

Vibration of functionally graded elliptical plates resting on Winkler-type elastic foundation subjected to initial in-plane loading

Mehdi Hosseini^{1*}, Hasan Ghiasvand²

1- Assistant Professor, Department of mechanical engineering, Malayer University, Malayer, Iran.

2- MSc Graduate, Department of Mechanical Engineering, Malayer University, Malayer, Iran

ABSTRACT

In this paper, the free vibration behavior of functionally graded thin elliptical plates with simply supported and clamped boundary conditions is investigated using classical laminated plate theory. In contrast to previous studies, the geometry of the plate is considered to be as elliptical and in a more general form as super elliptical. Also, it is assumed that the considered plate is subjected to boundary in-plane preload and is rested on Winkler-type elastic foundation. It is assumed that the mechanical properties of the functionally graded plate vary continuously through the thickness according to a power law of the volume fraction of the constituents. The governing equations of motions are derived by employing the variational approach. The obtained equations are solved using Ritz method. In addition to the analytical modeling, for comparison, the problem is also modeled and analyzed numerically by using finite element software Abaqus. Correctness and accuracy of the present analytical model is confirmed through comparing the present analytical results by the results existed in the literature and by the present numerical results. After that, doing parametric study, the effects of some important parameters such as the boundary conditions, the in-plane forces, the plate geometry and the power-law index on the vibration behavior of the plate are studied and discussed. The results presented in this research are of great importance in design and application of the functionally graded elliptical plates.

All rights reserved to Iranian Society of Structural Engineering.

doi: 10.22065/JSCE.2021.254420.2276

*Corresponding author: Mehdi Hosseini.
Email address: m.hosseini@malayeru.ac.ir

ARTICLE INFO

Receive Date: 28 October 2020
Revise Date: 11 October 2021
Accept Date: 03 November 2021

Keywords: *Vibration;
Elliptical plate;
Functionally graded material;
Winkler foundation;
Initial in-plane load*

ارتعاشات ورق‌های بیضوی از جنس مواد هدفمند تابعی واقع بر بستر کشسان وینکلر تحت پیش بار داخل صفحه‌ای

مهدی حسینی^{۱*}، حسن غیاثوند^۲

۱-استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه ملایر، ملایر، ایران

۲-کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه ملایر، ملایر، ایران

چکیده

در این مقاله، رفتار ارتعاشات آزاد ورقهای بیضوی نازک مدرج تابعی با شرایط مرزی ساده و گیردار بر مبنای تئوری کلاسیک صفحات لایه‌ای بررسی می‌گردد. برخلاف مطالعات پیشین، هندسه ورق به صورت بیضوی و در حالت کلی تری، به شکل سوپر بیضوی در نظر گرفته می‌شود. همچنین، فرض می‌گردد که ورق مورد بررسی، تحت اعمال پیش بار داخل صفحه‌ای مرزی باشد و بر روی بستر کشسان از نوع وینکلر قرار گرفته باشد. فرض می‌شود که خواص مکانیکی ورق مدرج تابعی در راستای ضخامت به صورت پیوسته و براساس قانون توانی کسر حجمی مواد سازنده تغییر کند. با بکارگیری رویکرد حساب تغییرات، معادلات حاکم بر حرکت استخراج می‌گردند، برای حل معادلات حاصله، از روش رینتز استفاده می‌شود. علاوه بر مدلسازی تحلیلی، به منظور انجام مقایسه، مسئله به روش عددی و با استفاده از نرم افزار اجزاء محدود آباکوس نیز مدلسازی و تحلیل می‌گردد. صحت و دقت رهیافت تحلیلی حاضر از طریق مقایسه نتایج تحلیلی حاضر با نتایج موجود در ادبیات موضوع و همچنین نتایج عددی حاضر تایید می‌گردد. در ادامه، با انجام مطالعه پارامتری، اثرات برخی پارامترهای مهم همچون شرایط مرزی، نیروهای درون صفحه‌ای، هندسه ورق و توان کسر حجمی بر روی رفتار ارتعاشی ورق مطالعه و بحث می‌گردد. نتایج ارائه شده در این پژوهش می‌تواند در طراحی و کاربرد ورقهای بیضوی از جنس مدرج تابعی حائز اهمیت فراوان باشد.

کلمات کلیدی: ارتعاشات، ورق بیضوی، ماده هدفمند تابعی، بستر وینکلر، پیش بار داخل صفحه‌ای

شناسه دیجیتال:		سابقه مقاله:				
doi:	https://doi.org/10.22065/JSCE.2021.254420.2276	چاپ	انتشار آنلاین	پذیرش	بازنگری	دریافت
	10.22065/JSCE.2021.254420.2276	۱۴۰۱/۴/۰۱	۱۴۰۰/۸/۱۲	۱۴۰۰/۸/۱۲	۱۴۰۰/۷/۱۹	۱۳۹۹/۸/۰۷
مهدی حسینی m.hosseini@malayeru.ac.ir					*نویسنده مسئول: پست الکترونیکی:	

۱- مقدمه

امروزه مواد ناهمسان در ضخامت به عنوان موادی با مقاومت گرمایی بالا و تنش گرمایی پایین شهرت یافته‌اند. کاربرد این مواد در سازه‌هایی که در معرض محیط‌هایی با شوک‌های گرمایی قرار می‌گیرند، مانند سازه‌های فضایی، مرسوم است. گرچه این مواد در ابتدا به منظور استفاده در سازه‌های فضاپیما و راکتورهای هسته‌ای طراحی شدند، ولی در سال‌های اخیر کاربرد فراوانی پیدا کرده‌اند که از آن جمله می‌توان به اجزای موتورهای انفجاری، وسایل مغناطیسی، ابزار برش و پوشش محافظه احتراق پیشران موشک اشاره کرد [1]. این مواد که جزء مواد کامپوزیتی جدید دسته بندی می‌شوند، اولین بار توسط گروهی از دانشمندان ژاپنی [2-3] در سال 1984 ساخته شد. شکل معمول مواد ناهمسان در ضخامت، به صورت ترکیبی از سرامیک و فولاد می‌باشد. سرامیک توانایی مقاومت در برابر بارهای گرمایی شدید در محیط‌هایی با درجه حرارت بالا را دارد، در طرف مقابل فولاد توانایی کاهش تنش‌های کششی ایجاد شده در مراحل نخستین خنک شدن سرامیک را داراست. به دلیل تغییرات تدریجی و پیوسته خواص مواد از یک سطح به سطح دیگر، مواد ناهمسان در ضخامت، مشکلات کامپوزیت‌های لایه‌ای از جمله ترک‌ها و حفره‌های ایجاد شده در مرز مشترک لایه‌ها را برطرف کرده است و تغییرات تنش در ضخامت بدون شکستگی و به صورت هموار اتفاق می‌افتد.

با توجه به کاربرد فراوان مواد ناهمسان در ضخامت، حل دقیق معادلات دیفرانسیل حاکم بر آن‌ها، اهمیت ویژه‌ای پیدا کرده است ولی حل دقیق این معادلات به دلیل پیچیدگی آن‌ها، تنها در مسائل خاص از نظر شکل هندسی ورق، شرایط مرزی، توزیع نیروهای داخل صفحه وارده و همسانی ماده موجود است و در اکثر مسائل، الزاماً باید از روش‌های عددی همچون روش‌های ریتز، گالرکین، سری‌های ریاضی، اجزاءمحدود، نوارمحدود و تفاضل محدود استفاده کرد. قابل ذکر است که روش‌های عددی، اگر به طور مناسبی مورد استفاده قرار گیرند، می‌توانند با دقت لازم به حل دقیق نزدیک شوند. این دقت بستگی به تعداد جملات حل یا درجات آزادی مسئله دارد. البته در روش‌های عددی، معمولاً تعیین نتایج با دقت زیاد، نیازمند حل یک دستگاه معادلات خطی بزرگ است. از جمله پیچیدگی‌های موجود در حل دقیق مسائل ورق، می‌توان به شرایط مرزی پیچیده، بارگذاری‌های مختلف و درگیری تغییر مکان‌های درون صفحه و برون صفحه اشاره کرد. در مواقعی هندسه طراحی ایجاب می‌کند که مهندس طراح از شکل‌هایی علاوه بر دایروی و مستطیلی برای مسائل کاربردی استفاده کند. برای مثال، دیواره‌ها در تجهیزات پتروشیمی، صفحه پایه در قایق‌های بادبانی، صفحه بکسل یدک کشتی و ورقه ای بکار گرفته شده در مبدل‌های حرارتی ویژه صنایع کشتی سازی اشاره کرد.

