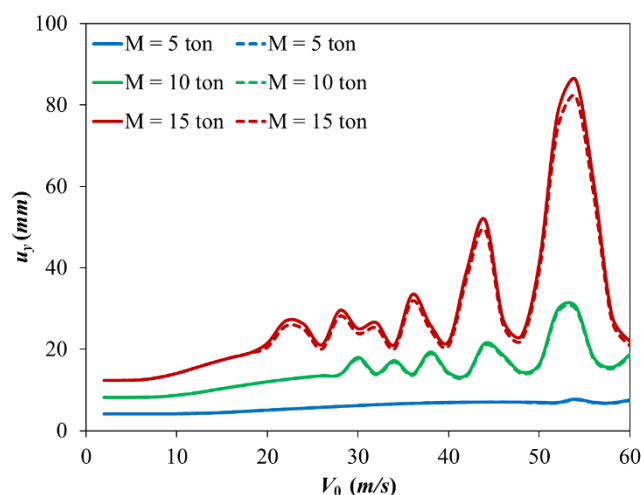
شکل ۵: بررسی تأثیر زاویه مرکزی تیر بر جابه‌جایی خارج از صفحه تیرهای خمیده در صفحه افق.

با افزایش زاویه مرکزی تیرهای خمیده در یک شعاع ثابت، بر اساس نمودارهای شکل ۵، مقادیر جابه‌جایی خارج از صفحه کاهش می‌یابد. با افزایش زاویه مرکزی تیر از شدت تأثیر لنگر پیچشی در پاسخ سیستم کاسته می‌شود تا حدی که در تیرهای خمیده با طول بیشتر از ۳۰۰ متر، اثر آن در تغییرات جابه‌جایی سیستم کمتر از یک درصد می‌باشد.

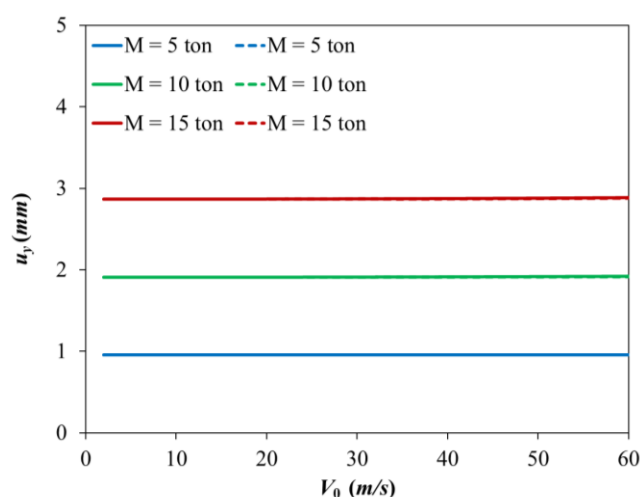
• بررسی اثر جرم جسم



(ب) شعاع ۲۰۰ متر و زاویه مرکزی ۴۵ درجه



(الف) شعاع ۱۰۰ متر و زاویه مرکزی ۳۰ درجه



(ج) شعاع ۳۰۰ متر و زاویه مرکزی ۶۰ درجه

شکل ۶: بررسی تأثیر جرم جسم متحرک بر جابه‌جایی خارج از صفحه تیرهای خمیده در صفحه افق.

بر اساس نمودارهای شکل ۶ می‌توان دریافت که با افزایش جرم جسم متحرک، مقادیر جابه‌جایی خارج از صفحه تیرهای خمیده افزایش یافته است. مطابق شکل ۶-ج، برای تیرهای با دهانه بلند، اثرات دینامیکی جرم متحرک ناچیز بوده، به طوری که با افزایش سرعت، تغییرات محسوسی در جابه‌جایی خارج از صفحه تیرهای خمیده مشاهده نمی‌شود.

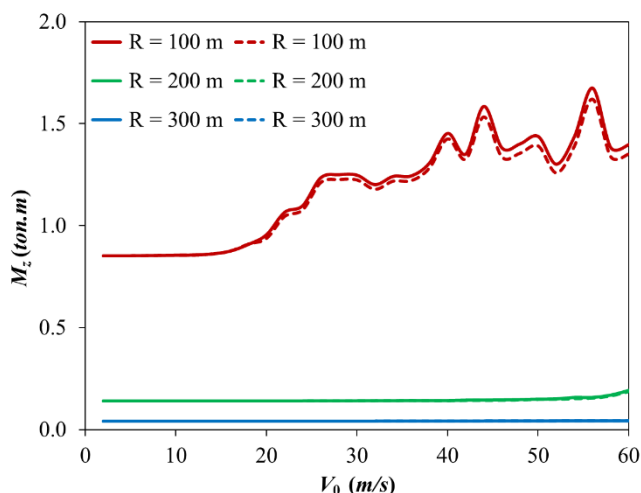
۲-۵- طیف پاسخ لنگر خمشی

به منظور تعیین لنگر خمشی تیرهای خمیده در صفحه افق از رابطه زیر استفاده می‌شود:

