Journal of Structural and Construction Engineering, 10(3), 2023, pp. 46-65

Journal of Structural and Construction Engineering

www.jsce.ir

Application of Radial Base Function Method to Investigate Seepage under the Dam in Steady and Unsteady Flow Conditions

Roghayeh Adami[1], Rasoul Daneshfaraz[2]*, Sina Sadeghfam[2], , Hamidreza Abbaszadeh[4], Mehdi Djahanghiri[5]

1- Graduated M.sc student of water and hydraulic structures engineering, Faculty of Engineering, University of Maragheh, Maragheh, Iran

2- Professor, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, University of Maragheh, Maragheh, Iran

3- Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, University of Maragheh, Maragheh, Iran

4- M.sc student of water and hydraulic structures engineering, Faculty of Engineering, University of Maragheh, Maragheh, Iran

5- Assistant Professor, Department of Mathematics, Faculty of Basic Science, University of Maragheh, Maragheh, Iran

ABSTRACT

Solving the problem with the meshless method is based on selecting a series of points from inside the computational area and boundaries without meshing. In the present study, the phenomenon of seepage below the dam under steady and unsteady flow conditions has been investigated by combining the Meshless method and the Finite Difference Method. Problem solving and calibrating operations were done by coding in MATLAB software. The Meshless method was used for spatial sentences and the Finite Difference Method was used for the discretization of temporal sentences. The results showed that the shape factor (α) for low points is 0.85 and for high points is 0.52, which indicates the proximity of the initial approximations to the main answer. Considering that, the shape factor depends on the geometry and the governing equation, so the same shape factor was obtained for the steady and unsteady conditions equal to 0.52. In the unsteady condition, with the water level behind the dam remaining constant, the water head below the dam also reaches a constant value over time. Also, examination of the results showed that in numerical problem solving, a low error is not a criterion and among the various basic functions, only the MQ function has the better hydraulic performance to draw equipotential lines, so that for 133 points, the shape factor and root mean square error index are 0.52 and 0.0108, respectively.

ARTICLE INFO

Receive Date: 14 June 2022
Revise Date: 02 August 2022
Accept Date: 09 August 2022

Keywords:
Radial Base Function Method
Finite Element Method
Seepage from the dam body
Steady and unsteady Flow

doi: https://doi.org/10.22065/jsce.2022.346671.2844

*Corresponding author: Rasoul Daneshfaraz.
Email address: daneshfaraz@maragheh.ac.ir

Journal of Structural and Construction Engineering
JSCE
نشریه علمی-پژوهشی مهندسی سازه و ساخت

نشریه مهندسی سازه و ساخت
(علمی – پژوهشی)
www.jsce.ir

انجمن مهندسی سازه ایران
ISSE

کاربرد روش تابع پایه شعاعی به‌منظور بررسی نشت از زیر سد در حالات جریان ماندگار و غیرماندگار

رقیه آدمی[1]، رسول دانشفراز[2*]، سینا صادق فام[3]، حمیدرضا عباس زاده[4]، مهدی جهانگیری[5]

۱- دانش آموخته کارشناسی ارشد عمران آب و سازه های هیدرولیکی، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه مراغه، مراغه، ایران

۲- استاد، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه مراغه، مراغه، ایران

۳- دانشیار، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه مراغه، مراغه، ایران

۴- دانشجوی کارشناسی ارشد عمران آب و سازه های هیدرولیکی، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه مراغه، مراغه، ایران

۵- استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه مراغه، مراغه، ایران

چکیده

حل مسئله به روش مش‌لس بر مبنای انتخاب یک سری نقاط از داخل ناحیه محاسباتی و مرزها بدون مش‌بندی صورت می‌گیرد. در پژوهش حاضر پدیده تراوش از زیر سد در شرایط جریان ماندگار و غیرماندگار با ترکیب روش مش‌لس و تفاضل محدود انجام یافته است. حل مسئله و عملیات کالیبره کردن با کدنویسی در برنامه متلب صورت پذیرفت. روش مش‌لس برای جملات مکانی و روش تفاضل محدود برای گسسته‌سازی جملات زمانی استفاده شد. نتایج نشان داد که ضریب شکل حاصل برای نقاط کم، ۰/۸۵ و نقاط زیاد ۰/۵۲ است که بیانگر نزدیکی تقریب‌های اولیه به جواب اصلی می‌باشد. با توجه به اینکه ضریب شکل به هندسه و معادله حاکم بستگی دارد بنابراین ضریب شکل یکسانی برای جریان ماندگار و غیرماندگار برابر با ۰/۵۲ به‌دست آمد. در جریان غیرماندگار با ثابت ماندن عمق آب پشت سد، هد آبی در زیر سد به مقدار ثابتی می‌رسد. نتایج نشان داد که در حل عددی مسائل، کم بودن میزان خطا ملاک نبوده و از میان توابع پایه مختلف، برای رسم خطوط هم پتانسیل فقط تابع MQ کارایی بهتری از نظر هیدرولیکی دارد به‌طوری‌که برای تعداد نقاط ۱۳۳، ضریب شکل و شاخص آماری خطای جذر میانگین مربعات خطا به‌ترتیب ۰/۵۲ و ۰/۰۱۰۸ است.

کلمات کلیدی: روش تابع پایه شعاعی، روش المان محدود، نشت از بدنه سد، جریان ماندگار و غیرماندگار

سابقه مقاله:					شناسه دیجیتال:	
دریافت	بازنگری	پذیرش	انتشار آنلاین	چاپ	https://doi.org/10.22065/jsce.2022.346671.2844	doi:
۱۴۰۱/۰۳/۲۴	۱۴۰۱/۰۵/۱۱	۱۴۰۱/۰۵/۱۸	۱۴۰۱/۰۵/۱۸	۱۴۰۲/۰۳/۳۱	10.22065/jsce.2022.346671.2844	

*نویسنده مسئول: رسول دانشفراز
پست الکترونیکی: daneshfaraz@maragheh.ac.ir

۱- مقدمه

روش‌های مختلفی برای حل معادلات دیفرانسیل از جمله روش تفاضل محدود، روش المان محدود، روش المان مرزی و روش حجم محدود توسط محققان ارائه شده است ([۴-۱]). از خصوصیات مشترک روش‌های فوق می‌توان به مرزبندی ناحیه حل و مش‌بندی اشاره نمود. عملیات حل مسئله از روی مش‌بندی صورت می‌گیرد بنابراین از عوامل محدود کننده این روش‌ها، وابستگی زیاد به نوع شبکه محاسباتی و مش‌بندی را می‌توان نام برد که به‌عنوان معایب در مسائل دو بعدی، سه بعدی و مسائل مهندسی با معادلات غیرخطی با منطقه مورد مطالعه پیچیده و نامنظم بروز می‌نماید ([۵، ۶]) حل معادله حاکم بر پدیده تراوش یکی از مسائل مطرح و پیچیده در هیدرولیک است. در سال‌های اخیر توسعه روش مش‌لس[1] ضعف وابستگی به مش را برطرف کرده است. در این روش تقریب‌های عددی حل معادله دیفرانسیلی، نه بر مبنای المان‌ها و روابط پیوستگی بین آن‌ها، بلکه بر مبنای مجموعه‌ای از نقاط انجام می‌پذیرد. هدف اصلی در روش‌های مش‌لس، حذف بخشی از ساختار سنتی در روش‌های مرسوم وابسته به مش می‌باشد. ایده اصلی در روش‌های مش‌لس، تقریب‌زنی تمامی میدان مسئله تنها با نقطه‌هاست. انواع مختلفی از روش مش‌لس توسعه یافته که هر کدام از این روش‌ها دارای معایب و مزایایی هستند. از میان روش‌های مختلف روش تابع پایه شعاعی به‌دلیل تک متغیره بودن از محبوبیت بیشتری در بین محققین برخوردار است. اولین بار کانسا [۷] از تقریب MQ[2] برای حل معادلات بیضوی، سهموی و هذلولوی استفاده کرد. بزتوسان و همکاران [۸] معادله انتقال- پخش [3] را با روش RBFCM[4] حل کرده و نتایج را با روش تفاضل محدود مقایسه کردند. این مطالعه نشان داد روشRBF در مقایسه با تفاضل محدود سریع‌تر به جواب می‌رسد. سارلر و همکاران [۹] مسئله همرفت طبیعی دارسی در محیط متخلخل را با روش RBFCM حل کرده و نتایج را با نتایج روش حجم محدود مقایسه و مطابقت مناسبی بین این دو روش مشاهده کردند. دورموش و همکاران [۱۰] روش مش‌لس با تابع پایه شعاعی را با استفاده از نرم‌افزار متلب برای حل معادله انتقال-پخش به‌کار گرفتند و انطباق عالی نتایج این روش را با نتایج روش‌های المان مرزی و تفاضل محدود گزارش دادند. هاشمی و حاتم [۱۱] روش RBF بر پایه روش دیفرانسیل کوادراتوره (Local RBF-DQ[5]) را به‌صورت عددی و به‌کارگیری نرم‌افزار متلب برای آنالیز جریان تراوش غیرماندگار از زیر سد به‌کار گرفتند. نتایج آن‌ها نشان داد که حل به روش Local RBF-DQ دقیق‌تر می‌باشد. ارشد و بابار [۱۲] ایمنی و تراوش از بدنه و زیر سد خاکی را با استفاده از روش المان محدود و با به‌کارگیری نرم‌افزار SEEP/W مورد بررسی قرار داده و موقعیت خط فریاتیک را در یک مقطع عرضی از سد در سه سطح کمینه، بیشینه و نرمال را شبیه‌سازی کردند. نتایج آن‌ها نشان دادند که تراوش از بدنه سد، زمانی که خط فریاتیک از معیارهای استاندارد طراحی تبعیت می‌کند، خطری برای ایمنی سد ایجاد نکرده و برای هر سه سطح کمینه، بیشینه و نرمال در مقطع عرضی، مقدار گرادیان در محدوده‌ی مجاز (کمتر از ۱) می‌باشد. هدایتی و همکاران [۱۳] پی و بدنه سد گردانلو را در نرم‌افزار SEEP/W مدل کرده و پتانسیل تراوش آب، در موقعیت‌های مختلف و عمق‌های مختلف دیوار آبند را براساس تجزیه و تحلیل عددی تعیین کردند. آن‌ها براساس مقدار تراوش، گرادیان هیدرولیکی و ضریب ایمنی، یک روش مناسب برای عایق‌بندی در مقابل آب پیشنهاد دادند. نورانی و موسوی [۱۴] با استفاده از ادغام دو روش هوش مصنوعی ANN[6] و ANFIS[7] و روش مش‌لس توانستند سطح آب‌های زیرزمینی را شبیه‌سازی کنند. تحقیق آن‌ها نشان داد که روش RBF-ANFIS نتیجه دقیق‌تری در مقایسه با روش RBF-ANN می‌دهد. نورانی و باباخانی [۱۵] با ادغام شبکه‌های عصبی مصنوعی ANN و RBF، تراوش از بدنه سد را با روش مش‌لس و نرم‌افزار متلب مورد بررسی قرار دادند. محققین ابتدا برای حالت ماندگار جریان روش RBF-MQ را برای ترم‌های مکانی و سپس برای حالت غیرماندگار شبکه‌ی عصبی مصنوعی ANN را برای ترم‌های زمانی بکار گرفتند. زمانی‌که فیلد داده‌ها به اندازه کافی نباشد، مدل‌های شبکه عصبی می‌تواند گزینه مناسبی برای پیش‌بینی سری‌های زمانی باشد. بازیار و طالبی [۱۶] روش المان محدود مرزی مدرج را برای بررسی تراوش از خاک ناهمسان و ناهمگن بکار گرفتند. روش مذبور بر اساس روش المان محدود بوده و از طرفی مزایای روش المان مرزی را نیز پوشش می‌دهد. در این روش فقط مرزها گسسته‌سازی شده و نیازی به روش