در ارتباط با پژوهش‌های پیشین صورت گرفته پیرامون مسئله، می‌توان گفت که یانگ و شن [4] ارتعاشات آزاد و گذرای ورق‌های نازک تابعی مدرج مستقر بر روی بستر کشسان، تحت پیش تنش صفحه‌ای را بررسی کردند. همچنین شن [5] و یانگ و شن [6] با استفاده از تئوری ورق نازک، مسئله جابجایی‌های بزرگ و پساکمانش یک ورق تابعی مدرج تحت بار حرارتی را تحلیل نمودند. الله‌وردیزاده و همکارانش [7] با بکارگیری یک روش نیمه تحلیلی، ارتعاشات غیرخطی نامتقارن ورق‌های دایروی نازک ساخته شده از مواد تابعی را مورد مطالعه قرار دادند. لیجون و ژولیانگ [8] به تحلیل ارتعاشات غیر خطی ورق‌های ارتوتروپیک مستطیل شکل قرار گرفته بر روی بستر سه پارامتری که در محیط حرارتی واقع بودند، پرداختند. آنها برای بدست آوردن پاسخ، از تبدیل پارامتری استفاده نمودند. لال و احلاوات [9] ارتعاشات و کمانش متقارن دوار ورق‌های دایروی از جنس مواد هدفمند تابعی را به کمک روش تبدیل دیفرانسیلی مطالعه نمودند. در بررسی آنها، ورق تحت نیروهای درون صفحه ای یکنواخت و با شرایط مرزی ساده و گیردار در نظر گرفته شد و تحلیل آنها مبتنی بر نظریه کلاسیک ورق بود.

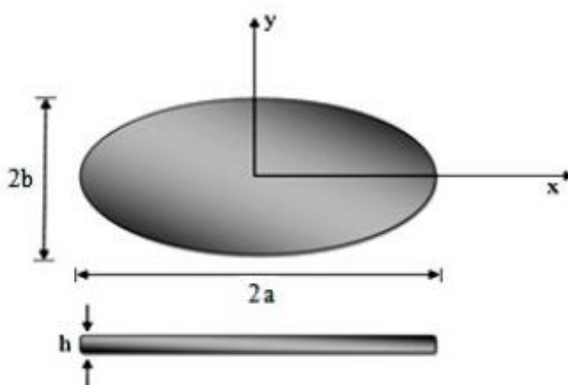
ابوالقاسمی و همکارانش [۱۰] برای تحلیل ارتعاشات ورقهای مستطیلی تحت انواع مختلف بارهای درون صفحه ای غیر یکنواخت، یک رویکرد تحلیلی مبتنی بر نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول ارائه دادند. ژاو و همکارانش [۱۱] به تحلیل دینامیک ورقهای قطاعی، حلقوی و دایروی متخلخل هدفمند تابعی با نگهدارنده های کشسان کلی پرداختند. مدل تئوری آنها بر اساس نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول بود و برای یافتن پاسخها، حساب تغییرات بکار گرفته شد. لال و احلاوات [۱۲] به مطالعه تاثیر بارگذاری محیطی هیدروستاتیک بر روی ارتعاشات متقارن دوار آزاد ورقهای دایروی نسبتاً ضخیم از جنس مواد هدفمند تابعی بر اساس نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول پرداختند. فرض شد که خواص مکانیکی ورق در هر دو راستای شعاعی و عرضی مطابق تابع توانی تغییر کند. شرایط مرزی به صورت ساده و گیردار در نظر گرفته شد. برای استخراج معادلات دیفرانسیل حاکم، از اصل همیلتن استفاده شد و پاسخ عددی با بکارگیری روش مربعات تفاضلی هارمونیک بدست آمد.

از جمله مطالعاتی که اخیراً بر روی ورقهای بیضوی انجام شده است می‌توان به کار کرباسی و آلتای [13]، برای بررسی ارتعاشات این سازه‌ها با ضخامت ثابت و متغیر با استفاده از روش ریتز اشاره نمود. وانگ و همکارانش نیز [14]، ارتعاش و کمانش ورقهای بیضوی همگن را تحت شرایط مرزی ساده و گیردار به کمک روش ریتز مورد بررسی قرار داد. کرباسی [15]، رفتار ورقهای سوپر بیضوی ساخته شده از مواد تابعی مدرج را از لحاظ استاتیکی و دینامیکی در شرایط مرزی ساده و گیردار به کمک روش گالرکین مورد تحلیل قرار داد. در این تحلیل تاثیر پارامترهایی همچون توان تابع شکل و توان کسرحجمی مورد بررسی قرار گرفته است.

هدف از این مقاله، استفاده از روش انرژی و تئوری کلاسیک ورق برای محاسبه فرکانسهای طبیعی یک ورق بیضوی مدرج تابعی با شرایط مرزی ساده و گیردار می‌باشد. بر خلاف مطالعات پیشین، در این پژوهش فرض می‌شود که ورق به صورت بیضوی و در حالت کلی تری، به شکل سوپر بیضوی باشد که تحت اعمال پیش بار داخل صفحه ای و واقع بر روی بستر کشسان وینکلر باشد.

۲- روابط ریاضی مسئله

در شکل (۱) یک ورق بیضوی به ضخامت h ، قطر طولی $2a$ و قطر عرضی $2b$ به طور شماتیک نمایش داده می‌شود.



شکل ۱: شماتیک یک ورق بیضوی

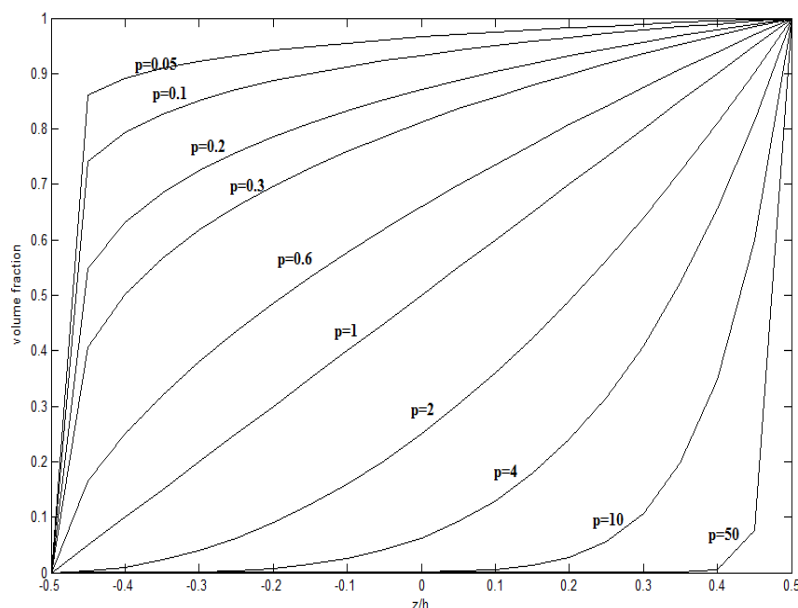
فرض می‌شود که خواص مکانیکی ورق مدرج تابعی در راستای ضخامت به طور پیوسته و براساس قانون توانی کسر حجمی مواد تشکیل دهنده به صورت معادلات (1) تغییر کند [16].

$$T(z) = (T_t - T_b)V_c + T_b$$

$$V_c = (z/h + 1/2)^p \quad (1)$$

$$-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$$

که در آن $T(z)$ یک مشخصه ماده مانند مدول الاستیسیته و یا چگالی است، T_t ، T_b به ترتیب خواص ماده در وجوه بالایی و پایینی، V_c کسر حجمی ماده سازنده ورق و p توان کسر حجمی می باشد. شکل (2) تغییرات کسر حجمی در ضخامت ورق را برای مقادیر مختلف توان کسر حجمی نشان می دهد.