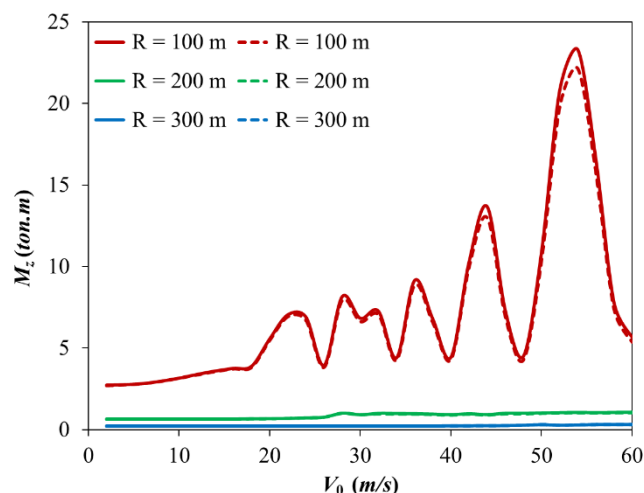
$$M_z = EI_z \left(u_y'' - \frac{\theta_x}{R} \right) \quad (16)$$

در ادامه، مانند بخش ۵-۱ به ترتیب اثر شعاع انحنا و زاویه مرکزی تیر و نیز جرم جسم متحرک بر لنگر خمشی ارائه شده است.

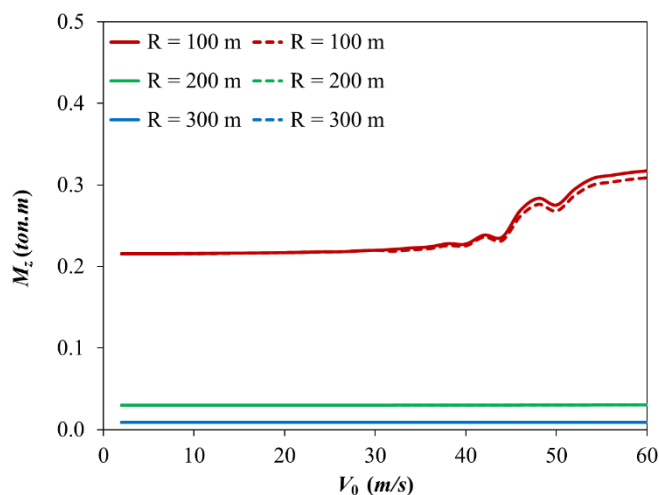
• بررسی اثر شعاع انحنا



(ب) جرم ۱۰ تن و زاویه مرکزی ۴۵ درجه



(الف) جرم ۱۵ تن و زاویه مرکزی ۳۰ درجه

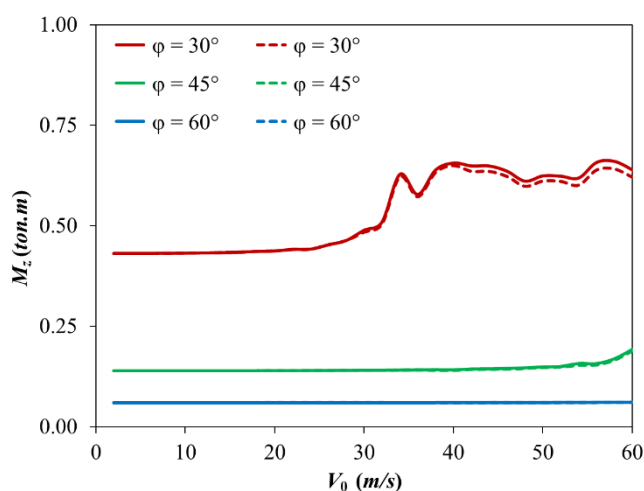


(ج) جرم ۵ تن و زاویه مرکزی ۶۰ درجه

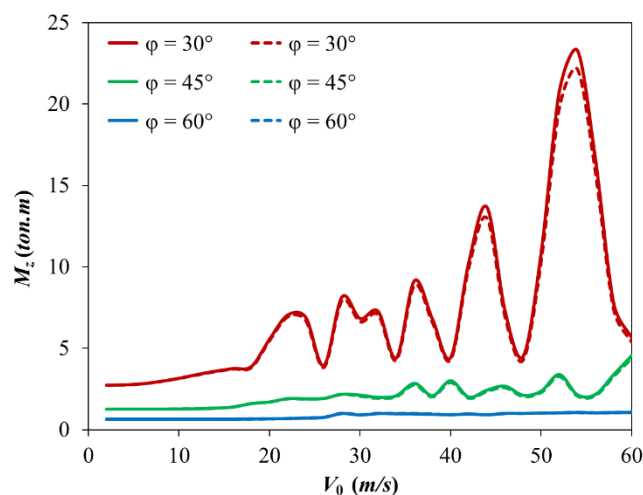
شکل ۷: بررسی تأثیر شعاع انحناى تیر بر لنگر خمشی تیرهای خمیده در صفحه افق.