[1] Meshless Method
[2] Multi Quadratic
[3] Advection-Diffusion
[4] RBF Collection Method
[5] Local Radial Basis Function Differential Quadrature
[6] Artificial Neural Network
[7] Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System

حل اساسی خاصی نمی‌باشد. محققین مشاهده کردند که نتایج بدست آمده از این روش مطابقت خوبی با نتایج روش المان محدود دارد. تالوکی و همکاران [۱۷] مسئله تراوش از بدنه و پی رسوبی سد گردانلو را با استفاده از نرم‌افزار SEEP/W مدل کرده و پتانسیل تراوش آب، در موقعیت‌های مختلف و عمق‌های مختلف دیوار آبند را نیز بر اساس تجزیه و تحلیل عددی تعیین کردند. در نهایت، براساس مقدار تراوش، گرادیان هیدرولیکی و ضریب ایمنی، یک روش مناسب برای عایق بندی در مقابل آب پیشنهاد دادند. آواد و همکاران [۱۸] با استفاده از روش المان محدود به بررسی تراوش، آنالیز دینامیکی و پایداری شیب سد پرداختند. نتایج تحقیق آن‌ها نشان داد که محل خط فریاتیک به دلیل کاهش عمق لایه‌های نفوذناپذیر در بدنه سد بالاتر رفته است که این امر دو اثر مهم را در پی داشت. اولین اثر، افزایش فشار آب نفوذی و نیروهای بی‌ثبات کننده در بدنه سد و دومین اثر، کاهش نیروهای پایدار کننده به دلیل کاهش فشار مکش در بدنه سد است. فضلی و حسینی [۱۹] با استفاده از روش مش‌لس شکست سد را مدل‌سازی نمودند. نتایج آن‌ها نشان داد که مدل با مقایسه نتایج شبیه‌سازی شده و مدل‌سازی فیزیکی جریان‌های شکست سد تأئید شد. همچنین مطابقت خوبی بین نتایج تحلیلی و داده‌های اندازه‌گیری با همگرایی بالا وجود دارد. دیمه ور و اکبرپور [۲۰] مدل سازی شکست سد با استفاده از روش مش‌لس پترووـگالرکین و معادلات آب کم عمق را بررسی نمودند. نتایج نشان داد که روش مش‌لس علاوه بر حذف مشکلات مرتبط با شبکه‌بندی دامنه مسئله، از توانایی خوبی برای حل مسائلی با هندسه نامنظم برخوردار است. کاهید باصیری و همکاران [۲۱] به بررسی روش بدون شبکه MQ برای حل مسئله شکست سد با هدف رفع برخی از نقاط ضعف روش‌های معمول با شبکه پرداختند. برای تعیین مهم‌ترین عامل در دقت و سرعت روش MQ، یعنی پارامتر شکل بهینه، ضمن اثبات ناکارآمدی برخی از الگوریتم‌های پرکاربرد پیشین در حل مسئله شکست سد، یک ایده جدید برای آن ارائه گردید. در این ایده، شرایط اولیه مسئله با تابع MQ درون‌یابی و پارامتر شکلی که دقیق‌ترین تخمین از آن را داشته باشد، به‌عنوان پارامتر شکل بهینه انتخاب می‌گردد.

بررسی تراوش برای کنترل و جلوگیری از پدیده‌هایی نظیر واژگونی ضروری بوده، از این‌رو بررسی پدیده تراوش همواره یکی از مهم‌ترین مسائل در طراحی سدها در نظر گرفته می‌شود. در تحقیق حاضر پدیده تراوش از زیر سد با روش عددی مش‌لس RBF بررسی شده است. از جمله دلایل محبوبیت روش مش‌لسRBF می‌توان به: ۱- نیازی به گسسته‌سازی ناحیه‌ی حل یا مرزها ندارد. ۲- هم‌پوشانی ناحیه حل یا مرزها الزامی نیست. ۳- در برخی مسائل، همگرایی دارای سرعت بالایی می‌باشد. ۴- از آنجایی که توابع تک متغیره RBF فقط به فواصل بین نقاط بستگی دارد، برای حل مسائل چند بعدی مناسب است، همچنین در هر گام مدل‌سازی می‌توان اطلاعات اضافی نظیر شرایط داخلی را کاست (یا افزود). ۵- کدنویسی روش‌های مش‌لس در مقایسه با سایر روش‌ها نسبتاً ساده می‌باشد. ۶- در مقایسه با سایر روش‌ها سریع‌تر به جواب می‌رسد. در این پژوهش، جهت حل، از داده‌های مربوط به تحقیق هاشمی و حاتم [۱۱] و اوریا و همکاران [۲۲] استفاده شده است. نتایج به‌دست آمده با روش المان محدود و RBF-DQ Local صحت‌سنجی شد. مطالعات نشان می‌دهد که یکی از مهم‌ترین پارامترها در روش مش‌لسRBF، ضریب شکل می‌باشد. در این مطالعه ضریب شکل مناسب برای مسئله تراوش به ازای تعداد نقاط مختلف معرفی گردید. همچنین اثر تراکم و تعداد نقاط در دقت حل مسئله بررسی شد. انتخاب تابع پایه مناسب در روش مش‌لس RBF رابطه تنگاتنگی با کیفیت حل مسئله دارد از این‌رو توابع پایه‌های مختلفی به‌عنوان تابع پایه در روش RBF در نظر گرفته شده و مناسب‌ترین تابع برای توصیف پدیده تراوش معرفی شد. در تحقیق حاضر در بررسی پدیده تراوش، هدف حل عددی معادله جریان ماندگار و غیر ماندگار می‌باشد که از ادغام روش مش‌لسRBF و تفاضل محدود پیشرو برای مدل‌سازی مکانی- زمانی پدیده تراوش از زیر سد استفاده می‌شود.

۲- مواد و روش‌ها

اولین بار ریچاردز[8]، معادله دیفرانسیلی جزئی حرکت آب در محیط‌های متخلخل را با ترکیب کردن دو معادله پیوستگی و دارسی ارائه کرد. معادله ریچاردز برای حالت دوبعدی به‌صورت رابطه (۱) است [۲۳]:

[8] Richards

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_r k_x \frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_r k_y \frac{\partial h}{\partial y}\right)=\left(S_w S_s + n\frac{dS_w}{dp}\right)\frac{dh}{dt} \tag{۱}$$

که در آن، x و y به‌ترتیب جهت‌های افقی و عمودی، k_x و k_y به‌ترتیب هدایت هیدرولیکی در راستای x و y، k_r نفوذپذیری نسبی (در ناحیه اشباع برابر یک است)، S_w نسبت اشباع آب، S_s نگهداشت ویژه، n تخلخل، h هد هیدرولیکی و p هد فشار می‌باشد. برای ناحیه‌های اشباع میزان هدایت هیدرولیکی در دو جهت ثابت در نظر گرفته می‌شود، بنابراین معادله‌ی (۱) را می‌توان به‌صورت رابطه (۲) نوشت [۲۴]:

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=S_s \frac{\partial h}{\partial t} \tag{۲}$$

با در نظر گرفتن خاک همگن و همسان، ($k_x=k_y$) می‌توان معادله (۲) را به‌صورت معادله (۳) بازنویسی کرد [۲۵]:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=\frac{S_S}{k}\frac{\partial h}{\partial t} \tag{۳}$$

برای جریان ماندگار، معادله (۳) به‌صورت معادله (۴) که همان معادله لاپلاس می‌باشد، نوشته می‌شود [۲۵]:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=0 \Rightarrow \nabla^2 h=0 \tag{۴}$$

RBF ها در واقع توابع تک متغیره هستند که برای حل مسائل پیچیده و چند بعدی مناسب می‌باشند. در حل مسئله به روش RBF، معادله (۵) در ناحیه محاسباتی با نقاط درونی Ω و نقاط مرزی $\partial\Omega$ برقرار هستند:

$$\begin{aligned} Lh &= f \quad in \quad \Omega \\ Bh &= g \quad in \quad \partial\Omega \end{aligned} \tag{۵}$$

که در آن B و L به ترتیب عملگرهای دیفرانسیل در نقاط داخلی و نقاط مرزی ناحیه محاسباتی می‌باشند. جواب تقریبی معادله (۵) را در روش مش‌لس RBF می‌توان به‌صورت معادله (۶) برآورد کرد:

$$\hat{h}=\sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i(r) \tag{۶}$$

که در آن ϕ_i توابع پایه شعاعی یا توابع شکل هستند که همواره تابعی از فاصله بین نقاط هستند، c_i ضرایب مجهول، N تعداد کل گره‌ها (برخی روی مرز و برخی داخل ناحیه حل) می‌باشد که به‌صورت اختیاری و تصادفی بدون ایجاد مش‌بندی از ناحیه محاسباتی انتخاب می‌شوند.

