Journal of Structural and Construction Engineering, 9(3), 2022, pp. 186-207

Journal of Structural and Construction Engineering

www.jsce.ir

Nonlinear Normal Modes of structures with nonlinear material based on Independent Periodic Method

Arash Ghariblou[1], Asghar Vatani Oskouei[2]*

1- Ph.D. Candidate, Department of Civil Engineering, Shahid Rajaee Teacher Training University, Tehran, Iran
2- Associated Professor, Department of Civil Engineering, Shahid Rajaee Teacher Training University, Tehran, Iran

ABSTRACT

Ever-increasing demands of the modern world and the growth of industry requirements toward more accurate analyses have made the engineering community develop the first fundamental step and meet the needs by extending the previous prevalent linear methods into nonlinear areas. In this regard, the improvement of linear modes as one of the most pervasive and widespread analytical methods opens a new window to analyses with more closeness to reality. In this paper, after the deep identification of Nonlinear Normal Modes, an approach is proposed to analyze the multi-degree-of-freedom structures with nonlinear material under undamped free vibration. Afterward, through an in-depth investigation of the calculation methods, a novel algorithm for identifying Nonlinear Normal Modes was proposed, and by expanding this algorithm to the existing invariable motion equation used in free vibration analysis, the possibility of the extraction of all Nonlinear Normal Modes has emerged. After that, to investigate the functionality of the proposed approach, the Finite Elements Method-based Model of a 2-story steel structure was developed and, after verification, it was used to form the invariable differential equations. Finally, after verifying the Independent Periodic Method, pseudo-continuous masses of Nonlinear Normal Modes and Frequency-Energy curves of the mentioned structure were calculated. It is worth noting that the independency of resulted response to previous points, the possibility of capturing Nonlinear Normal Modes with different frequencies in each degree-of-freedom, the potential of capturing all internal resonances, the expendability of Finite Elements Model to a set of invariable motion equations, and considering material nonlinearity are among achievements of the current paper.

ARTICLE INFO

Receive Date: 11 January 2021
Revise Date: 29 August 2021
Accept Date: 01 November 2021

Keywords: *Nonlinear Normal Modes*
Independent Periodic Method
Bifurcations
Nonlinear Dynamics
frequency-energy dependency
Internal Resonances

doi: 10.22065/JSCE.2021.266675.2332

*Corresponding author: Asghar Vatani Oskouei.
Email address: vatani@sru.ac.ir

Journal of Structural and Construction Engineering
JSCE
نشریه علمی-پژوهشی مهندسی سازه و ساخت

نشریه مهندسی سازه و ساخت
(علمی - پژوهشی)
www.jsce.ir

ISSE
انجمن مهندسی سازه ایران

استخراج مودهای نرمال غیرخطی سازه‌های دارای مصالح غیرخطی بر پایه روش تناوب مستقل

آرش قریب لو[1]، اصغر وطنی اسکوئی[2]*

۱- دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی، تهران، ایران
۲- دانشیار، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی، تهران، ایران

چکیده

تقاضای روزافزون دنیای مدرن و افزایش نیاز صنایع به تحلیل‌هایی با سطوح دقت بالاتر، جامعه مهندسی را بر آن داشته تا با بسط روش-های خطی متداول پیشین به نواحی غیرخطی گامی اساسی را در راستای ارضای این نیاز بردارد. در این میان، ارتقای مودهای نرمال خطی به‌عنوان یکی از فراگیرترین و محبوب‌ترین روش‌های تحلیلی، پنجره‌ای جدید به‌سوی تحلیلی نزدیک‌تر به واقعیت می‌گشاید. در این مقاله، پس از شناخت بنیادین مودهای نرمال غیرخطی، رویکردی جهت تحلیل سازه‌های چند درجه آزاد با مصالح غیرخطی تحت ارتعاش آزاد نامیرا پیشنهاد شده است. سپس با تمرکز بر روش‌های محاسبه، الگوریتمی نوین جهت شناسایی مودهای نرمال غیرخطی ارائه شده و با بسط این الگوریتم بر معادلات دیفرانسیل مانا به کار گرفته شده در تحلیل ارتعاش آزاد، امکان استخراج کلیه مودهای نرمال غیرخطی در حیطه مسئله فراهم گردیده است. پس از آن، به‌منظور بررسی عملکرد روش پیشنهادی، مدل اجزا محدودی یک سازه دو طبقه فولادی ایجاد شده و پس از اعتبارسنجی، در راستای تشکیل معادلات دیفرانسیل مانا به کار گرفته شده است. نهایتاً، پس از اعتبارسنجی روش تناوب مستقل، احجام مودهای نرمال غیرخطی شبه پیوستار و منحنی‌های انرژی - فرکانس سازه مذکور استخراج گشته‌اند. شایان‌ذکر است عدم وابستگی به پاسخ‌های پیشین در یافتن پاسخ بعدی، امکان دستیابی به مودهای نرمال غیرخطی با فرکانس‌های متفاوت در هر درجه آزادی، جذب تمامی رزونانس‌های داخلی، امکان بسط ساده مدل اجزا محدودی به یک مجموعه معادلات حرکت مانا و در نظر گرفتن مصالح غیرخطی در تحلیل، همگی از دستاوردهای نوین این مقاله هستند.