با کاهش شعاع تیرهای خمیده، اثرات ناشی از جرم متحرک در مقادیر لنگر خمشی حداکثر محسوس تر بوده و به ازای شعاع ۱۰۰ متر، سیستم رفتار دینامیکی شدیدتری را نسبت به سایر موارد بررسی شده تجربه می‌کند و سرعت متناظر با شروع آن بر اساس نمودارهای ترسیمی به ترتیب ۱۰، ۲۰ و ۳۰ متر بر ثانیه است. همچنین، بیشترین لنگر خمشی ایجاد شده در مقطع در حالت با و بدون اثر لنگر پیچشی در تیر خمیده به شعاع ۱۰۰ متر، زاویه مرکزی ۳۰ درجه و تحت اثر جرم ۱۵ تن حاصل شده و این مقادیر به ترتیب حدوداً ۲۲/۳۰۵ و ۲۲/۱۳۵ میلی‌متر می‌باشند و بیانگر تأثیر حدوداً ۵ درصدی مؤلفه لنگر پیچشی بر حداکثر لنگر خمشی سیستم است.

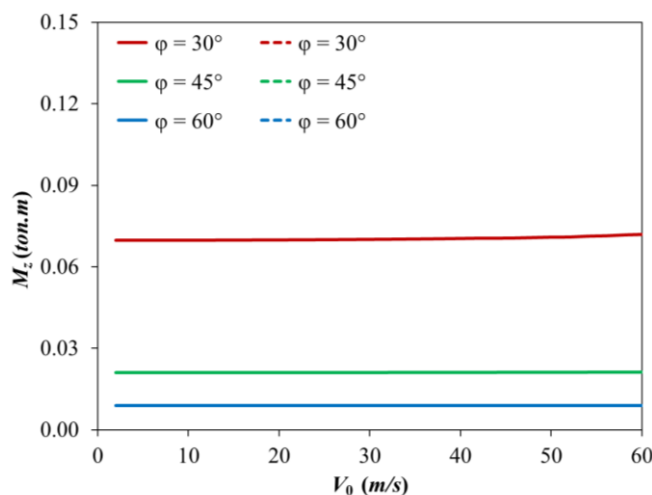
• بررسی اثر زاویه مرکزی



(ب) جرم ۱۰ تن و شعاع ۲۰۰ متر



(الف) جرم ۱۵ تن و شعاع ۱۰۰ متر

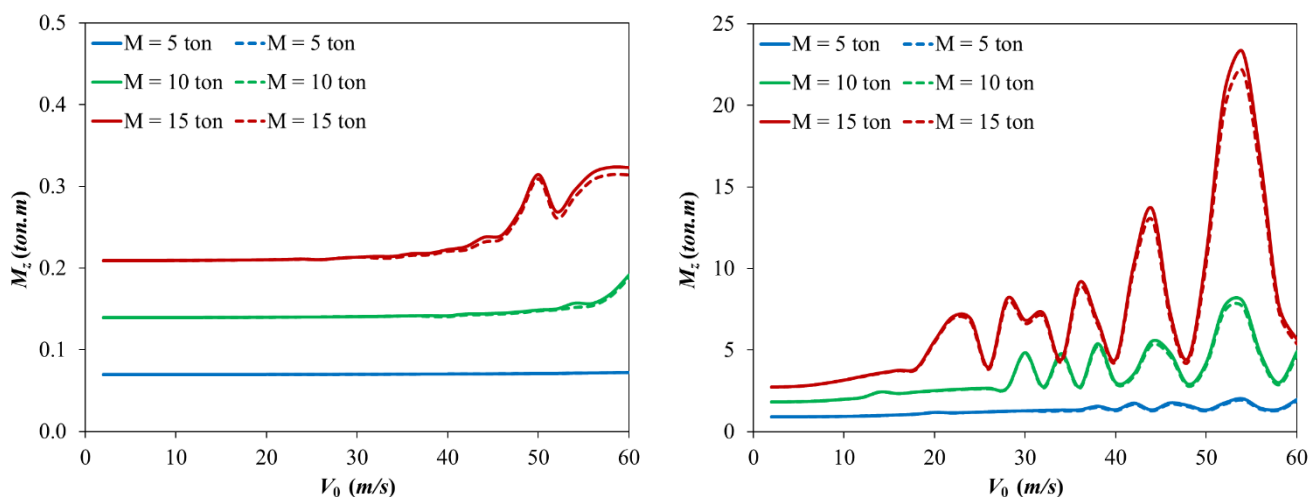


(ج) جرم ۵ تن و شعاع ۳۰۰ متر

شکل ۸: بررسی تأثیر زاویه مرکزی تیر بر لنگر خمشی تیرهای خمیده در صفحه افق.