از جمله توابع پایه مهمی که در روش مش‌لس RBF مورد استفاده قرار می‌گیرد می‌توان به Multi Quadratic، Gaussian، Poli harmonic، Conical، Inverse Multi Quadratic و Inverse Quadratic اشاره کرد. این توابع شکل به‌ترتیب در روابط (۷) تا (۱۲) نشان داده شده است.

$$\phi_{(r)} = \left(r^2 + \alpha^2\right)^{\beta/2} \tag{۷}$$

$$\phi_{(r)} = e^{-\alpha r^2} \tag{۸}$$

$$\phi_{(r)} = r^n \log r \tag{۹}$$

$$\phi_{(r)} = r^n \tag{۱۰}$$

$$\phi_{(r)} = \left(1 \Big/ \left(r^2 + \alpha^2\right)^{\beta/2}\right) \tag{۱۱}$$

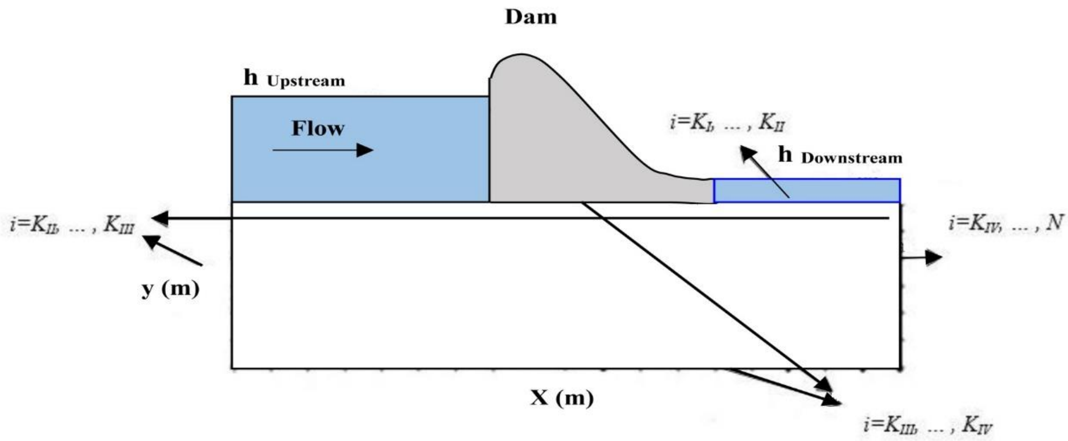
$$\phi_{(r)} = \left(1 / \left(r^2 + \alpha^2\right)\right) \tag{۱۲}$$

در توابع شکل فوق r فاصله بین نقاط، α، β و n مقادیری هستند که از طریق کالیبره کردن به‌دست می‌آیند، در تابع Conical مقدار α باید مقادیر فرد طبیعی و در تابع Polyharmonic مقدار α باید مقادیر زوج طبیعی در نظر گرفته شود. در تابع Multi Quadratic برای α می‌توان هر عدد حقیقی اختیار نمود. برای کالیبراسیون، مقادیر مختلفی برای α، β و n در نظر گرفته می‌شود، سپس مسئله با آن مقادیر حل شده و نتیجه به‌دست آمده با نتیجه تحلیلی یا آزمایشگاهی و یا نتیجه یک روش عددی معتبر صحت‌سنجی شده و مقدار خطا محاسبه می‌شود. مقداری که به ازای آن خطا کمینه شود به‌عنوان مقدار بهینه برای α، β و n در نظر گرفته می‌شود.

در تحقیق حاضر از تابع MQ برای حل معادله حاکم بر پدیده تراوش استفاده شده است که در ادامه درستی و صحت به‌کارگیری این تابع بررسی و اثبات خواهد شد. با فرض β=۱ در تابع پایه Multi Quadratic (MQ) برای آنالیز تراوش از زیر سد بتنی برای حالت دو بعدی می‌توان معادله (۱۳) را نوشت:

$$h(x,y) = \sum_{j=1}^{N} c_j \sqrt{\left(x - x_j\right)^2 + \left(y - y_j\right)^2 + \alpha^2} \tag{۱۳}$$

برای حل مسئله به روش RBF، رابطه (۱۳) برای تمامی نقاط روی مرزها و داخل ناحیه محاسباتی نوشته می‌شود، لذا به تعداد مجموع نقاط در نظر گرفته شده روی مرزها و داخل ناحیه محاسباتی، معادله و مجهول به‌دست می‌آید. با حل در فرم ماتریسی، یک ماتریس برای c به‌دست خواهد آمد. بنابراین هدف از حل مسئله، کالیبره کردن α (ضریب شکل) بهینه و یافتن ماتریس c متناظر با α بهینه است. برای تبیین معادلات حاکم در ناحیه محاسباتی و مرزها، در حالت کلی، طرح شماتیک زیر در نظر گرفته شد:



شکل۱ : طرح شماتیک ناحیه محاسباتی و نقاط مرزی و داخلی

در شکل ۱، h_U و h_D هد آب به‌ترتیب در بالادست و پائین‌دست سد بتنی، $i=1, \ldots, K_I$: شماره‌ی نقاط واقع در روی مرز دریکله با مقدار هد h_U، $i=K_I, \ldots, K_{II}$: شماره‌ی نقاط واقع در روی مرز دریکله با مقدار هد h_D، $i=K_{II}, \ldots, K_{III}$: شماره‌ی نقاط واقع در روی مرز نیومن در راستای قائم، $i=K_{III}, \ldots, K_{IV}$: شماره‌ی نقاط واقع در روی مرز نیومن در راستای افق و $i=K_{IV}, \ldots, N$: شماره‌ی نقاط واقع درداخل ناحیه محاسباتی می باشند.

معادله (۳) و (۴)، معادلات حاکم بر پدیده تراوش در جریان غیرماندگار و ماندگار هستند. برای حل معادلات جریان ماندگار، از جای‌گذاری معادله (۱۳) در معادله (۴)، استفاده می‌گردد:

$$\frac{\partial^2\left(\sum_{j=1}^{N} c_j \sqrt{\left(x-x_j\right)^2+\left(y-y_j\right)^2+\alpha^2}\right)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\left(\sum_{j=1}^{N} c_j \sqrt{\left(x-x_j\right)^2+\left(y-y_j\right)^2+\alpha^2}\right)}{\partial y^2}=0 \tag{۱۴}$$

برای حل مسئله در حالت جریان غیرماندگار، نیز از ادغام روش مش‌لس RBF و روش تفاضل محدود پیشرو به‌صورت ضمنی جهت گسسته‌سازی معادلات استفاده شد.

$$\begin{aligned} &\frac{k}{S_s}\times\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)^{n+1}=\frac{h_i^{n+1}-h_i^{n}}{\Delta t} \\ &\Delta t\times\frac{k}{S_s}\times\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)^{n+1}+h_i^{\,n}-h_i^{n+1}=0 \end{aligned} \tag{۱۵}$$

با جای‌گذاری معادله (۱۳) در رابطه (۱۵) می‌توان نوشت:

$$\Delta t\times\frac{k}{S_s}\times\left(\frac{\partial^2\left(\sum_{j=1}^{N}c_j\sqrt{\left(x-x_j\right)^2+\left(y-y_j\right)^2+\alpha^2}\right)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\left(\sum_{j=1}^{N}c_j\sqrt{\left(x-x_j\right)^2+\left(y-y_j\right)^2+\alpha^2}\right)}{\partial y^2}\right)^{n+1}$$
$$-\left(\sum_{j=1}^{N}c_j\sqrt{\left(x-x_j\right)^2+\left(y-y_j\right)^2+\alpha^2}\right)^{n+1}+\left(\sum_{j=1}^{N}c_j\sqrt{\left(x-x_j\right)^2+\left(y-y_j\right)^2+\alpha^2}\right)^{n}=0 \quad (۱۶)$$

با ترکیب معادلات شرایط مرزی جهت رسیدن به فرم ماتریسی معادلات، می‌توان نوشت (رابطه ۱۷):

$$\overbrace{\begin{bmatrix}\varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_N(x_1)\\ . & & .\\ . & & .\\ \varphi_1(x_{K_I}) & \dots & \varphi_N(x_{K_I})\\ \varphi_1(x_{K_I+1}) & \dots & \varphi_N(x_{K_I+1})\\ . & & .\\ . & & .\\ \varphi_1(x_{K_{II}}) & \dots & \varphi_N(x_{K_{II}})\\ \varphi_1(x_{K_{II}+1}) & \dots & \varphi_N(x_{K_{II}+1})\\ . & & .\\ . & & .\\ \varphi_1(x_{K_{III}}) & \dots & \varphi_N(x_{K_{III}})\\ \varphi_1(x_{K_{III}+1}) & \dots & \varphi_N(x_{K_{III}+1})\\ . & & .\\ . & & .\\ \varphi_1(x_{K_{IV}}) & \dots & \varphi_N(x_{K_{IV}})\\ \varphi_1(x_{K_{IV}+1}) & \dots & \varphi_N(x_{K_{IV}+1})\\ . & & .\\ . & & .\\ \varphi_1(x_N) & \dots & \varphi_N(x_N)\end{bmatrix}}^{\varphi}\overbrace{\begin{bmatrix}c_1\\ .\\ .\\ c_{K_I}\\ c_{K_I+1}\\ .\\ .\\ c_{K_{II}}\\ c_{K_{II}+1}\\ .\\ .\\ c_{K_{III}}\\ c_{K_{III}+1}\\ .\\ .\\ c_{K_{IV}}\\ c_{K_{IV}+1}\\ .\\ .\\ c_N\end{bmatrix}}^{C}=\overbrace{\begin{bmatrix}h_U\\ .\\ .\\ h_U\\ h_D\\ .\\ .\\ h_D\\ .\\ .\\ .\\ 0\\ 0\\ .\\ .\\ 0\\ 0\\ .\\ .\\ .\\ 0\end{bmatrix}}^{h} \quad (۱۷)$$

با درنظر گرفتن ضریب شکل‌های مختلف، ماتریس c های متفاوتی به‌دست می‌آید. نتایج حاصل شده به ازای ضریب شکل‌های مختلف (α) با نتایج حاصل از یک روش معتبر صحت‌سنجی می‌شود. ضریب شکلی که به ازای آن خطای حاصل از صحت‌سنجی کمینه باشد به‌عنوان ضریب شکل بهینه در نظر گرفته می‌شود. بعد از کالیبره کردن α و به‌دست آوردن ماتریس c متناظر با آن، می‌توان بار آبی را در هر نقطه دلخواه محاسبه نمود. برای ارزیابی نتایج به‌دست آمده با استفاده از روش مش‌لس RBF از معیار خطای جذر میانگین مربعات