شکل ۲: تغییرات کسر حجمی در ضخامت ورق برای مقادیر مختلف توان کسر حجمی [17]

نظریه کلاسیک ورق های ناهمسان در ضخامت، شکل تعمیم یافته نظریه کلاسیک ورق [18] برای کامپوزیت است. بر اساس فرضیات کیرشهف [19] میدان جابجایی به صورت معادله (2) بیان می شود:

$$U(x, y, z, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x}$$

$$V(x, y, z, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} \quad (2)$$

$$W(x, y, z, t) = w_0(x, y, t)$$

که در آن w_0 و v_0, u_0 میان جابجایی میان صفحه ورق در $(z=0)$ ، در راستای x, y, z دستگاه مختصات اند. در ادامه به منظور سهولت به جای w_0 و v_0, u_0 از w, v, u استفاده می شود. کرنش های هر نقطه از ورق، بر حسب تغییر مکان های میان صفحه طبق معادلات (3) عبارتند از [20]:

$$\epsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3)$$

$$\varepsilon_{xz} = 0$$

$$\varepsilon_{yz} = 0$$

$$\varepsilon_z = 0$$

و روابط کرنش-جابجایی به شکل ماتریسی زیر، معادله (4) قابل بازنویسی هستند:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(0)} \\ \varepsilon_y^{(0)} \\ \varepsilon_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(1)} \\ \varepsilon_y^{(1)} \\ \varepsilon_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

با استفاده از معادله (4) و قانون هوک تعمیم یافته، بردار تنش از معادله (5) بدست می‌آید:

$$\sigma = Q\varepsilon = Q\varepsilon^{(0)} + zQ\varepsilon^{(1)} \quad (5)$$

در معادله (5)، $\varepsilon^{(0)}$ ، ماتریس ستونی کرنش تار میانی و $\varepsilon^{(1)}$ ، مشتق دوم تغییرمکان، ماتریس ستونی انحناست و Q ماتریس خواص سختی مصالح مورد استفاده در ورق بوده که در مواد ناهمسان در ضخامت تابعی از z است. درایه‌های غیرصفر ماتریس Q از معادله (6) حاصل می‌شوند [16]:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu(z)^2} \\ Q_{12} &= Q_{21} = \nu(z)Q_{11} \\ Q_{66} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))} \end{aligned} \quad (6)$$

که در آن E و ν به ترتیب مدول الاستیسیته و ضریب پواسون هستند که تابعی از z می‌باشند.

از طرفی می‌توان بردار نیرو N و لنگر M را برای ورق تابعی مدرج برحسب بردار کرنش به صورت زیر نوشت [16]:

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^{(0)} \\ \varepsilon^{(1)} \end{bmatrix} \quad (7)$$

که در آن:

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{+h/2} Q_{ij}(1, z, z^2) dz \quad (8)$$

به A ، ماتریس سختی کششی، B ، ماتریس سختی درگیرکننده و D ، ماتریس سختی خمشی گفته می‌شود. همان‌طور که از معادله‌های (7) قابل مشاهده است، درایه‌های ماتریس A ، نیروهای درون صفحه را به کرنش تار میانی و درایه‌های ماتریس D ، خمش‌ها را به انحنا مربوط می‌سازد، ولی درایه‌های ماتریس B ، رابط بین نیروهای درون صفحه و انحنا و در طرف دیگر خمش‌ها با کرنش‌های تار میانی‌اند. آبریت [16]، امکان پذیر بودن حذف عناصر ماتریس درگیرکننده برای مواد ناهمسان در ضخامت را بررسی و تایید کرد. به طوری که با انتخاب تار دیگری به فاصله $\delta = \frac{B_{ij}}{A_{ij}}$ از تار میانی، یعنی در محل $z=0$ ، به عنوان صفحه مرجع، درایه‌های ماتریس درگیرکننده حول آن

برابر صفر می‌شوند و درایه های ماتریس سختی کششی و سختی خمشی حول تار جدید با نمادهای به ترتیب A' و D' به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} A'_{ij} &= A_{ij} \\ D'_{ij} &= D_{ij} - \frac{B_{ij}^2}{A_{ij}} \end{aligned} \quad (9)$$

لذا معادله (7) به فرم زیر بیان می‌شود:

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & 0 \\ 0 & D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^{(0)} \\ \varepsilon^{(1)} \end{bmatrix} \quad (10)$$

۲-۱- روابط انرژی

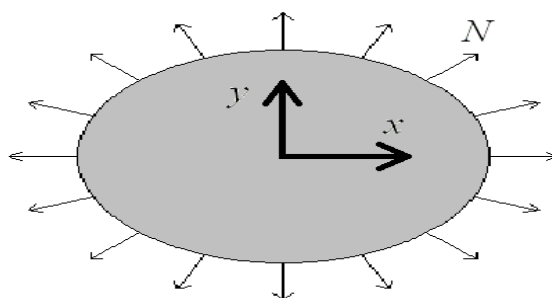
یک سازه ارتجاعی (خطی و یا غیر خطی)، زمانی در حالت تعادل است که در اثر تغییر مکان جزئی اختیاری هیچ گونه تغییری در مقدار انرژی کلی آن پیدا نشود. اگر U نشان دهنده مجموع انرژی‌های تغییر شکل (انرژی کرنشی) و انرژی پتانسیل نیروهای خارجی وارد بر سازه و T انرژی جنبشی آن باشد، آنگاه انرژی کلی π برابر است با [21]:

$$\pi = U - T \quad (11)$$

بر این مبنا به محاسبه انرژی جنبشی و پتانسیل ورق پرداخته می‌شود. انرژی جنبشی آن به شکل رابطه (12) محاسبه می‌گردد [21]:

$$T = \frac{1}{2} MV^2 = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{+h/2} \iint \rho(z) \dot{w}^2 dx dy dz \quad (12)$$

انرژی پتانسیل کلی ورق مربوط به انرژی‌های پتانسیل کرنشی، پیش بار اعمالی و بستر کشسان می‌باشد. در شکل 3 شماتیک ورق بیضوی تحت پیش بار



شکل ۳: شماتیک ورق بیضوی تحت پیش بار

برای انرژی پتانسیل کلی ورق می‌توان نوشت [22]:

$$U = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{+h/2} \iint (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \varepsilon_{xy}) dx dy dz + \iint N \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \frac{1}{2} \int K_w w^2 dA \quad (13)$$

که در معادله بالا انتگرالهای اول، دوم و سوم به ترتیب انرژی‌های پتانسیل کرنشی، نیروی داخل صفحه‌ای و بستر کشسان می‌باشند.