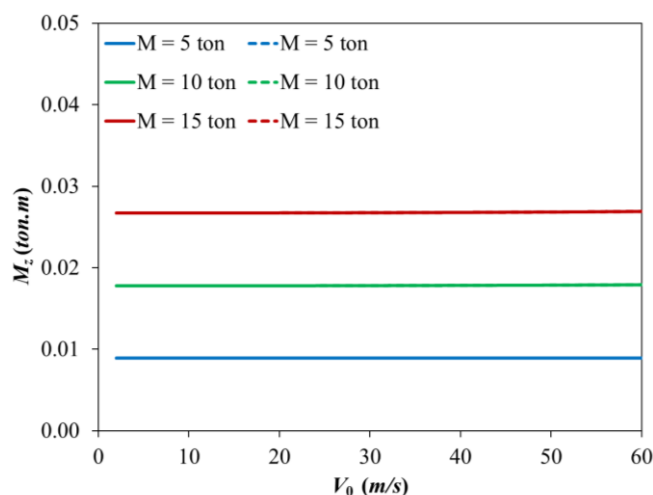
با افزایش زاویه مرکزی تیرهای خمیده و متعاقباً افزایش طول آن، مقادیر حداکثر لنگر خمشی تیر کاهش می‌یابد که نشانگر موضعی بودن تأثیر دینامیکی بار متحرک بر پاسخ سیستم است.

• بررسی اثر جرم جسم



(ب) شعاع ۲۰۰ متر و زاویه مرکزی ۴۵ درجه

(الف) شعاع ۱۰۰ متر و زاویه مرکزی ۳۰ درجه



(ج) شعاع ۳۰۰ متر و زاویه مرکزی ۶۰ درجه

شکل ۹: بررسی تأثیر جرم جسم متحرک بر لنگر خمشی تیرهای خمیده در صفحه افق.

بر اساس نمودارهای شکل ۹ می‌توان دریافت که با افزایش جرم جسم متحرک، مقادیر حداکثر لنگر خمشی تیر افزایش یافته است. در تیرهای خمیده با طول زیاد (شعاع و زاویه مرکزی زیاد)، تغییرات سرعت تأثیر ناچیزی بر رفتار دینامیکی سیستم دارد و به عبارت دیگر، تیر خمیده عملکردی مشابه تیرهای مستقیم خواهد داشت.

۳-۵- جمع‌بندی مطالعه پارامتری

نمودارهای بخش ۵-۲ بر اساس بخشی از مطالعات پارامتری انجام شده در این مطالعه ارائه شد و در آن تأثیر پارامترهای دینامیکی سیستم ارزیابی گردید. لذا به منظور تکمیل این مطالعات، مقادیر پاسخ، جابه‌جایی خارج از صفحه و لنگر خمشی، به ازای تمامی مقادیر بررسی شده در جدول ۳ آورده شده که دو ستون آخر آن بیانگر درصد اختلاف پاسخ ناشی از تأثیر مؤلفه لنگر پیچشی در پاسخ دینامیکی تیرهای خمیده در صفحه افق تحت تحریک ناشی از جرم متحرک است. بر اساس مقادیر این جدول، درصد اختلاف جابه‌جایی و لنگر خمشی با افزایش طول تیر (افزایش شعاع و زاویه مرکزی تیر) و نیز کاهش جرم جسم کاهش یافته است.

جدول ۳: بررسی تأثیر مؤلفه لنگر پیچشی بر پاسخ دینامیکی خارج از صفحه تیرهای خمیده در صفحه افق.