RMSE۹، خطای جذر میانگین مربعات نسبی RRMSE۱۰، ضریب تبیین R2۱۱ و خطای مطلق AE۱۲ به‌ترتیب با روابط (۱۸، ۱۹، ۲۰ و ۲۱) استفاده شد [۲۶]:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{1}^{n}(h_{FEM} - h_{RBF})^2}{n}} \tag{۱۸}$$

$$RRMSE = \sqrt{\frac{\sum_{1}^{n}(\frac{h_{FEM} - h_{RBF}}{h_{FEM}})^2}{n}} \tag{۱۹}$$

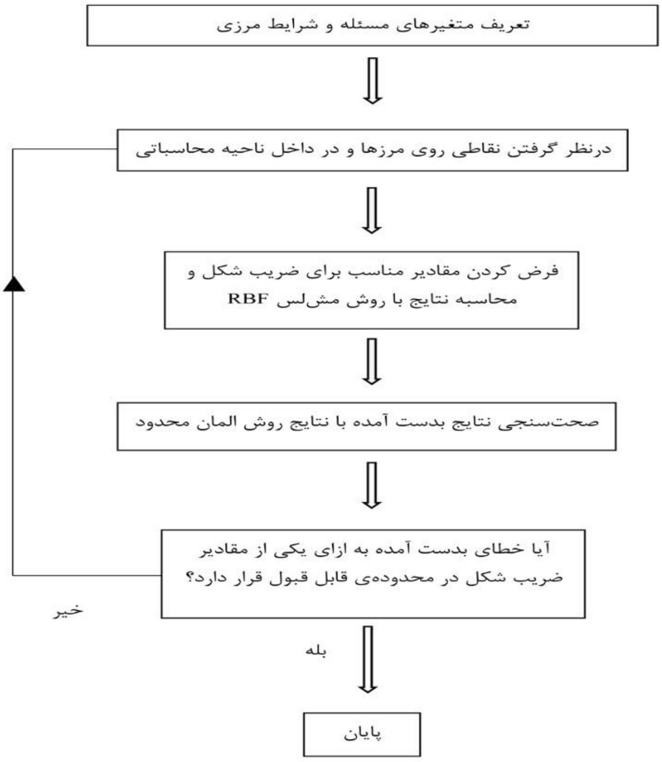
$$R^2 = 1 - \frac{\sum(h_{FEM} - h_{RBF})^2}{\sum h_{FEM}^2 - \frac{\sum h_{RBF}^2}{n}} \tag{۲۰}$$

$$AE = \left| h_{FEM} - h_{RBF} \right| \tag{۲۱}$$

در این روابط n تعداد داده‌ها، h_{FEM} هد آب در روش المان محدود، h_{RBF} هد آب در روش مش‌لسRBF است.

در این پژوهش برای بررسی پدیده تراوش از زیر سد، از داده‌های تحقیق هاشمی و حاتم [۱۱] استفاده شده است. حل مسئله و عملیات کالیبره کردن با کدنویسی در برنامه متلب MATLAB R2020a V9.8 مطابق با الگوریتم نشان داده شده در شکل ۲ و همچنین نرم‌افزار Plaxis صورت پذیرفته است. Plaxis نرم افزار المان محدود پیشرفته می‌باشد که برای تحلیل تغییر شکل‌ها و پایداری کاربرد دارد. در تحقیق حاضر مقدار $10 kN/m^2$ برای وزن مخصوص آب در نظر گرفته شده است. برای مدل کردن جریان آب، روی شیب بالادست مقدار هد آب اعمال می‌شود. مناطقی که از آن آب عبور نمی کند به‌وسیله Closed flow boundary مسدود شده است. برای محاسبه جریان، با انتخاب گزینه Water pressures از منوی Generate پنجره Water pressure generation آشکار می شود. در این پنجره با انتخاب گزینه Ground water calculation می‌توان اطلاعات زیادی از قبیل دبی خروجی، فشار منفذی، خطوط هم‌پتانسیل، سرعت جریان و ... را به‌دست آورد. برای صحت‌سنجی روش مش‌لس RBF از نتایج حاصل از روش المان محدود در حل المان محدود از ۶۶۵۶ المان مثلثی و ۳۴۴۹ گره استفاده شده است.

[9] Root Mean Square Error
[10] Relative Root Mean Square Error
[11] R- squared (Coefficient of Determination)
[12] Absolute Error

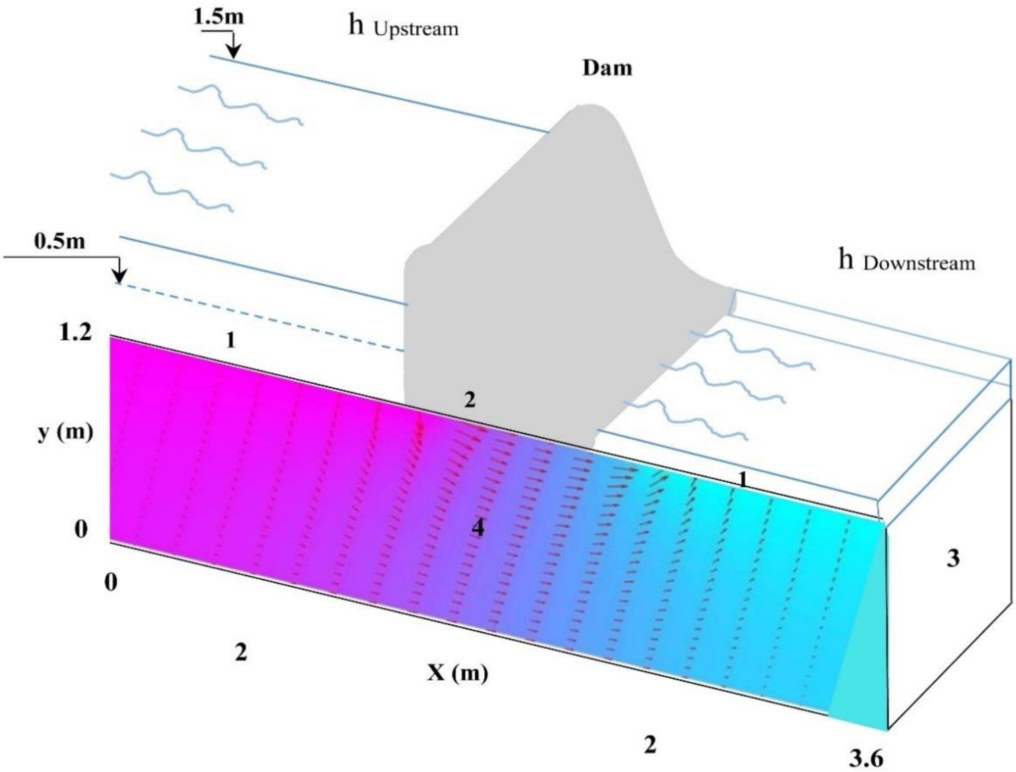


شکل۲ : الگوریتم کلی حل مسئله تراوش با استفاده از روش مش‌لس

۳- نتایج و بحث

بررسی پدیده تراوش از زیر سد در حالت ماندگار با استفاده از روش RBF

در تحقیق حاضر ناحیه محاسباتی مطابق با شکل ۳ می‌باشد. هد آب در بالادست ۰/۵ متر بوده و سپس با آهنگ یکنواختی به ۱/۵ متر افزایش می‌یابد. هد آب در پائین‌دست ثابت و برابر صفر می‌باشد. طول ناحیه محاسباتی ۳/۶ متر و عرض آن ۱/۲ متر است. خطوط هم‌پتانسیل رسم شده به روش المان محدود به‌صورت شکل ۴ می‌باشد. معادله جریان ماندگار مطابق رابطه (۴) می‌باشد.



شکل۳ : طرح شماتیک ناحیه محاسباتی مسئله تراوش

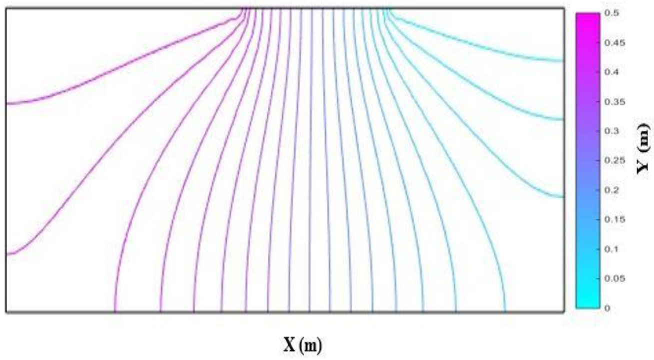
در شکل ۳ مرزهای ناحیه حل و معادلات حاکم بر آن‌ها به‌صورت زیر است:

مرزهای شماره ۱: مرزهای نفوذ پذیر با شرط مرزی دریکله با شرط $h=h_U$ در بالادست و $h=h_D$ در پائین‌دست

مرزهای شماره ۲: مرزهای نفوذ ناپذیر با شرط مرزی نیومن با شرط $\dfrac{\partial h}{\partial y}=0$

مرزهای شماره ۳: مرزهای نفوذ ناپذیر با شرط مرزی نیومن با شرط $\dfrac{\partial h}{\partial x}=0$

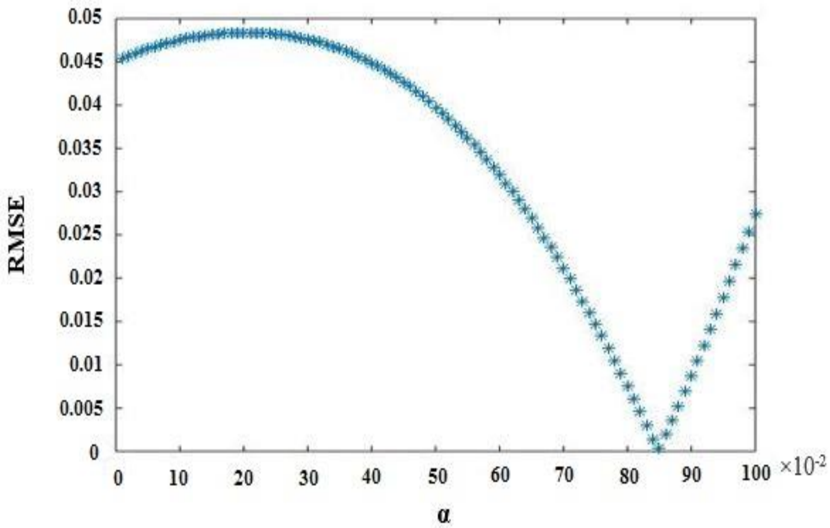
ناحیه شماره ۴: داخل ناحیه محاسباتی با رابطه $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}=\dfrac{\partial h}{\partial t}$ می‌باشد (برای جریان ماندگار $\dfrac{\partial h}{\partial t}=0$).