۲-۲- روش ریتز

در اینجا بر مبنای اصل تغییرات، از روش ریتز برای بدست آوردن فرکانسهای طبیعی ورق استفاده می‌شود. شکل کاهش یافته عبارت انرژی کلی سازه به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\delta\pi = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{+h/2} \iint \delta([\varepsilon]^T [Q][\varepsilon]) dx dy dz + \iint [K_w w \delta w + N(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y}) - \rho w \delta \dot{w}] dx dy \quad (14)$$

برای بدست آوردن فرکانس های طبیعی، جابجایی ورق در راستای محور Z به صورت هارمونیک فرض می‌شود:

$$w(x,y,t) \approx w_0(x,y) \sin(\omega t) \quad (15)$$

در رابطه فوق ω نشان دهنده فرکانس طبیعی و $w_0(x,y)$ دامنه جابجایی می‌باشد. با جایگذاری رابطه (15) در رابطه (14) و سپس انتگرال گیری از آن در راستای محور Z معادله مذکور به فرم زیر درمی‌آید:

$$\delta\pi = \iint [(N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \varepsilon_{xy}^0 + M_x \delta k_x + M_y \delta k_y + M_{xy} \delta k_s) + K_w w_0 \delta w_0 + N(\frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y}) - \rho \omega^2 w_0 \delta w_0] dx dy \quad (16)$$

مولفه های لنگر و نیرو به فرم معادله (10) می‌باشند و طبق این معادله، معادلات حرکت عرضی و داخل صفحه ای ورق نیز از هم مستقل می‌باشند. در روش ریتز تابع نامعلوم جابجایی (w_0) با ترکیب خطی توابع w_{ij} به شکل زیر تخمین زده می‌شود:

$$w_0(x,y) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J c_{ij} x^i y^j (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1)^{bc} \quad (17)$$

برای ارضا نمودن شرایط مرزی، $bc=1$ برای شرایط مرزی ساده، $bc=2$ برای شرایط مرزی گیردار در نظر گرفته می‌شود. حال با جایگذاری معادلات (10) و (17) در معادله (16)، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\delta\pi = \sum_{p=0}^I \sum_{q=0}^J \delta c_{pq} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J c_{ij} \iint [(D_{11} \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial x \partial y}) \frac{\partial^2 w_{pq}}{\partial x^2} + (D_{12} \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial y^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial x \partial y}) \frac{\partial^2 w_{pq}}{\partial y^2} + 2(D_{16} \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial y^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 w_{ij}}{\partial x \partial y}) \frac{\partial^2 w_{pq}}{\partial x \partial y} + K_w w_{ij} w_{pq} + N(\frac{\partial w_{ij}}{\partial x} \frac{\partial w_{pq}}{\partial x} + \frac{\partial w_{ij}}{\partial y} \frac{\partial w_{pq}}{\partial y}) - \rho \omega^2 w_{ij} w_{pq}] dx dy \quad (18)$$

به منظور دستیابی به حل ریتز لازم است آن دسته از توابع پذیرفتنی بدست آیند که به ازای آنها انرژی کلی ورق کمینه شود. همان‌طور که قبلاً ذکر شد تابع آزمایشی را به صورت رابطه (17) در نظر می‌گیریم. در این رابطه تنها ضرایب c_{ij} مجهول می‌باشند. چنانچه مرتبه چند جمله‌ای I+J باشد، آنگاه از رابطه بالا خواهیم داشت:

$$\delta\pi = \frac{\partial \pi}{\partial c_{00}} \delta c_{00} + \frac{\partial \pi}{\partial c_{01}} \delta c_{01} + \frac{\partial \pi}{\partial c_{02}} \delta c_{02} + \dots + \frac{\partial \pi}{\partial c_{IJ}} \delta c_{IJ} = 0 \quad (19)$$

از رابطه بالا، تعداد (I+1)(J+1) معادله مستقل زیر بر حسب ضرایب c_{ij} بدست می‌آید:

$$\frac{\partial \pi}{\partial c_{00}} = 0, \frac{\partial \pi}{\partial c_{01}} = 0, \frac{\partial \pi}{\partial c_{02}} = 0, \dots \& \frac{\partial \pi}{\partial c_{IJ}} = 0 \quad (20)$$

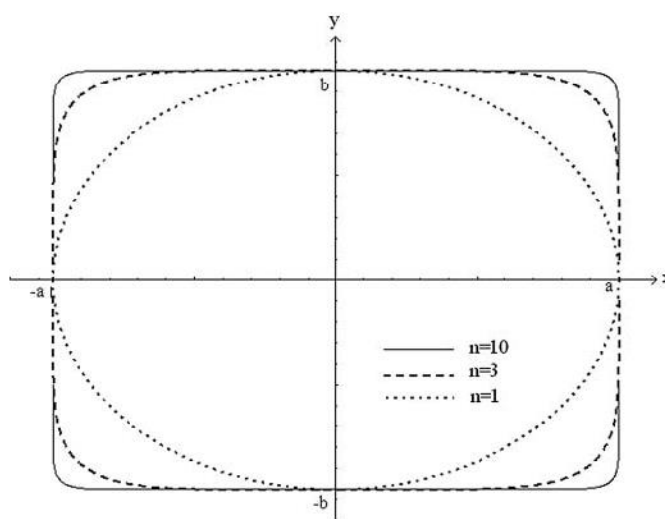
معادلات بالا دارای جواب بدیهی صفر هستند. جواب غیر بدیهی معادلات بالا که از صفر قرار دادن دترمینان ضرایب بدست می‌آید، همان معادله مشخصه ورق است که در برگیرنده فرکانس‌های طبیعی آن می‌باشد. مسلماً با افزایش تعداد جملات چند جمله‌ای رابطه (17)، تعداد معادلات تشکیل دهنده مسئله مقادیر ویژه افزایش یافته و در نتیجه به تعداد بیشتری از بی‌نهایت فرکانس طبیعی ورق دست خواهیم یافت، ضمن اینکه دقت فرکانس‌های حاصله نیز افزایش می‌یابد.

۲-۳- ورق‌های سوپر بیضوی

در بخش قبل تابع شکل ورق بیضوی به صورت رابطه (17) تعریف شد. فرم کلی‌تری از این ورق‌ها تحت عنوان ورق‌های سوپر بیضوی وجود دارد که تابع شکل آن‌ها به صورت رابطه زیر تعریف می‌شود [15]:

$$w_{ij}(x, y) = x^i y^j \left(\frac{x^{2n}}{a^{2n}} + \frac{y^{2n}}{b^{2n}} - 1 \right)^{bc} \quad (21)$$

که در این رابطه n ، توان تابع شکل نامیده می‌شود. شکل (4) ورق‌های سوپر بیضوی با مقادیر مختلف پارامتر توان تابع شکل را به صورت شماتیک نمایش می‌دهد. در واقع ورق‌های بیضوی حالت خاصی از ورق‌های سوپر بیضوی و به ازای $n=1$ می‌باشند.



شکل ۴: هندسه ورق سوپر بیضوی [15]

همان‌طور که شکل (4) نشان می‌دهد با افزایش n ، ورق بیضوی به یک ورق مستطیلی شکل با گوشه‌های گرد تبدیل می‌شود. ورق‌های مستطیلی با چنین هندسه‌ای در مواردی که مسئله تمرکز تنش در گوشه‌ها اهمیت دارد، کاربرد فراوان دارند.

۳- آزمایش همگرایی پاسخ

برای محاسبه فرکانس طبیعی ورق و همچنین مطالعه تاثیر پارامترهای مختلفی همچون خروج از مرکز، ضریب بستر، توان کسر حجمی و شرایط مرزی متفاوت بر آن ها، مثال های عددی متنوعی در این مقاله ارائه شده است. بدین منظور از ورقی با دو جنس مختلف آلومینیوم-آلومینا با نماد FGM1 و آلومینیوم-زیرکونیا با نماد FGM2 استفاده شده است، که خواص آن در جدول 1 آمده است. در همه محاسبات انجام شده در این پژوهش $h=0.02$ m در نظر گرفته شده است. در این پژوهش، برای ارائه نتایج عددی کلی تر، فرکانس ورق به صورت بی بعد ارائه شده است. لذا بدین منظور پارامتر سفتی خمشی D برای ورق همگن که در بی بعد کردن مورد استفاده قرار می گیرد به صورت رابطه زیر تعریف می شود:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (22)$$

آنالیز همگرایی نتایج دو فرکانس طبیعی اول بی بعد $(\Omega = \omega b^2 \sqrt{(\rho_m h / D)})$ ورق بیضوی FGM1 به ازای نسبت خروج از مرکز $\bar{K}_W = \frac{K_W b^4}{D_m} = 10$ ، پارامتر بستر بی بعد $p=5$ و $p=10$ به ترتیب در جداول 2 و 3 برای شرایط مرزی ساده و گیردار ارائه می گردد. در این جداول پارامتر N_{CR} همان بار بحرانی کمانش ورق بیضوی هدفمند تابعی می باشد که در مرجع [23] به تفصیل بررسی گردیده است.