| درصد اختلاف* لنگر خمشی (%) | درصد اختلاف* جابه جایی (%) | بیشینه پاسخ بدون در نظر گرفتن لنگر پیچشی | | بیشینه پاسخ با در نظر گرفتن لنگر پیچشی | | پارامترهای دینامیکی مسئله | | |
|-------------------------------|-------------------------------|--|----------------------|--|----------------------|---------------------------|--------------------|------------|
| | | لنگر خمشی (تن متر) | جابه جایی (میلی متر) | لنگر خمشی (تن متر) | جابه جایی (میلی متر) | جرم (تن) | زاویه مرکزی (درجه) | شعاع (متر) |
| ۴٫۱۹ | ۱٫۸۸ | ۱٫۹۴۷ | ۷٫۶۵۹ | ۲٫۰۲۱ | ۷٫۸۰۶ | ۵ | | |
| ۴٫۴۱ | ۲٫۱۰ | ۷٫۶۶۳ | ۲۹٫۹۶۱ | ۸٫۰۱۷ | ۳۰٫۶۰۴ | ۱۰ | ۳۰ | |
| ۵٫۰۲ | ۶٫۱۴ | ۲۲٫۱۳۵ | ۸۲٫۰۵۶ | ۲۳٫۳۰۵ | ۸۷٫۴۲۱ | ۱۵ | | |
| ۱٫۴۴ | ۲٫۲۵ | ۰٫۶۴۰ | ۶٫۳۲۷ | ۰٫۶۴۹ | ۶٫۴۷۳ | ۵ | | |
| ۲٫۷۴ | ۳٫۰۷ | ۱٫۶۳۰ | ۱۲٫۷۱۹ | ۱٫۶۷۶ | ۱۳٫۱۲۱ | ۱۰ | ۴۵ | ۱۰۰ |
| ۳٫۳۶ | ۳٫۹۰ | ۴٫۴۰۳ | ۳۳٫۴۴۱ | ۴٫۵۵۶ | ۳۴٫۷۹۸ | ۱۵ | | |
| ۲٫۷۴ | ۱٫۳۸ | ۰٫۶۴۶ | ۴٫۷۹۳ | ۰٫۳۱۸ | ۴٫۷۹۵ | ۵ | | |
| ۲٫۸۴ | ۳٫۰۲ | ۰٫۷۴ | ۱۰٫۳۵۰ | ۰٫۶۶۵ | ۱۰٫۶۷۲ | ۱۰ | ۶۰ | |
| ۳٫۱۵ | ۳٫۷۷ | ۱٫۰۴۷ | ۱۵٫۷۸۴ | ۱٫۰۸۱ | ۱۶٫۴۰۲ | ۱۵ | | |
| ۱٫۰۷ | ۱٫۸۲ | ۰٫۳۱۲ | ۴٫۶۷۱ | ۰٫۳۱۵ | ۴٫۷۵۷ | ۵ | | |
| ۱٫۶۴ | ۲٫۳۹ | ۰٫۶۵۰ | ۱۰٫۳۳۲ | ۰٫۶۶۰ | ۱۰٫۵۸۵ | ۱۰ | ۳۰ | |
| ۳٫۴۷ | ۳٫۷۹ | ۱٫۰۳۵ | ۱۵٫۶۵۹ | ۱٫۰۷۳ | ۱۶٫۲۷۶ | ۱۵ | | |
| ۰٫۳۵ | ۱٫۱۰ | ۰٫۷۷۱ | ۲٫۰۸۹ | ۰٫۷۷۲ | ۲٫۱۱۳ | ۵ | | |
| ۱٫۷۸ | ۱٫۴۷ | ۰٫۱۸۸ | ۵٫۲۹۶ | ۰٫۱۹۱ | ۵٫۳۷۵ | ۱۰ | ۴۵ | ۲۰۰ |
| ۲٫۹۰ | ۲٫۶۰ | ۰٫۳۱۴ | ۱۰٫۰۶۸ | ۰٫۳۲۴ | ۱۰٫۳۳۷ | ۱۵ | | |
| ۰٫۰۲ | ۰٫۵۳ | ۰٫۰۳۰ | ۱٫۴۳۶ | ۰٫۰۳۰ | ۱٫۴۴۳ | ۵ | | |
| ۰٫۰۸ | ۱٫۰۰ | ۰٫۰۶۱ | ۳٫۰۱۱ | ۰٫۰۶۱ | ۳٫۰۴۱ | ۱۰ | ۶۰ | |
| ۰٫۲۴ | ۱٫۹۴ | ۴٫۹۷۶ | ۴٫۹۷۲ | ۰٫۰۹۴۷ | ۵٫۰۷۰ | ۱۵ | | |
| ۰٫۰۳ | ۱٫۰۶ | ۰٫۰۷۲ | ۲٫۰۸۸ | ۰٫۰۷۲ | ۲٫۱۱۰ | ۵ | | |
| ۰٫۱۱ | ۱٫۸۸ | ۰٫۱۹۲ | ۵٫۲۷۹ | ۰٫۱۹۲ | ۵٫۳۸۰ | ۱۰ | ۳۰ | |
| ۰٫۱۵ | ۳٫۰۶ | ۰٫۳۲۴ | ۱۰٫۰۳۰ | ۰٫۳۲۴ | ۱۰٫۳۴۶ | ۱۵ | | |
| ۰٫۰۴ | ۰٫۰۱ | ۰٫۰۲۱ | ۱٫۲۷۷ | ۰٫۰۲۱ | ۱٫۲۸۰ | ۵ | | |
| ۰٫۰۹ | ۰٫۰۵ | ۰٫۰۴۳ | ۲٫۵۷۰ | ۰٫۰۴۳ | ۲٫۵۷۱ | ۱۰ | ۴۵ | ۳۰۰ |
| ۰٫۱۵ | ۰٫۰۹ | ۰٫۰۶۴ | ۴٫۰۸۶ | ۰٫۰۶۵ | ۴٫۰۹۰ | ۱۵ | | |
| ۰٫۰۱ | ۰٫۰۲ | ۰٫۰۰۹ | ۰٫۹۵۹ | ۰٫۰۰۹ | ۰٫۹۵۹ | ۵ | | |
| ۰٫۰۳ | ۰٫۰۵ | ۰٫۰۱۸ | ۱٫۹۱۸ | ۰٫۰۱۸ | ۱٫۹۱۹ | ۱۰ | ۶۰ | |
| ۰٫۰۹ | ۰٫۱۱ | ۰٫۰۲۷ | ۲٫۸۸۲ | ۰٫۰۲۷ | ۲٫۸۸۵ | ۱۵ | | |