شکل۴ : خطوط هم‌پتانسیل با روش المان محدود

هدف حل مسئله به روش مش‌لسRBF توانایی رسم خطوط هم‌پتانسیل زیر سد مطابق با شکل ۴ و نزدیک کردن نتایج به نتایج المان محدود است. یکی از ویژگی‌های مهم روش مش‌لس RBF، امکان حل مسئله با نقاط بسیار کم و به‌عنوان تقریب اولیه می‌باشد. مسئله مربوط به شکل ۳ یک‌بار با در نظر گرفتن ۶ نقطه که ۳ نقطه آن داخل ناحیه محاسباتی و ۳ نقطه روی مرزها قرار دارد، حل شده و سپس تعداد نقاط به ۱۵ (۱۲ نقطه مرز ۲ نقطه داخل)، ۲۸ (۱۸ نقطه مرز ۱۰ نقطه داخل)، ۴۵ (۲۴ نقطه مرز ۲۱ نقطه داخل)، ۹۱ (۳۶ نقطه مرز ۵۵ نقطه داخل) و ۱۳۳ (۴۸ نقطه مرز ۸۵ نقطه داخل) نقطه افزایش داده و نتایج بررسی شد.

با اختیار کردن مقادیر مختلفی برای α، ماتریس c ها به‌دست آمده و سپس با انتخاب α یا همان ضریب شکل بهینه از طریق صحت‌سنجی می‌توان در هر نقطه دل‌خواه بار آبی را به‌دست آورد. نمودار مربوط به خطای روش RBF در مقایسه با روش المان محدود در شکل ۵ آورده شده است. از مزایا و برتری روش مش‌لس می‌توان به محیط محاسباتی اشاره نمود به‌طوری‌که در محیط‌های محاسباتی که داده‌ها به‌طور منظم در اختیار ما نیستند و به‌عبارتی دیگر استفاده از متدهای نیازمند شبکه‌بندی امکان‌پذیر نیست، قابل کاربرد است. در جدول ۱ زمان شبیه‌سازی مدل‌ها برای تعداد نقاط مختلف در حالت جریان ماندگار نشان داده شده است.

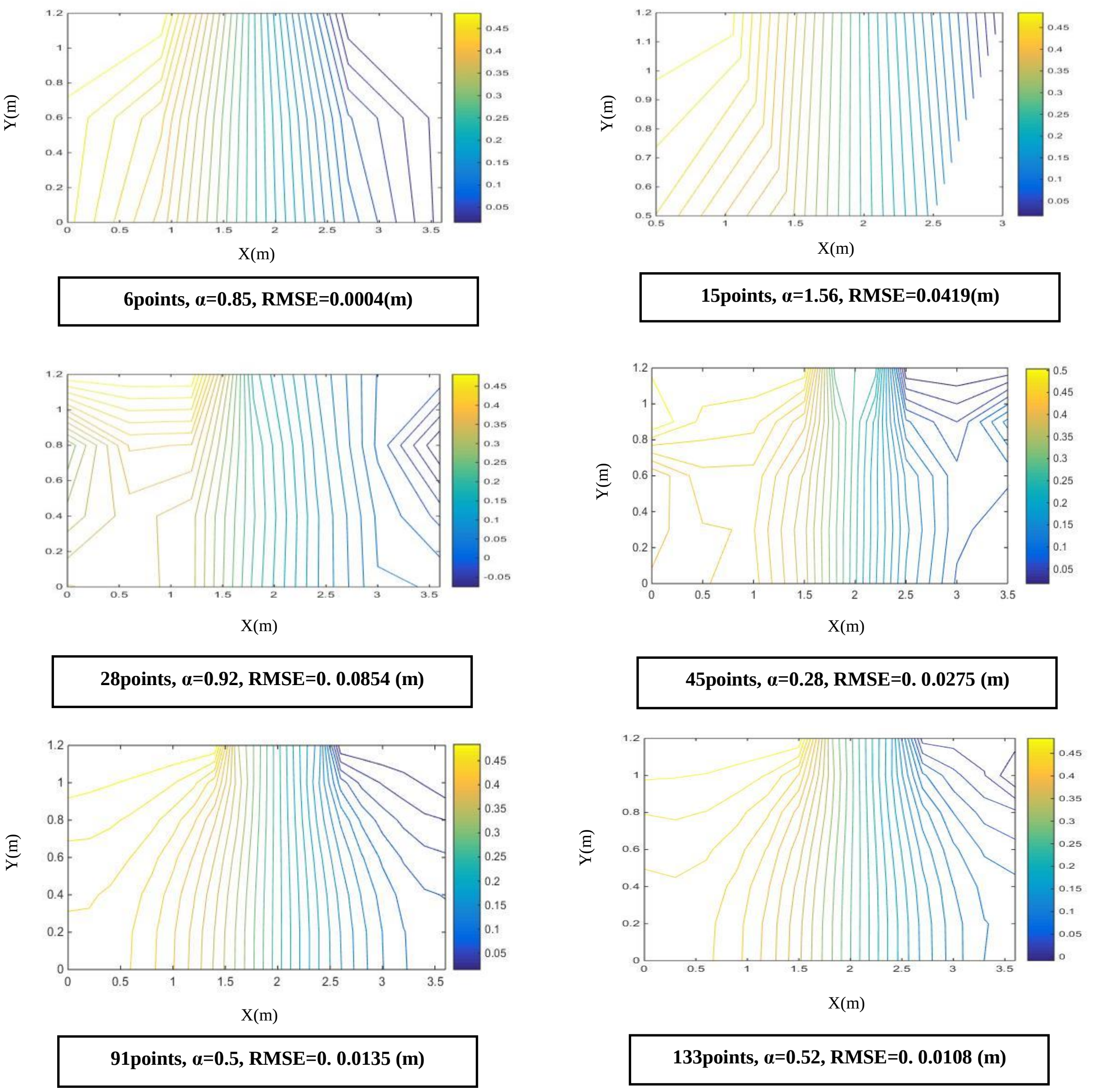


شکل۵ : خطای روش RBF در مقایسه با روش المان محدود به ازای ضریب شکل‌های مختلف (α)

جدول۱: زمان شبیه‌سازی مدل‌ها با تعداد نقاط مختلف

تعداد نقطه	ضریب شکل (-)	مدت زمان شبیه‌سازی مدل (ثانیه)
۶	۰/۸۵	۴/۴۴۹
۱۵	۱/۵۶	۱۲/۸۸۱
۲۸	۰/۹۲	۵۱/۱۴۷
۴۵	۰/۲۸	۱۳۷/۳۴۸
۹۱	۰/۵۰	۶۱۲/۸۳۶
۱۳۳	۰/۵۲	۱۳۶۰/۱۹۷

به ازای α=۰/۸۵ خطای محاسبات در مقایسه با روش المان محدود برای ۶ نقطه به حداقل می‌رسد به‌طوری‌که خطای جذر میانگین مربعات برای ۶ نقطه، ۰/۰۰۰۴ متر بوده و این مقدار برای ۱۳۳ نقطه، ۰/۰۱۰۸ متر می‌باشد. به همین ترتیب ضریب شکل بهینه برای تمامی نقاط پیدا شده و خطوط هم‌پتانسیل زیر سد به‌ترتیب شکل ۶ رسم شد.



شکل۶ : خطوط هم‌پتانسیل زیر سد با افزایش تعداد نقاط

مشاهده می‌شود که با در نظر گرفتن ۶ نقطه، شکل کلی خطوط هم‌پتانسیل رسم شده علی رغم داشتن خطای کم مناسب نبوده و خطوط پتانسیل بر مرزها عمود نیستند. از طرفی ابعاد ناحیه محاسباتی پوشش داده نشده است. لذا مسئله توجیه هیدرولیکی نداشته و نیاز است تعداد نقاط افزایش پیدا کند. این مرحله صرفا به‌عنوان یک تقریب اولیه و یافتن محدوده‌ای از ضریب شکل انجام می‌شود. در مرحله دوم تعداد نقاط به ۱۵ نقطه افزایش پیدا کرده و مشاهده می‌گردد که هندسه ناحیه محاسباتی مطابق با صورت مسئله مشخص شده است ولی خطوط هم‌پتانسیل زیر سد مشابه خطوط هم‌پتانسیل ارائه شده توسط روش المان محدود نیست. از طرفی عمود شدن بر مرزهای نفوذ ناپذیری که موازی با محور قائم هستند به‌طور محسوسی دیده نمی‌شود. با انتخاب ۲۸ نقطه مشاهده شد که ابعاد ناحیه محاسباتی پوشش داده شده است ولی شکل خطوط هم‌پتانسیل زیر سد با خطوط هم پتانسیل ارائه شده توسط روش المان محدود تطابق ندارد همچنین مقادیر منفی برای هد آب به‌دست آمده است که مغایر با واقعیت است. به‌عبارت دیگر برخی از مقادیر به‌دست آمده برای بار آبی در بازه بین هد بالادست و پائین‌دست یعنی ۰ تا ۰/۵ قرار ندارند، بعضی از نقاط دارای بار آبی منفی و برخی دارای بار آبی بالاتر از ۰/۵ متر هستند که در واقعیت امکان‌پذیر نیست. از طرفی عمود شدن بر تمامی مرزهای نفوذ ناپذیر دیده نمی‌شود. بنابراین برای داشتن تطابق خوب