جدول 1 خواص مکانیکی فلز و سرامیک [24]

نوع ماده	ρ_c (kg/m ³)	E_c (GPa)	ν_c	ρ_m (kg/m ³)	E_m (GPa)	ν_m
FGM1	3800	380	0.3	2700	70	0.3
FGM2	5700	200	0.3	2700	70	0.3

جدول 2: دو فرکانس اول بی بعد ورق بیضوی تابعی به ازای $p=5$

Simply supported		Clamped		I=J	N
Ω_1	Ω_2	Ω_1	Ω_2		
5.038	7.19	9.246	14.67	2	
5.038	6.61	9.246	11.87	3	
4.979	6.58	8.942	11.89	4	
4.989	6.45	8.942	11.21	5	
4.957	6.45	8.845	11.21	6	0
4.957	6.42	8.845	11.08	7	
4.953	6.414	8.841	11.076	8	
4.946	6.414	8.840	11.076	9	
4.942	6.412	8.833	11.064	10	
3.72	5.16	6.57	11.46	2	
3.72	4.76	6.57	8.95	3	$-0.5 N_{CR} $
3.76	4.82	6.41	9.07	4	

3.75	4.80	6.41	8.33	5
3.75	4.80	6.35	8.35	6
3.76	4.78	6.35	8.19	7
3.762	4.743	6.345	8.191	8
3.755	4.740	6.342	8.188	9
3.753	4.734	6.339	8.184	10

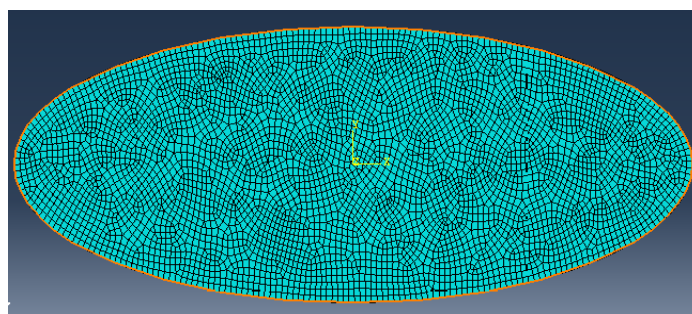
جدول ۳: دو فرکانس اول بی بعد ورق بیضوی تابعی به ازای $p=10$

Simply supported		Clamped		I=J	N
Ω_1	Ω_2	Ω_1	Ω_2		
4.96	7.03	9.00	14.24	2	
4.96	6.46	9.00	11.54	3	
4.91	6.43	8.72	11.53	4	
4.92	6.32	8.72	10.88	5	
4.89	6.32	8.62	10.88	6	0
4.89	6.29	8.62	10.76	7	
4.888	6.277	8.616	10.749	8	
4.888	6.273	8.613	10.741	9	
4.874	6.264	8.609	10.739	10	
3.68	5.02	6.39	11.10	2	
3.70	4.67	6.39	8.68	3	
3.73	4.71	6.22	8.81	4	
3.72	4.70	6.22	8.10	5	
3.72	4.70	6.19	8.13	6	$-0.5 N_{cr} $
3.72	4.68	6.19	7.94	7	
3.728	4.673	6.186	7.934	8	
3.723	4.669	6.184	7.924	9	
3.722	4.662	6.181	7.924	10	

همانطور که جداول ۲ و ۳ نشان می دهد، با افزایش تعداد جملات چند جمله‌ای تابع پذیرفتنی، مقادیر عددی حاصل از حل مساله به سمت اعداد مشخصی که همان فرکانس طبیعی مورد نظر می باشند، میل می کنند. با توجه به نتایج ارائه شده، می توان تعداد جملات $J=7$ را همگرا به حساب آورد و لذا در تعیین نتایج بعدی مقادیر $I=J=7$ در نظر گرفته می شوند.

۴- شبیه سازی مسئله در نرم افزار اجزاء محدود آباکوس

به منظور اهداف مقایسه‌ای، مسئله حاضر به روش عددی با استفاده از نرم افزار اجزاء محدود آباکوس نیز شبیه سازی و تحلیل می گردد. در شبیه سازی نرم افزاری، ورق بیضوی به صورت یک جسم تغییر شکل پذیر از نوع پوسته صفحه ای ایجاد گردید. از آنجایی که مواد ناهمسان در ضخامت دارای تغییرات تدریجی و پیوسته در خواص خود در راستای ضخامت هستند، شبیه سازی مواد ناهمسان در نرم افزارهای اجزاء محدود کمی پیچیده می باشد. لذا مطابق روش مرسوم برای شبیه سازی این گونه مواد در نرم افزارهای اجزاء محدود، ورق مورد نظر در راستای ضخامت به n لایه تقسیم گردید، به طوری که هر لایه را بتوان یک لایه همگن با خواص ثابت در همه جهات در نظر گرفت. در اینجا به علت ضخامت کم ورق تعداد تقسیمات یا همان n ، برابر با ۱۰ در نظر گرفته شد. ضمناً، فرض شد که خواص هر لایه، همان خواص سطح وسط لایه مربوطه باشد. شرایط مرزی به دو صورت مجزای تکیه گاه ساده و گیردار بر روی محیط ورق بیضوی اعمال گردید. در مرحله مش بندی، با انجام آزمایش همگرایی مش، اندازه و تعداد المانهای مناسب انتخاب گردید. در شکل (5)، مش بندی ایجاد شده برای ورق نمایش داده می شود. همچنین برای تحلیل مسئله، حل فرکانس با حلگر لنگزوس^۳ برای مسئله لحاظ گردید.



شکل ۵: مش بندی ایجاد شده برای ورق

۵- صحت سنجی

با هدف انجام مقایسه بیشتر، مسئله حاضر به روش عددی و با استفاده از نرم افزار اجزاء محدود آباکوس نیز مدلسازی و تحلیل گردید. به منظور خلاصه نویسی، از ذکر جزئیات مدلسازی مسئله در نرم افزار صرف نظر می گردد. به منظور صحت سنجی رهیافت تحلیلی حاضر، نتایج بدست آمده با نتایج پژوهش‌های دیگران و همچنین نتایج حاصل از تحلیل مسئله با نرم افزار اجزاء محدود آباکوس برای ورق‌های بیضوی FGM و همگن مقایسه می شوند. در هر قسمت درصد اختلاف بین نتایج روش حاضر و سایر روش‌ها محاسبه و ارائه شده است. این درصد اختلاف به صورت زیر تعیین می گردد:

$$\%Diff = \frac{|PM - OM|}{PM}, PM: \text{Present Method} \ \& \ OM: \text{Other Methods} \quad (23)$$

جدول ۴ مقایسه بین نتایج تحلیلی و عددی حاضر با نتایج مراجع [۱۴] و [۱۵] برای فرکانس طبیعی بی بعد $\omega b^2 \sqrt{\rho_c h / D_c} \Omega$ با $\frac{E_c h^3}{12(1-\nu^2)} D_c$ ورق بیضوی FGM2 به ازای مقادیر مختلف خروج از مرکز در حالت $b=1 \text{ m}$ و $p=0$ تحت شرایط تکیه گاهی ساده را نشان می دهد. همچنین، با توجه به مراجعی که برای مقایسه استفاده شده‌اند، ارتعاشات ورق بیضوی FGM2 را به ازای مقادیر مختلف خروج از مرکز با $b=1 \text{ m}$ تحت شرایط تکیه گاهی ساده و گیردار مورد تحلیل قرار گرفته و فرکانس طبیعی آن هم به روش تحلیلی و هم به

¹ Deformable>Shell>Planar

² Frequency

³ Lanczos

روش المان محدود بدست آمده است که نتایج حاصله به صورت فرکانس طبیعی بی بعد $\Omega = \omega b^2 / 10^3 h$ برای تکیه گاه ساده در جدول ۵ و فرکانس طبیعی بی بعد $\Omega = \omega a^2 / \pi^2 \sqrt{\rho_c h / D_c}$ برای تکیه گاه گیردار در جدول ۶ ارائه شده است.