$$\text{رابطه درصد اختلاف: } \times 100 = \frac{\text{پاسخ بدون مؤلفه لنگر پیچشی} - \text{پاسخ با مؤلفه لنگر پیچشی}}{\text{پاسخ با مؤلفه لنگر پیچشی}} \times 100$$

۶- نتیجه گیری

در این مطالعه، اثرات دینامیکی ناشی از لنگر پیچشی در رفتار خارج از صفحه تیرهای خمیده در صفحه افق تحت تحریک ناشی از جرم متحرک ارزیابی شد. مهم‌ترین نتایج حاصل از این پژوهش در قالب موارد زیر بیان می‌شود:

(۱) در ابتدا، معادلات تعادل دینامیکی خارج از صفحه تیرهای خمیده تحت اثرات اینرسی جرم متحرک و با در نظر گرفتن مؤلفه لنگر پیچشی به عنوان یک نیروی خارجی بازنویسی شد.

(۲) با در نظر گرفتن شرایط تکیه‌گاهی و تعداد مودهای دینامیکی کافی، حل نیمه‌تحلیلی رفتار تیرهای خمیده تحت بارگذاری وارده بر اساس روش ماتریس انتقال ارائه شد.

(۳) در فرایند صحت‌سنجی، عملکرد مدل نیمه‌تحلیلی بر مبنای مطالعات پیشین در ادبیات فنی ارزیابی شد که مؤید دقت بالای روش مطرح شده در این پژوهش است.

(۴) با در نظر گرفتن پارامترهای اثرگذار شعاع و زاویه مرکزی تیر و نیز جرم و سرعت جسم متحرک، مطالعات پارامتری انجام شد که بر اساس نتایج آن، در حالت کلی، با افزایش شعاع و زاویه مرکزی تیر خمیده، مقادیر جابه‌جایی حداکثر خارج از صفحه و لنگر خمشی کاهش یافته و با افزایش جرم جسم متحرک، سیستم جابه‌جایی و لنگر خمشی بیشتری را تجربه می‌کند.

(۵) با مقایسه طیف‌های پاسخ ترسیم شده و نیز مقادیر حاصل از مطالعات پارامتری می‌توان دریافت که تأثیر مؤلفه لنگر پیچشی در تیرهای با دهانه کوتاه (شعاع و زاویه مرکزی کمتر) بیشتر بوده و می‌تواند به ترتیب تا ۶ و ۵ درصد مقادیر جابه‌جایی خارج از صفحه و لنگر خمشی را افزایش دهد.

(۶) در تیرهای خمیده در صفحه افق و با شعاع بیشتر از ۳۰۰ متر، اثرات دینامیکی ناشی از جرم متحرک تقریباً ناچیز بوده و اثر افزایش سرعت در تغییر پاسخ دینامیکی محسوس نمی‌باشد. به عبارت دیگر، می‌توان برای تحلیل تیرهای خمیده با شعاع بیشتر از ۳۰۰ متر، از روابط مربوط به تیرهای مستقیم هم‌طول استفاده نمود.

(۷) در نظر گرفتن مؤلفه لنگر پیچشی در معادلات تعادل دینامیکی تیرهای خمیده در صفحه افق ارزیابی دقیق‌تری را از رفتار سیستم تحت اثر جرم متحرک دارد و به تبع آن، تحلیل و طراحی این سیستم‌ها را ایمن‌تر خواهد کرد.