هیدرولیکی نیاز است که تعداد نقاط افزایش پیدا کند. با افزایش تعداد نقاط به ۴۵ نقطه ابعاد ناحیه محاسباتی پوشش داده شده است. در این مرحله خطا از ۰/۰۸۵۴ در مرحله قبل به ۰/۰۲۷۵ کاهش یافته است. از طرفی شکل کانتورهای زیر سد و عمود شدن بر مرزهای نفوذ ناپذیر نیز در مقایسه با مرحله قبل بهبود یافته است. از این‌رو می‌توان گفت حل مسئله در حال همگرایی و رسیدن به حالت مطلوب است. ولی تطابق مناسبی بین خطوط هم‌پتانسیل زیر سد و خطوط هم‌پتانسیل ارائه شده توسط روش المان محدود در شکل ۴ وجود ندارد. در میان نتایج به‌دست آمده داده‌های خارج از بازه ۰ تا ۰/۵ متر وجود دارد، از این‌رو برای توجیه هیدرولیکی مسئله و رسم مناسب‌تر کانتورها نیاز است تعداد نقاط افزایش پیدا کند. با افزایش تعداد نقاط به ۹۱ نقطه خطوط هم پتانسیل زیر سد تطابق بالایی با شکل ۴ داشته و ابعاد ناحیه محاسباتی پوشش داده شده است. در این مرحله خطا از ۰/۰۲۷۵ در مرحله قبل به ۰/۰۱۳۵ کاهش یافته است. با افزایش تعداد نقاط به ۱۳۳ نقطه خطوط هم‌پتانسیل زیر سد با خطوط هم‌پتانسیل زیر سد به روش المان محدود منطبق بوده و ابعاد ناحیه محاسباتی پوشش داده شده است. خطای حاصل از مقایسه نتایج به‌دست آمده با نتایج روش المان محدود در ۴ مرحله آخر سیر نزولی پیدا کرده است. این امر نشانگر همگرایی مسئله و رسیدن به جواب صحیح است. از مهم‌ترین نتایج شکل ۶ می‌توان به این مورد اساسی اشاره نمود که داشتن مقادیر آماری مناسب مانند RMSE صرفا برای بررسی مسئله کافی نبوده و هیدرولیک حاکم بر مسئله (خطوط هم پتانسیل) حتما باید بررسی گردد. در حالت کلی می‌توان گفت، با افزایش تعداد نقاط، دقت حل مسئله افزایش یافته و ضریب شکل به یک عدد همگرا می‌شود. از طرفی با افزایش نقاط توانایی برای رسم خطوط هم‌پتانسیل زیر سد افزایش می‌یابد.

در جدول ۲ به‌منظور صحت‌سنجی تعدادی نقطه از ناحیه حل و مرزها به‌صورت تصادفی انتخاب شده و هد آب در این نقاط با استفاده از روش RBF و المان محدود پس از محاسبه ارائه شده است.

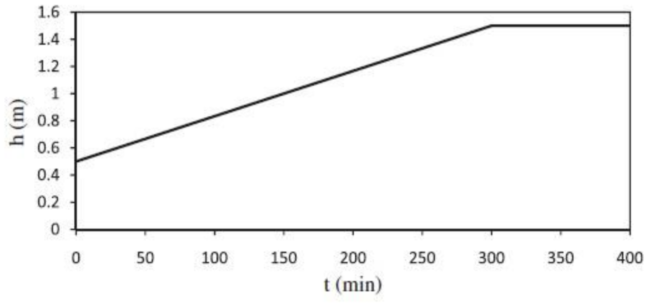
جدول۲ : مقایسه نتایج روش RBF با روش FEM در حالت ماندگار

x (m)	y (m)	تابع پایه شعاعی (متر)	روش المان محدود (متر)	خطای مطلق (متر)	خطای جذر میانگین مربعات (متر)	خطای جذر میانگین مربعات نسبی (درصد)	ضریب تبیین
۰/۸	۰/۷	۰/۴۴۷۸	۰/۴۴۹۶	۰/۰۰۱۸	۰/۰۰۲۸	۱/۱۴۶	۰/۹۹۹۵
۱/۲	۱	۰/۴۵۵۹	۰/۴۵۸۸	۰/۰۰۲۹			
۲/۶	۰/۵۵	۰/۱۳۲۰	۰/۱۳۴۴	۰/۰۰۲۴			
۰	۰/۹	۰/۴۸۲۵	۰/۴۸۰۷	۰/۰۰۱۸			
۲/۲	۰	۰/۲۴۷۶	۰/۲۵۲۶	۰/۰۰۵			
۱	۰/۲	۰/۴۰۵۶	۰/۴۰۷۱	۰/۰۰۱۵			

ستون‌های x و y نشانگر مختصات نقاط انتخابی و ستون‌های سوم و چهارم مربوط به بار آبی به‌دست آمده به دو روش RBF و FEM هستند. نزدیک بودن خطای مطلق، خطای جذر میانگین مربعات و خطای جذر میانگین مربعات نسبی به صفر و ضریب تعیین به ۱ نشان‌دهنده تطابق روش حل عددی RBF با روش المان محدود است.

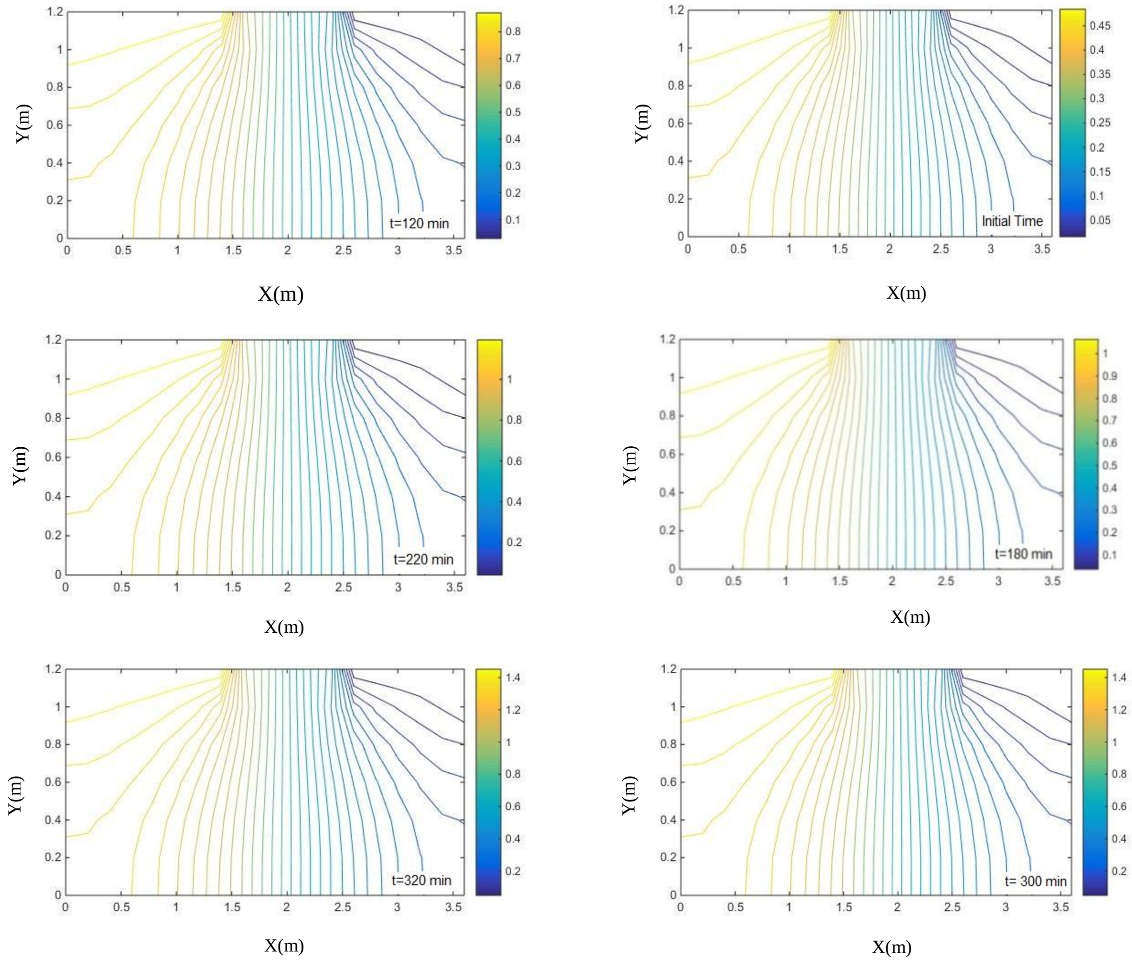
بررسی پدیده تراوش از زیر سد در حالت غیرماندگار با استفاده از روش RBF

بعد از بررسی نشت در حالت ماندگار، حالت غیرماندگار با افزایش هد در بالادست در نظر گرفته شد. در مسئله مربوط به مطالعه هاشمی و حاتم [۱۱] هد آب در طی ۳۰۰ دقیقه به‌صورت خطی از ۰/۵ متر به ۱/۵ متر مطابق با شکل ۷، افزایش می‌یابد. معادله جریان غیرماندگار مطابق رابطه (۳) می‌باشد.



شکل۷ : افزایش هد آب در طی زمان ۳۰۰ دقیقه در بالادست سد

برای حل معادله در جریان غیرماندگار برای گسسته‌سازی جملات زمانی از تفاضل محدود و برای جملات مکانی از روش RBF استفاده شد. ابتدا ضریب شکل کالیبره شده در حالت ماندگار را برای حالت غیرماندگار به‌کار برده و سپس خطوط هم‌پتانسیل زیر سد برای دوره‌های زمانی مختلف مطابق شکل ۸، رسم گردید.



شکل۸ : کانتورهای هد آبی در گام های زمانی مختلف با روشRBF

در زمان ۱۲۰ دقیقه بعد از شروع افزایش هد آب در بالادست، هد آب در بالادست به میزان ۰/۴ متر افزایش پیدا کرده و به ۰/۹ متر می‌رسد. به دنبال افزایش هد آب در بالادست، بار آبی نقاط داخل ناحیه محاسباتی افزایش پیدا می‌کند. در زمان ۱۸۰ دقیقه بعد از شروع افزایش هد آب در بالادست، هد آب در بالادست به میزان ۰/۶ متر افزایش پیدا کرده و به ۱/۱ متر می‌رسد با افزایش هد آب در بالادست، بار آبی نقاط داخل ناحیه محاسباتی افزایش پیدا می‌کند. مشاهده می‌گردد که شکل کلی کانتور مشابه حالت جریان ماندگار است. در زمان ۲۲۰ دقیقه بعد از شروع افزایش هد آب در بالادست، هد آب در بالادست به میزان ۰/۷۳۳ متر افزایش پیدا کرده و به ۱/۲۳۳ متر می‌رسد به دنبال افزایش هد آب در بالادست، بار آبی نقاط داخل ناحیه محاسباتی افزایش پیدا می‌کند. در زمان ۳۰۰ دقیقه بعد از شروع افزایش هد آب در بالادست، به میزان ۱ متر افزایش پیدا کرده و به ۱/۵ متر می‌رسد. بنابراین، بار آبی نقاط داخل ناحیه محاسباتی افزایش پیدا می‌کند. در این مدت شکل کلی کانتور در زمان‌های مختلف ثابت مانده است. افزایش هد در زمان ۳۰۰ دقیقه به اتمام می‌رسد. در زمان ۳۲۰ دقیقه هد آب در بالادست در حالت ۱ متر ثابت مانده است. خطوط هم‌پتانسیل زیر سد در زمان ۳۲۰ دقیقه بعد از شروع افزایش هد آب در بالادست با خطوط هم‌پتانسیل زیر سد در زمان ۳۰۰ دقیقه بعد از شروع افزایش هد آب در بالادست، مشابه است. این امر نشان‌دهنده این است که جریان بعد از ۳۰۰ دقیقه از شروع افزایش هد آب در بالادست مجدداً به حالت ماندگار رسیده است. در جدول ۳ زمان شبیه‌سازی مدل‌ها برای حالت جریان غیرماندگار با ضریب شکل ۰/۵۲ برای دقایق ۱۲۰، ۱۸۰، ۲۲۰، ۳۰۰ و ۳۲۰ ثانیه نشان داده شده است.