جدول ۴: اولین مد فرکانسی بی بعد ورق FGM2 تحت شرایط تکیه گاهی ساده به ازای $p=0$ ، ضریب بستر صفر و مقادیر مختلف خروج از مرکز

a/b	Present	FEM	Ref.[15]	Ref.[14]
1	4.9447	4.9363	4.9405	4.935
1.5	3.6913	3.6808	3.6871	3.681
2	3.3218	3.3042	3.3144	3.303
3	3.0386	3.0094	3.0352	3.009

جدول ۵: اولین مد فرکانسی بی بعد ورق FGM2 تحت شرایط تکیه گاهی ساده به ازای $p=0,1$ ، ضریب بستر صفر و مقادیر مختلف خروج از مرکز

p	a/b	Present	Abaqus	Ref. [15]	% error	
					Present and Abaqus	Present and Ref. [15]
0	1	8.8634	8.8483	8.8561	0.17	0.08
	2	5.9544	5.9228	5.9412	0.53	0.22
	3	5.4468	5.3944	5.4407	0.96	0.11
	4	5.1919	5.1449	5.2223	0.9	0.58
	5	5.0332	5.0112	5.1054	0.43	1.43
	7	4.8551	4.8572	4.9940	0.04	2.86
	1	1	8.1470	8.3927	7.9448	3.01
2		5.4335	5.6115	5.3299	2.52	2.62
3		5.0070	5.1060	4.8809	1.97	2.52
4		4.7727	4.8697	4.6849	2.03	1.84
5		4.6268	4.7315	4.5801	2.26	1.01
7		4.4631	4.6018	4.4801	3.10	0.38

جدول ۶: اولین مد فرکانسی بی بعد ورق FGM2 تحت شرایط تکیه گاهی گیردار به ازای $p=0$ و مقادیر مختلف خروج از مرکز

a/b	Present	Abaqus	Ref. [14]	% error	
				Present and Abaqus	Present and Ref. [14]
1	4.157	4.147	4.141	0.22	0.4
1.5	7.021	7.007	6.944	0.19	1.1
2	11.102	11.023	11.100	0.65	0.02
2.5	16.510	16.422	16.480	0.55	0.17
2.75	19.810	19.731	19.611	0.37	1.05
3	23.231	22.997	23.032	1.00	0.87

همانطور که نتایج جداول ۴-۶ نشان می دهند، تطابق بسیار خوبی بین نتایج رهیافت تحلیلی حاضر و نتایج پژوهش‌های دیگران و همچنین نتایج عددی حاضر مشاهده می شود که خود مبین صحت و دقت تحلیل ارائه شده در پژوهش حاضر می باشد.

۶- نتایج و بحث

با توجه به نتایج جداول ۲-۶ مشاهده می شود که نیروی داخل صفحه ای اولیه فشاری باعث کاهش فرکانس طبیعی بی بعد می شود. در ضمن، مقادیر حاصله برای فرکانس طبیعی بی بعد مربوط به توان کسر حجمی $p=0$ (ورق همگن) بزرگتر از حالت $p=1$ می باشند. همچنین برای ورقهای گیردار، فرکانس بی بعد بزرگتر از نتایج مربوط به ورقهای ساده می باشد.

در این قسمت، یک ورق سوپر بیضوی با خواص FGM1، $b=1$ m به ازای $p=5$ و $\bar{K}_W=0$ تحت شرایط مرزی گیردار و ساده مورد تحلیل قرار می گیرد. نتایج حاصل از این تحلیل به ازای نسبت‌های مختلف a/b و n در جدول ۷ ارائه می گردد.

جدول ۷: اولین مد فرکانسی بی بعد ورق سوپر بیضوی به ازای مقادیر مختلف توان تابع شکل و خروج از مرکز

a/b	Simply supported				Clamped			
	n=1	n=2	n=5	n=10	n=1	n=2	n=5	n=10
1	6.38	6.11	6.32	6.38	13.57	11.82	11.65	11.65
2	4.28	3.94	3.97	4.00	9.05	8.08	7.96	7.96
3	3.92	3.57	3.55	3.56	8.31	7.63	7.51	7.51
4	3.73	3.44	3.40	3.41	8.02	7.49	7.38	7.39
5	3.62	3.37	3.33	3.33	7.87	7.42	7.43	7.33

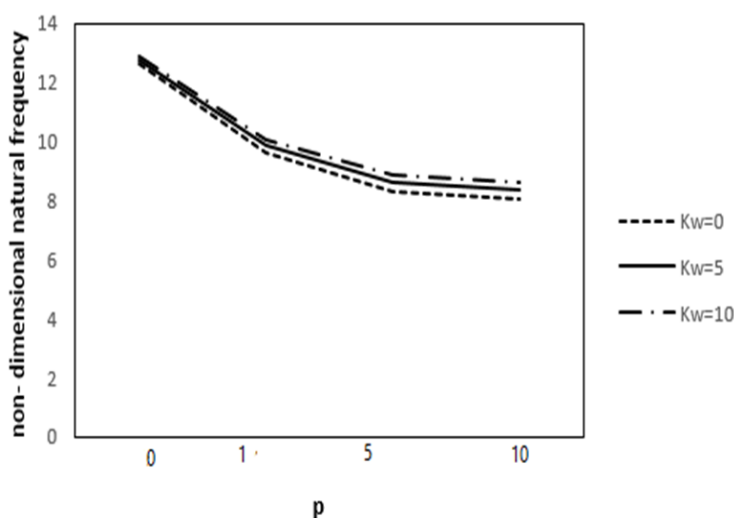
نتایج ارائه شده در جدول ۷ نشان می دهد که به ازای یک نسبت خروج از مرکز مشخص با افزایش n فرکانس طبیعی بی بعد غالباً کاهش یافته و به سمت یک مقدار مشخص میل می کند. برای مثال، برای $a/b=3$ ، وقتی n از 1 به 10 افزایش پیدا می کند، اولین مد فرکانسی بی بعد ورق برای شرایط مرزی ساده و گیردار به ترتیب 9.2% و 9.6% کاهش می یابد.

شکل (6) تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد ورق بیضوی هدفمند FGM1 با $\frac{a}{b} = 0.3$ ، $b=0.1$ m به ازای مقادیر مختلف توان کسر حجمی و ضریب بستر تحت شرایط تکیه‌گاهی گیردار و ساده نشان می دهد. همان‌طور که مشاهده می گردد، با افزایش ضریب بستر، فرکانس طبیعی بی بعد نیز افزایش می یابد که علت آن افزایش سفتی کل سازه می باشد. ضمناً برای شرط مرزی تکیه‌گاه ساده، تغییرات مذکور بیشتر است. همچنین با افزایش توان کسر حجمی، فرکانس طبیعی بی بعد کاهش می یابد که علت آن کاهش سفتی ورق می باشد. هرچه توان کسر حجمی افزایش می یابد فرکانس ورق به سمت فرکانس یک ورق همگن فلزی میل می کند. این در حالی است که با کاهش توان کسر حجمی فرکانس ورق به سمت فرکانس یک ورق همگن سرامیکی میل می کند. مثلاً به ازای $K_W = 5$ وقتی p از 0 به 10 افزایش پیدا می کند، مقدار فرکانس طبیعی بی بعد برای شرایط مرزی گیردار و ساده به ترتیب 35% و 30% کاهش می یابد.