مراجع

- [1] Frýba, L. (1972). *Vibration of solids and structures under moving loads*.
- [2] Ouyang, H. (2011). Moving-load dynamic problems: a tutorial (with a brief overview), *Mechanical systems and Signal Processing*, 25(6), pp. 2039–2060.
- [3] Tan, C. P. and Shore, S. (1968). Response of horizontally curved bridge to moving load, *Journal of Structural Division*.
- [4] Wang, T. M. and Brannen, W. F. (1982). Natural frequencies for out-of-plane vibrations of curved beams on elastic foundations, *Journal of Sound and Vibration*, 84, pp. 241–246.
- [5] Issa, M. S. (1988). Natural frequencies of continuous curved beams on Winkler-type foundation, *Journal of Sound and Vibration*, 127(2), pp. 291–301.
- [6] Issa, M. S., Nasr, M. E., and Naiem, M. A. (1990). Free vibrations of curved Timoshenko beams on Pasternak foundations, *International Journal of Solids and Structures*, 26(11), pp. 1243–1252.

- [7] Kang, K., Bert, C. W., and Striz, A. G. (1996). Vibration analysis of horizontally curved beams with warping using DQM, *Journal of Structural Engineering*, 122(6), pp. 657–662.
- [8] Huang, D., Wang, T.-L., and Shahawy, M. (1998). Vibration of horizontally curved box girder bridges due to vehicles, *Computers and Structures*, 68(5), pp. 513–528.
- [9] Howson, W. P. and Jemah, A. K. (1999). Exact out-of-plane natural frequencies of curved Timoshenko beams, *Journal of Engineering Mechanics*, 125(1), pp. 19–25.
- [10] Lee, B. K., Mo, J. M., Jin, T. K., and Lee, J. M. (2000). Free Vibrations of Horizontally Curved Beams Resting on Winkler Type Foundation, *Computing in Civil and Building Engineering*, pp. 74–81.
- [11] Yang, Y.-B., Wu, C.-M., and Yau, J.-D. (2001). Dynamic response of a horizontally curved beam subjected to vertical and horizontal moving loads, *Journal of Sound and Vibration*, 242(3), pp. 519–537.
- [12] Shamalta, M. and Metrikine, A. V. (2003). Analytical study of the dynamic response of an embedded railway track to a moving load, *Archive of Applied Mechanics*, 73(1–2), pp. 131–146.
- [13] Wu, J.-S. and Chiang, L.-K. (2003). Out-of-plane responses of a circular curved Timoshenko beam due to a moving load, *International Journal of Solids and Structures*, 40(26), pp. 7425–7448.
- [14] Nallasivam, K., Dutta, A., and Talukdar, S. (2007). Dynamic analysis of horizontally curved thin-walled box-girder bridge due to moving vehicle, *Shock and Vibration*, 14(3), pp. 229–248.
- [15] Khaloo, A. R. and Kafimosavi, M. (2007). Enhancement of flexural design of horizontally curved prestressed bridges, *Journal of Bridg Engineering*, 12(5), pp. 585–590.
- [16] Kim, N.-I., Fu, C. C., and Kim, M.-Y. (2007). Dynamic stiffness matrix of non-symmetric thin-walled curved beam on Winkler and Pasternak type foundations, *Advances in Engineering Software*, 38(3), pp. 158–171.
- [17] Çalim, F. F. and Akkurt, F. G. (2011). Static and free vibration analysis of straight and circular beams on elastic foundation”, *Mechanics Research Communications*, 38(2), pp. 89–94.
- [18] Li, K. F., Liu, W. N., Markine, V., and Han, Z. W. (2013). Analytical study on the dynamic displacement response of a curved track subjected to moving loads, *Journal of Zhejiang University SCIENCE A*, 14(12), pp. 867–879.
- [19] Dai, J. and Ang, K. K. (2015). Steady-state response of a curved beam on a viscously damped foundation subjected to a sequence of moving loads, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, 229(4), pp. 375–394.
- [20] Kutlu, A., Ermis, M., Eratlı, N., and Omurtag, M. H. (2017). Forced Vibration of a Planar Curved Beam on Pasternak Foundation, *International Journal of Structural and Construction Engineering*, 11(7), pp. 981–987.
- [21] Du, L., Liu, W., Liu, W., and Ma, L. (2017). Study on dynamic characteristics of a curved track subjected to harmonic moving loads, *Procedia Engineering*, 199, pp. 2639–2644.
- [22] Liu, W., Du, L., Liu, W., and Thompson, D. J., “Dynamic response of a curved railway track subjected to harmonic loads based on the periodic structure theory”, *Proc. Inst. Mech. Eng. Part F J. Rail Rapid Transit*, 232(7), pp. 1932–1950 (2018).
- [23] Li, S. H. and Ren, J. Y. (2018). Analytical study on dynamic responses of a curved beam subjected to three-directional moving loads, *Applied Mathematical Modelling*, 58, pp. 365–387.
- [24] Abdoos, H., Khaloo, A. R., and Foyouzat, M. A. (2020). On the out-of-plane dynamic response of horizontally curved beams resting on elastic foundation traversed by a moving mass, *Journal of Sound and Vibration*, p. 115397.
- [25] Luo, J., Zhu, S., and Zhai, W. (2022). Formulation of curved beam vibrations and its extended application to train-track spatial interactions, *Mechanical systems and Signal Processing*, 165, p. 108393.
- [26] Piovan, M. T., Cortinez, V. H., and Rossi, R. E. (2000). Out-of-plane vibrations of shear deformable continuous horizontally curved thin-walled beams, *Journal of Sound and Vibration*, 237(1), pp. 101–118.
- [27] Yau, J.-D., Wu, Y.-S., and Yang, Y.-B. (2001). Impact response of bridges with elastic bearings to moving loads, *Journal of Sound and Vibration*, 248(1), pp. 9–30.
- [28] Yang, Y.-B. and Kuo, S.-R. (1987). Effect of curvature on stability of curved beams, *Journal of Structural Engineering*, 113(6), pp. 1185–1202.
- [29] Cannon, D. F., Edel, K., Grassie, S. L., and Sawley, K. (2003). Rail defects: an overview, *Fatigue and Fracture of Engineering materials & Structures*, 26(10), pp. 865–886.
- [30] Jeong, D. Y. (2003). Correlations between rail defect growth data and engineering analyses, Part II: Field tests.
- [31] Foyouzat, M. A., Abdoos, H., Khaloo, A. R., and Mofid, M. (2022). “In-plane vibration analysis of horizontally curved beams resting on visco-elastic foundation subjected to a moving mass”, *Mechanical systems and Signal*