جدول ۳ : زمان شبیه‌سازی مدل‌ها در جریان غیرماندگار

مدت زمان شبیه‌سازی مدل (ثانیه)	زمان (دقیقه)	تعداد نقطه
۱۳۵۱/۸۰۸	۱۲۰	۱۳۳
۱۳۹۲/۵۴۳	۱۸۰	۱۳۳
۱۳۳۹/۳۰۶	۲۲۰	۱۳۳
۱۳۳۰/۲۱۶	۳۰۰	۱۳۳
۱۳۳۵/۶۲۵	۳۲۰	۱۳۳

به‌منظور صحت‌سنجی نتایج مسئله در بازه‌های مختلف زمانی تعدادی نقطه از ناحیه حل و مرزها به‌صورت تصادفی انتخاب و هد آب در این نقاط با استفاده از روش RBF و المان محدود و Local RBF-DQ در جدول‌های ۴ و ۵ نشان داده شده است. نزدیک بودن شاخص‌های آماری AE و RMSE و RRMSE به صفر و R^2 به ۱ نشان دهنده تطابق روش حل عددی RBF با روش المان محدود است.

جدول ۴ : مقایسه نتایج روش RBF با FEM در حالت غیرماندگار

ضریب تبیین	خطای جذر میانگین مربعات نسبی (درصد)	خطای جذر میانگین مربعات (متر)	خطای مطلق (متر)	روش المان محدود (متر)	تابع پایه شعاعی (متر)	زمان (دقیقه)	y(m)	x(m)
			۰/۰۰۴	۰/۴۱	۰/۴۱	۰		
			۰/۰۱	۰/۷۱	۰/۷۲	۱۲۰		
۰/۹۹۹۴	۱/۰۷۸	۰/۰۰۹۱۲	۰/۰۱	۰/۸۹	۰/۸۸	۱۸۰	۰	۱
			۰/۰۱	۱/۰۶	۱/۰۵	۲۴۰		
			۰/۰۱	۱/۱۹	۱/۲۰	۳۰۰		
			۰/۰۰۴	۰/۲۵	۰/۲۵	۰		
			۰/۰۰۲	۰/۴۵	۰/۴۵	۱۲۰		
۰/۸۸۹۵	۱/۲۷۴	۰/۰۰۶۶۳	۰/۰۱	۰/۵۶	۰/۵۵	۱۸۰	۰	۲
			۰/۰۱	۰/۶۶	۰/۶۵	۲۴۰		
			۰/۰۰۰۱	۰/۷۵	۰/۷۵	۳۰۰		

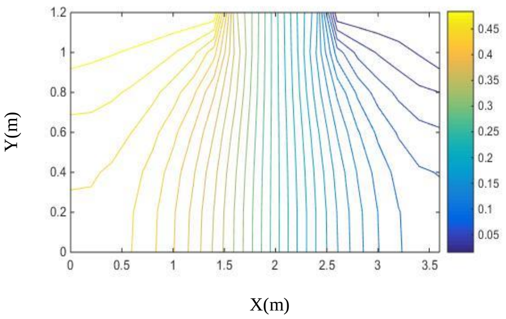
جدول۵ : مقایسه نتایج روش RBF با Local RBF-DQ در حالت غیرماندگار

ضریب تبیین	خطای جذر میانگین مربعات نسبی (درصد)	خطای جذر میانگین مربعات (متر)	خطای مطلق (متر)	تابع پایه شعاعی محلی (متر)	تابع پایه شعاعی (متر)	زمان (دقیقه)	y (m)	x (m)
			۰/۰۰۵	۰/۲۶	۰/۲۵	۰		
			۰/۰۰۲	۰/۴۵	۰/۴۵	۱۲۰		
۰/۹۹۹۲	۱/۰۷۵۶	۰/۰۰۴۵	۰/۰۰۳	۰/۵۵	۰/۵۵	۱۸۰	۰,۶	۲
			۰/۰۰۷	۰/۶۲	۰/۶۱	۲۲۰		
			۰/۰۰۴	۰/۷۵	۰/۷۵	۳۰۰		
			۰/۰۰۲۵	۰/۰۳۱	۰/۰۳۱	۰		
			۰/۰۰۱	۰/۰۵۵	۰/۰۵۴	۱۲۰		
۰/۹۹۶	۱/۷۷۰۹	۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۲	۰/۰۶۹	۰/۰۶۴	۱۸۰	۱	۳
			۰/۰۰۱	۰/۰۷۶	۰/۰۷۵	۲۲۰		
			۰/۰۰۱	۰/۰۹۱	۰/۰۹	۳۰۰		

در بررسی جریان غیرماندگار از ضریب کالیبره شده برای حالت ماندگار استفاده شد. تطابق نتایج در جدول‌های ۴ و ۵ نشان می‌دهد که اعمال ضریب شکل کالیبره شده در جریان ماندگار قابل استفاده در جریان غیر ماندگار است. این مسئله بیانگر این است که ضریب شکل در روش مش‌لس RBF مستقل از حالت جریان بوده و به هندسه و معادله دیفرانسیلی حاکم بستگی دارد.

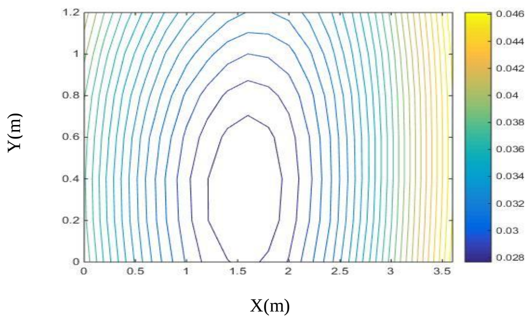
بررسی توابع پایه مختلف در بررسی پدیده تراوش

هدف از این بخش، معرفی کردن تابع پایه مناسب برای توصیف پدیده تراوش است. در بررسی مسئله با تابع پایه Muliquadratic با در نظر گرفتن ۱۳۳ نقطه، خطوط هم‌پتانسیل زیر سد به فرم مناسب به‌صورت شکل ۹ ترسیم گردید. برای بررسی سایر توابع پایه Multi Quadratic، Gaussian، Poli harmonic، Conical، Inverse Multi Quadric و Inverse Quadratic نیز همان ۱۳۳ نقطه در نظر گرفته می‌شود. خطوط هم پتانسیل رسم شده برای این توابع در شکل ۹ نشان داده شده است. با دقت در شکل ۹ مشاهده می‌شود که در حل عددی مسائل، فقط کم بودن خطا ملاک نبوده و از میان توابع پایه مختلف، برای رسم خطوط هم پتانسیل فقط تابع MQ کارایی بهتری را در حل مسئله تراوش از نقطه نظر هیدرولیکی را دارا می باشد. فقط تابع Multi Quadratic توانایی رسم خطوط هم‌پتانسیل مطابق با خطوط هم‌پتانسیل رسم شده توسط روش المان محدود را دارد. خطوط هم‌پتانسیل رسم شده توسط سایر توابع نمی‌تواند بیانگر خطوط هم‌پتانسیل زیر سد باشد. همچنین مشاهده می‌شود خطوط هم‌پتانسیل بر مرزها عمود نبوده و از طرفی خطای محاسبات نیز بالا است.



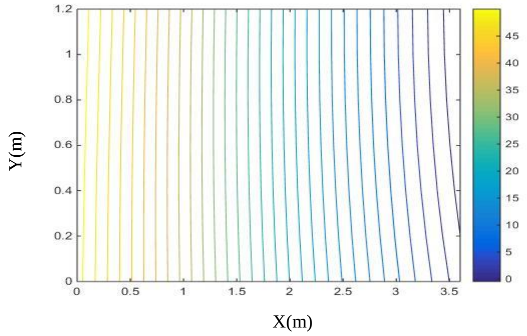
تابع Multi Quadratic

α=0.52	RMSE=0.0108(m)



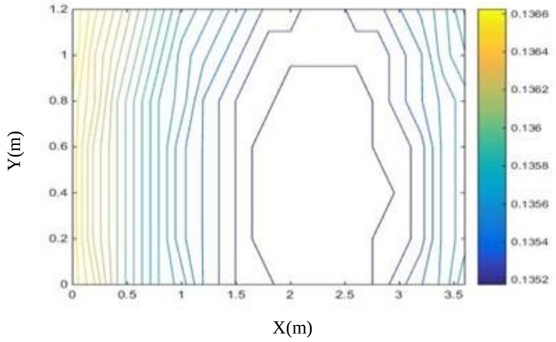
تابع Poliharmonic

α=2	RMSE=0.2973(m)



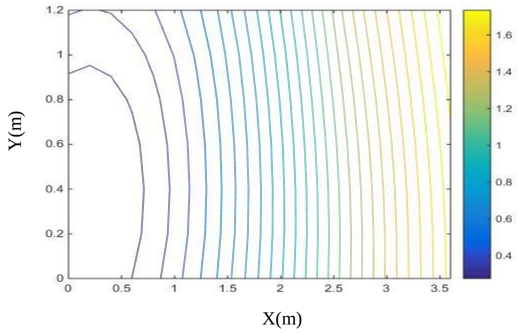
تابع Gussian

α=2.8	RMSE=28.3737(m)



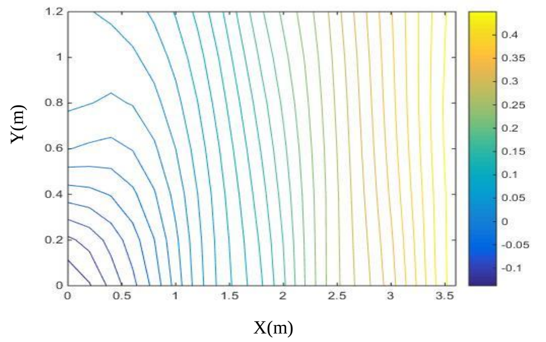
تابع Conical

α=15	RMSE=0.2198(m)



تابع Inverse Multiquadrati

α=0.5	RMSE=0.8627(m)



تابع Inverse Quadratic

α=0.2	RMSE=0.3491(m)

شکل۹ : خطوط هم‌پتانسیل زیر سد با استفاده از توابع پایه مختلف

۴- نتیجه‌گیری

در حالت کلی برای حالت ماندگار و غیرماندگار نتایج به‌شرح ذیل می‌باشد:

برای حالت ماندگار

۱- برای حل اولیه مسائل و به‌دست آوردن تقریب مناسبی از جواب‌ها، می‌توان با استفاده از چند نقطه در داخل ناحیه حل و چند نقطه روی مرزها روش فوق را به‌کار گرفت. در این مطالعه به‌عنوان تقریب اولیه ۳ نقطه در مرز دریکله و سه نقطه در مرز نیومن در نظر گرفته شد. در تقریب اولیه ضریب شکل ۰/۸۵ و میزان خطای RMSE برابر با ۰/۰۰۰۴ به‌دست آمد.