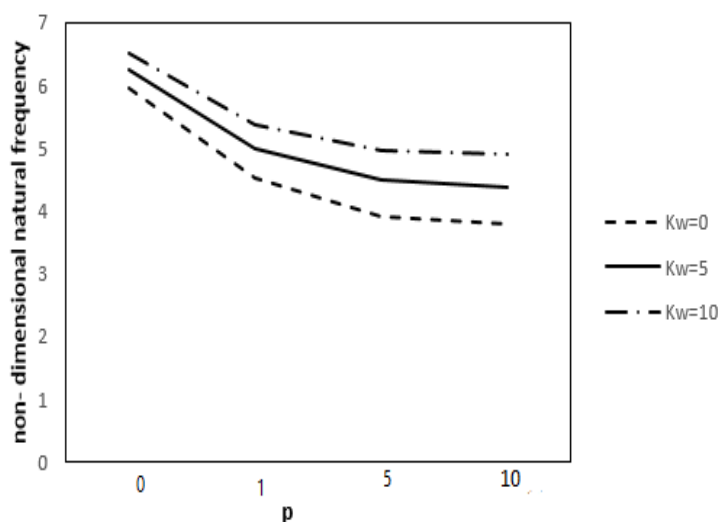
شکل (7) تاثیر نیروهای داخل صفحه‌ای فشاری و کششی بر فرکانس ورق بیضوی هدفمند FGM1 با $\frac{a}{b} = 3$ ، $b=0.1$ m، $p=5$ و $\bar{K}_W=0$ تحت شرایط مرزی گیردار و ساده نشان می دهد. در این شکل نیروهای داخل صفحه‌ای که بر روی محور افقی نشان داده شده‌اند، در واقع ضرایبی از بار بحرانی کمانش می باشند. همان‌طور که در شکل مشاهده می شود با افزایش نیروهای فشاری مقدار فرکانس طبیعی

بی بعد کاهش می‌یابد در حالی که با افزایش نیروهای کششی فرکانس طبیعی بی بعد افزایش می‌یابد. همچنین برای شرط مرزی گیردار تغییرات مذکور بیشتر است. برای مثال، به ازای نیروی داخل صفحه‌ای فشاری $0.5N_{cr}$ ، مقادیر فرکانس طبیعی بی بعد برای شرایط مرزی گیردار و ساده به ترتیب 27% و 25% کمتر از حالت بدون نیروی داخل صفحه‌ای می باشد، در حالی که به ازای نیروی داخل صفحه‌ای کششی $0.5N_{cr}$ ، مقادیر فرکانس طبیعی بی بعد برای شرایط مرزی گیردار و ساده به ترتیب 20% و 21% بیشتر از حالت بدون نیروی داخل صفحه‌ای می باشد.

شکل (8) تاثیر خروج از مرکز بر سه فرکانس طبیعی اول بی بعد ورق بیضوی هدفمند FGM1 با $b=0.1$ m، $p=5$ ، $\bar{K}_w=0$ و $N=0$ تحت شرایط مرزی گیردار و ساده را نشان می‌دهد. همان‌طور که این شکل نشان می‌دهد با افزایش نسبت خروج از مرکز، فرکانس طبیعی بی بعد کاهش می‌یابد تا جایی که به مقدار تقریباً ثابتی می‌رسد که علت این امر کاهش سفتی ورق می‌باشد. مثلاً، وقتی a/b از 1 به 5 افزایش می‌یابد، مقادیر فرکانس طبیعی اول بی بعد برای شرایط مرزی گیردار و ساده به ترتیب 44% و 41% کاهش پیدا می‌کند.

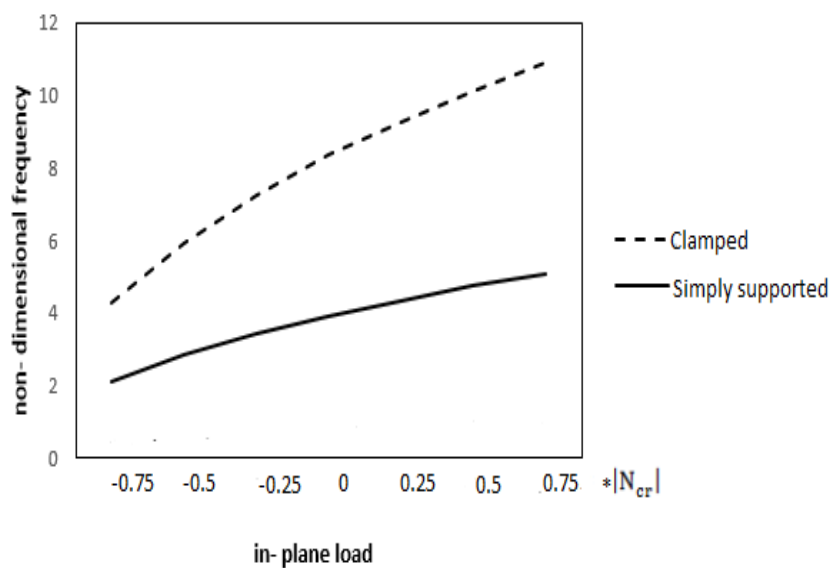


الف) گیردار

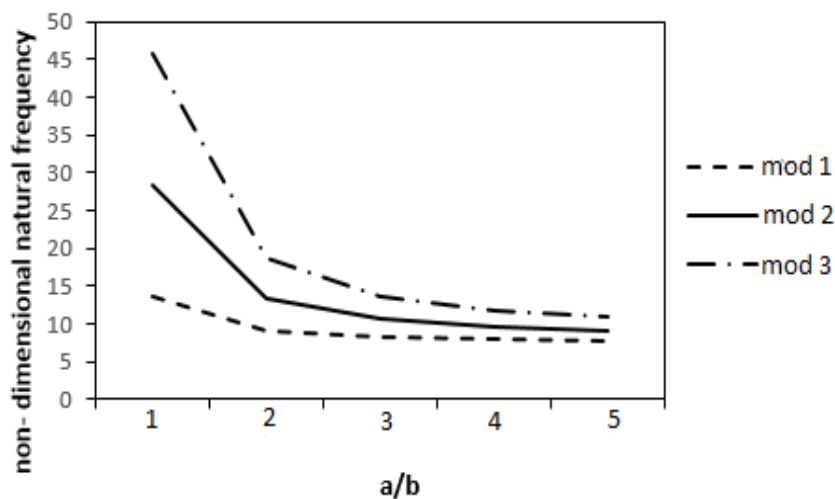


ب) ساده

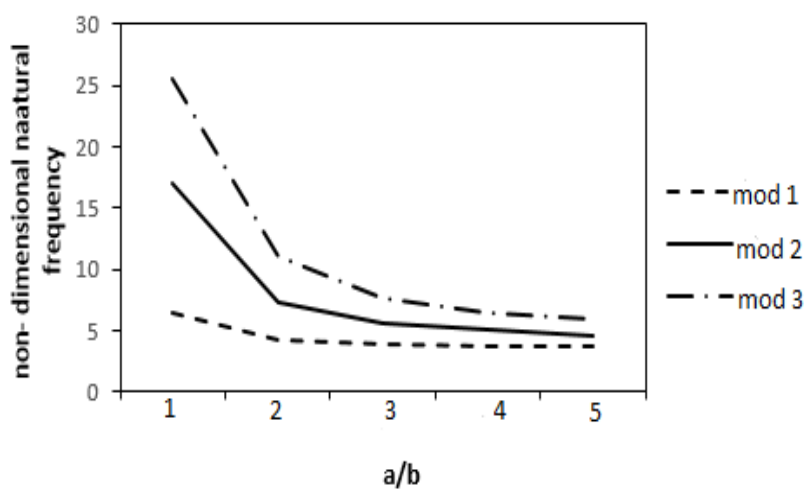
شکل ۶: تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد ورق بیضوی تابعی مدرج برحسب توان کسر حجمی و ضریب بستر تحت شرایط تکیه گاهی الف) گیردار و ب) ساده



شکل ۷: تغییرات فرکانس طبیعی اول بی بعد ورق بیضوی تابعی مدرج بر حسب نیروی داخل صفحه‌ای تحت شرایط تکیه گاهی گیردار و ساده



الف) گیردار



ب) ساده

شکل ۸: تغییرات سه فرکانس طبیعی اول بی بعد ورق بیضوی تابعی مدرج بر حسب نسبت خروج از مرکز تحت شرایط تکیه گاهی الف) گیردار و ب) ساده