- Processing*, 172, p. 109013.
- [32] Yang, Y.-B., Yau, J. D., Yao, Z., and Wu, Y. S. (2004). *Vehicle-Bridge Interaction Dynamics: With Applications to High-Speed Railways*, World Scientific.
- [33] Foyouzat, M. A., Estekanchi, H. E., and Mofid, M. (2018). An analytical-numerical solution to assess the dynamic response of viscoelastic plates to a moving mass, *Applied Mathematical Modelling*, 54, pp. 670–696.
- [34] Hirzinger, B., Adam, C., and Salcher, P. (2020). Dynamic response of a non-classically damped beam with general boundary conditions subjected to a moving mass-spring-damper system, *International Journal of Mechanical Sciences*, 185, p. 105877.
- [35] Moradi, S., Azam, S. E., and Mofid, M. (2021). On Bayesian active vibration control of structures subjected to moving inertial loads, *Engineering Structures*, 239, p. 112313.
- [36] Azam, S. E., Didyk, M. M., Linzell, D., and Rageh, A. (2022). Experimental validation and numerical investigation of virtual strain sensing methods for steel railway bridges, *Journal of Sound and Vibration*, 537, p. 117207.
- [37] Alile, M. R., Foyouzat, M. A., and Mofid, M. (2022). Vibration of a Circular plate on Pasternak foundation with variable modulus due to moving mass, *Structural Engineering and Mechanics*, 83, pp. 757-770.
- [38] Khaloo, A. R., Foyouzat, M. A., Abdoos, H., and Mofid, M. (2023). Axial force contribution to the out-of-plane response of horizontally curved beams under a moving mass excitation. *Applied Mathematical Modelling*, 115, pp. 148–172.
- [39] Brogan, W. L. (1991). *Modern Control Theory*, Pearson education india.
- [40] Foyouzat, M. A. (2023). Separation/recontact investigation of a travelling oscillator over a plate with inclusion of surface roughness, *Thin-Walled Structures*, 183, p. 110373.
- [41] Vitez, I., Krumes, D., and Vitez, B. (2005). UIC-recommendations for the use of rail steel grades, *Metalurgija*, 44(2), pp. 137–140.
- [42] Square, E., & Dingwall, P. (1998). Track Standards Manual - Section 8: Track Geometry.
- [43] Division, T. P. (2009). MOD UK Railways Permanent Way Design and Maintenance Policy and Standards Issue 4, (4).
- [44] Barboteo, J. (2011). The sustainable freight railway: Designing the freight vehicle – track system for higher delivered tonnage with improved availability at reduced cost OVERVIEW OF COMMON FREIGHT WAGON VEHICLES, pp. 1–30.
- [45] Zarfam, R. and Khaloo, A. R. (2012). Vibration control of beams on elastic foundation under a moving vehicle and random lateral excitations, *Journal of Sound and Vibration*, 331(6), pp. 1217–1232.