۲- مشاهده شد که نتایج حاصل از کاربرد چند نقطه برای حل به‌عنوان تقریب اولیه قابل قبول بوده و علی رغم داشتن خطای کم‌تر به‌میزان ۹۹/۰۴٪ نسبت به ۱۵ نقطه و ۹۹/۵۳٪، ۹۸/۵۴٪، ۹۷/۰۳٪ و ۹۶/۲۹٪ به‌ترتیب برای ۲۸، ۴۵، ۹۱ و ۱۳۳ نقطه، توجیه هیدرولیکی نداشته و برای رسم خطوط هم‌پتانسیل زیر سد کافی نمی‌باشد.

۳- ضریب شکل به‌دست آمده برای نقاط کم ۰/۸۵ و نقاط زیاد ۰/۵۲ است که تقریب‌های اولیه به جواب اصلی نزدیک می‌باشد.

۴- در انتخاب موقعیت نقاط به روشRBF قاعده خاصی وجود ندارد ولی باید به‌گونه‌ای انتخاب شوند که معرف هندسه مسئله باشند.

۵- با حل مسئله و کالیبره شدن مقدار ضریب شکل، می‌توان میزان هد آب را در هر نقطه دل‌خواه به‌دست آورد.

۶- با بررسی هیدرولیک حاکم بر مسئله و بر اساس آن، خطای RMSE با افزایش تعداد نقاط به ۱۳۳ نقطه به مقدار قابل قبول ۰/۰۱۰۸ کاهش می‌یابد. در انتخاب تعداد نقاط بهینه، بایستی هیدرولیک حاکم بر مسئله از جمله مقدار خطا، مقدار ضریب شکل، میزان هم‌پوشانی ناحیه محاسباتی، تطابق کانتورهای رسم شده با سایر روش‌های موجود و همگرایی مسئله مورد توجه قرار گیرد و صرف پائین بودن میزان خطا دلیل مناسبی برای انتخاب تعداد نقاط بهینه نیست.

۷- با به‌کارگیری توابع مختلف به‌عنوان تابع پایه، کارایی تابع MQ در توصیف مسئله تراوش نشان داده شد.

برای حالت غیر ماندگار

۱- مشابه با حالت ماندگار، برای رسم خطوط هم‌پتانسیل باید هندسه و مرزها از طریق یک سری نقاط مشخص شوند.

۲- از آنجا که ضریب شکل تابع پایه، به هندسه و معادله حاکم بستگی دارد، بنابراین ضریب شکل یکسانی برای حالت ماندگار و غیرماندگار و برابر با ۰/۵۲ به‌کار گرفته شد. صحت‌سنجی انجام شده و مطابقت نتایج با نتایج حاصل از مطالعات پیشین، موضوع ذکر شده را تصدیق می‌کند.

۳- با افزایش هد آب در بالا دست سد از ۰/۵ متر به ۱/۵ متر ، هد آبی در نقاط زیر سد نیز افزایش می‌یابد ولی بعد از ثابت ماندن مجدد ارتفاع آب در پشت سد، هد آبی در زیر سد نیز به مقدار ثابتی می‌رسد.

مراجع

[1] Huang, T., & Rudnicki, J. W. (2006). A mathematical model for seepage of deeply buried groundwater under higher pressure and temperature. *Journal of hydrology*, 327(1-2), 42-54.

[2] Honjo, Y., Giao, P. H., & Naushahi, P. A. (1995). Seepage analysis of Tarbela dam (Pakistan) using finite element method. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and Geomechanics Abstracts*, 32(3), 131A.

[3] Brebbia, C. A., & Chang, O. V. (1979). Boundary elements applied to seepage problems in zoned anisotropic soils. *Advances in Engineering Software*, 1(3), 95-105.

[4] Darbandi, M., Torabi, S. O., Saadat, M., Daghighi, Y., & Jarrabashi, D. (2007). A moving-mesh finite volume method to solve free-surface seepage problem in arbitrary geometries. *Numerical and analytical methods in Geomechanics*, *(31)*41, 1609-1629.

[5] Daneshfaraz, R., & Kaya, B. (2008). Solution of the propagation of the waves in open channels by the transfer matrix method. *Ocean Engineering*, 35(11–12), 1075-1079.

[6] Daneshfaraz, R., Aminvash, E., & Abbaszadeh, H. (2021). Numerical Simulation of Energy Dissipation in Crescent-Shaped Contraction of the Flow Path. *Iranian Journal of Soil and Water Research*, 52(5), 1299-1314. Doi: 10.22059/ijswr.2021.318989.668895.

[7] Kansa, E. J. (1990). Multiquadrics-A scattered data approximation scheme with application to computational fluid dynamics. Solution to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations. *Computers & Mathematics with Applications*, (19)8-9, 147-161.

[8] Boztosun, I., Charafi, A., Zerroukat, M., & Djidjeli, K. (2002). Thin-plate spline radial basis function scheme for advection-diffusion problems. *Electric Journal of Boundary Elements*, 2, 889-895.

[9] Sarler, B., Perko, J., & Chen, C.S. (2004). Radial basis function collocation method solution of natural convection in porous media. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow,* (14)2, 187-212.

[10] Durmus, A., Boztosun, I., & Yasuk, F. (2006). Comparative study of the multiquadratic and thin-plate spline radial basis function for the transient-convection diffusion problem. *International Journal of Modern Physics C*, 17(8), 1151-1169.

[11] Hashemi, M. R., & Hatam, F. (2011). Unsteady seepage analysis using local radial basis function-based differential quadrature method. *Applied Mathematical Modeling*, 35, 4934-4950.

[12] Arshad, E. I., & Babar, M. M. (2014). Comparison of SEEP/W Simulations with Field Observations for Seepage Analysis through an Earthen Dam (Case Study: Hub Dam-Pakistan). *International Journal of Research (IJR)*, (1)7, 57-70.
[13] Hedayati Talouki, H., Lashkaripour, G. R., Ghafoori, M., & Saba, A. A. (2015). Assessment and presentation of a treatment method to seepage problems of the alluvial foundation of Ghordanloo dam, NE Iran. *Journal of the Geological Society of India*, *(85)*3, 377-384.
[14] Nourani, V., & Mousavi, Sh. (2016). Spatiotemporal groundwater level modeling using hybrid artificial intelligence-meshless method. *Journal of Hydrology*, *536*, 10-25.
[15] Nourani, V., & Babakhani, A. (2013). Integration of artificial neural networks with radial basis unction interpolation in earth dam seepage modeling. *Computing in civil engineering*, *(27)*2, 183-195.
[16] Bazyar, M. H., & Talebi, A. (2015). Transient seepage analysis in zoned anisotropic soils based on the scaled boundary finite-element method. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, (*39)*1, 1-22.
[17] Talouki, H. H., Lashkaripour, G. R., Ghafoori, M., & Saba, A. A. (2015). Assessment and presentation of a treatment method to seepage problems of the alluvial foundation of Ghordanloo dam, NE Iran. *Journal of the Geological Society of India*, *(85)*3, 377-384.
[18] Awwad, T., Donia, M., & Awwad, L. (2017). Effect of a Stiff Thin Foundation Soil Layer's Depth on Dynamic Response of an Embankment Dam. *Procedia Engineering*, (*189)*, 525-532.
[19] Fazli Malidareh, B., & Hosseini, S. A. (2019). Collocated discrete subdomain meshless method for dam-break and dam-breaching modelling. *Water Management*, *172*(2), 68-85.
[20] Deymevar, S., Akbarpour, A. (2019). Modeling of dam Break Using the Meshless Local Petrov-Galerkin Method and Shallow Water Equations. *Irrigation and Water Engineering*, *10*(2), 62-75.
[21] Kahid Basiri, H., Babaee, R., Fallah, A., & Jabbari, E. (2020). Development of multiquadric method for solving dam break problem. *Journal of Hydraulics, 14*(4), 83-98.
[22] Ouria, A., Toufigh, M.M., & Nakhani, A. (2007). An investigation on the effect of the coupled and un coupled formulation on transient seepage by the finite element method. *American Journal of Applied Sciences, (4)*12, 950-956.
[23] Cooley, R. L. (1983). Some new procedures for numerical solution of variably saturated flow problems. *Water Resources Research*, *(19)*5, 1271-1285.
[24] Bear, J., & Verruijt, A. (1987). *Modeling Two-Dimensional Flow in Aquifers. In: Modeling Groundwater Flow and Pollution.* Theory and Applications of Transport in Porous Media, vol 2. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-009-3379-8_4
[25] Das, B. M., & Sobhan, K. (2013). *Principles of geotechnical engineering*. eighth Ed. Cengage Learning, Stamford, USA.
[26] Daneshfaraz, R., Norouzi, R., Abbaszadeh, H., Kuriqi, A,, & Di Francesco S. (2022). Influence of Sill on the Hydraulic Regime in Sluice Gates: An Experimental and Numerical Analysis. *Fluids*, *7*(7):244. https://doi.org/10.3390/fluids7070244.