۷- نتیجه گیری

در این مقاله، برای نخستین بار ارتعاشات ورقهای بیضوی و در شکل کلی تری سوپر بیضوی ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت پیش بار داخل صفحه‌ای مرزی و بر روی بستر کشسان از نوع وینکلر برای شرایط تکیه گاهی ساده و گیردار به کمک روش ریتز مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت. مقایسه‌های متنوع ارائه شده بین نتایج حاصل از این پژوهش و نتایج موجود در مراجع و همچنین نتایج حاصل از مدل‌سازی المان محدود، به خوبی صحت تحلیل حاضر را نشان می‌دهد. در واقع بررسی‌های صورت گرفته بیانگر این حقیقت هستند که فرکانس ارتعاشاتی این صفحات متأثر از نسبت خروج از مرکز، بارگذاری داخل صفحه-ای، توان کسر حجمی و پارامتر بستر می‌باشد. از مطالعات تحلیلی و عددی به عمل آمده در پژوهش حاضر می‌توان به تاثیر پارامترهای فوق به شرح زیر اشاره کرد:

- ۱- یک روند افزایش کلی در فرکانس‌های طبیعی ورق با افزایش پارامتر بستر کشسان مشاهده می‌گردد.
- ۲- با افزایش توان کسر حجمی فرکانس ورق کاهش می‌یابد، به طوری که هرچه توان کسر حجمی افزایش می‌یابد فرکانس ورق به سمت فرکانس یک ورق همگن فلزی میل می‌کند. در حالیکه با کاهش توان کسر حجمی فرکانس ورق به سمت فرکانس یک ورق همگن سرامیکی میل می‌کند.
- ۳- نیروی داخل صفحه‌ای فشاری موجب کاهش فرکانس‌های طبیعی شده، در حالی که نیروهای کششی باعث افزایش فرکانس‌های طبیعی می‌شوند. برای مثال، به ازای نیروی داخل صفحه‌ای فشاری $0.5N_{cr}$ ، مقادیر فرکانس طبیعی بی بعد برای شرایط مرزی گیردار و ساده به ترتیب 27% و 25% کمتر از حالت بدون نیروی داخل صفحه‌ای می‌باشد، در حالیکه به ازای نیروی داخل صفحه‌ای کششی $0.5N_{cr}$ ، مقادیر فرکانس طبیعی بی بعد برای شرایط مرزی گیردار و ساده به ترتیب 20% و 21% بیشتر از حالت بدون نیروی داخل صفحه‌ای می‌باشد.
- ۴- با افزایش نسبت خروج از مرکز فرکانس ورق کاهش می‌یابد تا جایی که به مقدار تقریباً ثابتی می‌رسد و پس از آن افزایش نسبت خروج از مرکز تاثیری بر آن ندارد. مثلاً، وقتی نسبت خروج از مرکز از 1 به 5 افزایش می‌یابد، مقادیر فرکانس طبیعی اول بی بعد برای شرایط مرزی گیردار و ساده به ترتیب 44% و 41% کاهش پیدا می‌کند.

مراجع

- [1] Miyamoto, Y. Kaysser, W. A. Rabin, B. H. Kawasaki, A. and Ford, R. G. (1999). *Functionally Graded Materials: Desing, Processing and Applications*. New York: Springer US.
- [2] Yamanouchi, M. Koizumi, M. Hirai, T. and Shiota, I. (1990). *Proceedings of First International Symposium on Functionally Gradient Materials*, Sendai: Japan.
- [3] Koizumi, M. (1993). The Concept of FGM. *Ceramic Transactions, Functionally Gradient Materials*, Vol. 34, pp. 3-10.
- [4] Yang, J. and Shen, H.S. (2001). Dynamic response of initially stressed functionally graded rectangular thin plates. *Composite Structures*, Vol. 54, pp. 497-508.
- [5] Shen, H.S. (2002). Nonlinear bending response of functionally graded plates subjected to transverse loads and in thermal environments. *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 44, pp. 561-584.
- [6] Yang, J. and Shen, H.S. (2003). Nonlinear bending analysis of shear deformable functionally graded plates subjected to thermo-mechanical loads under various boundary conditions. *Composites Part B: Eng*, Vol. 34, pp. 103-115.

- [7] Allahverdizadeh, A. Naei, M.H. and Bahrami, M.N. (2008). Nonlinear free and forced vibration analysis of thin circular functionally graded plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 310, pp. 966-984.
- [8] Lijun, Y. and Xueliang, J. (2014). Nonlinear vibration of rectangular orthotropic plates resting on the three-parameter foundations in thermal environments. *Electronic Journal of Geotechnical Engineering*, Vol. 19, pp. 4215-4226.
- [9] Lal, R. and Ahlawat, N. (2015). Axisymmetric vibrations and buckling analysis of functionally graded circular plates via differential transform method. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 52, pp. 85-94.
- [10] Abolghasemi, S. Eipakchi, H. R. and Shariati, M. (2016). An analytical procedure to study vibration of rectangular plates under non-uniform in-plane loads based on first-order shear deformation theory, *Archive of Applied Mechanics*, vol. 86, pp. 853-867.
- [11] Zhao, J. Xie, F. Wang, A. Shuai, C. Tang, J. and Wang, Q. (2019). Dynamics analysis of functionally graded porous (FGP) circular, annular and sector plates with general elastic restraints, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 159, pp. 20-43.
- [12] Lal, R. and Ahlawat, N. (2019). Buckling and vibrations of two-directional FGM Mindlin circular plates under hydrostatic peripheral loading, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 26(3), pp. 199-214.
- [13] Ceribasi, S. and Altay, G. (2009). Free vibration of super elliptical plates with constant and variable thickness by Ritz method. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 319, pp. 668-680.
- [14] Wang, C.M. Wang, L. and Liew, K.M. (1994). Vibration and buckling of super elliptical plates. *J. Sound Vibration.*, vol. 171(3), pp. 301-314.
- [15] Ceribasi, S. (2012). Static and Dynamic Analyses of Thin Uniformly Loaded Super Elliptical FGM Plates. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 19(5), pp. 323-335.
- [16] Abrate, S. (2008). Functionally Graded Plates Behave Like Homogeneous Plates. *Composites Part B: Engineering*, Vol. 39, pp. 151-158.
- [17] Yang, H.S. Dong, C.Y. Wu, Y.H. (2020). Postbuckling analysis of multi-directional perforated FGM plates using NURBS-based IGA and FCM, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 84, pp. 466-500.
- [18] Reddy, J. N. (2007). *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*. New York: CRC Press.
- [19] Kirchhoff, G. (1850). Uber Das Gleichgewicht Und Die Bewegung Einer Elastischen Scheibl. *Mathematik*, Vol. 40, pp. 51-88.
- [20] Kumar, A. (2018). *Free Transverse Vibration Analysis of thin rectangular plates having arbitrarily varying non-homogeneity along two concurrent edge*. Ms.C. Thesis. Department of Mechanical Engineering, National Institute of Technology, Rourkela Odisha.
- [21] Teng, M. W. and Wang, Y. Q. (2020). Nonlinear free vibration of rectangular plates reinforced with 3D graphene foam: Approximate analytical solution. *Results in Physics*, Vol. 17, 103147.
- [22] Chinwuba Ike, Ch. (2017). Variational Formulation of the Mindlin Plate on Winkler Foundation Problem, *Electronic Journal of Geotechnical Engineering*, Vol. 22, Bund. 12, pp. 4829-4846.
- [23] Ghiasvand, H. and Hosseini, M. (2019). Buckling analysis of functionally graded elliptical plates resting on Winkler-type elastic foundation. In: *3rd national conference of materials engineering*. Malayer: Malayer university.
- [24] Benferhat, R. Daouadji, T. H. Mansour, M. S. (2016). Free vibration analysis of FG plates resting on an elastic foundation and based on the neutral surface concept using higher-order shear deformation theory, *Comptes Rendus Mécanique*, Vol. 344(9), pp. 631-641.