کلمات کلیدی: مودهای نرمال غیرخطی، روش تناوب مستقل، دوشاخگی، دینامیک غیرخطی، وابستگی انرژی - فرکانس، رزونانس داخلی.

سابقه مقاله:					شناسه دیجیتال:	
دریافت	بازنگری	پذیرش	انتشار آنلاین	چاپ	doi:	https://doi.org/10.22065/JSCE.2021.266675.2332
۱۳۹۹/۱۰/۲۲	۱۴۰۰/۶/۰۷	۱۴۰۰/۸/۱۰	۱۴۰۰/۸/۱۰	۱۴۰۱/۳/۳۱		10.22065/JSCE.2021.266675.2332

*نویسنده مسئول: دکتر اصغر وطنی اسکوئی
پست الکترونیکی: vatani@sru.ac.ir

۱- مقدمه

اولین گام در مواجهه با پیشرفت تکنولوژی در حوزه مهندسی مترادف با ارتقای سطح دقت تحلیل‌ها است و این مسئله مطالعات غیرخطی را تبدیل به عضوی جدانشدنی از تحقیقات در مرز علم به‌خصوص در دهه گذشته گردانیده است. ابعاد کاربردی روش‌های سنتی در دنیای واقعی در بهترین حالت منجر به یک تحلیل غیربهینه خواهد شد که عموماً نمی‌تواند پاسخگوی نیاز مسائل مدرن دارای تکنولوژی بالای امروز باشد. زمانی که سخن از تحلیل غیرخطی به میان می‌آید، جایگاه برجسته روش اجزا محدود به‌واسطه مسیر روشن آن در حل مسائل خودنمائی می‌کند. ولی به جهت ذات این روش در حل مسائل که شامل تغییر مکرر المان‌های معادلات دیفرانسیل حرکت غیرمانا به‌عنوان صورت‌مسئله و به‌خصوص ماتریس ضرایب (سختی) می‌شود، در بسیاری موارد استخراج ویژگی‌های ذاتی سازه‌ها نیازمند تلاش و ابتکار مضاعف بوده و یا اساساً مقدور نخواهد بود. البته نباید از به‌کارگیری زیرساخت‌های ایجاد شده برای آن تاحدامکان غافلگیر شد، چراکه می‌تواند گامی مؤثر در راستای تسریع و تسهیل مسیر تحلیلی عمیق‌تر و بنیادی‌تری باشد. ازاین‌رو، رجوع به روش‌های دارای ریشه در حوزه خطی و تلاش برای بسط آنها به ناحیه غیرخطی امری اجتناب‌ناپذیر به نظر می‌رسد. در این حیطه، یکی از فراگیرترین مفاهیم برخاسته از دنیای ریاضیات محض مودهای نرمال خطی هستند که به‌واسطه استخراج مقادیر ویژه به‌عنوان فرکانس‌های طبیعی ثابت در ناحیه خطی و بردارهای ویژه به‌عنوان مودهای نرمال خطی حاصل می‌شوند و تعابیر فیزیکی منتج از آنها بر محبوبیت این روش افزوده و آن را تبدیل به گزینه‌ای جذاب برای بسط داده شدن به جهت استخراج خواص و ویژگی‌های رفتاری و ذاتی سازه‌های غیرخطی می‌کند.

در این زمینه، روزنبرگ [۱] در سال ۱۹۶۰ برای اولین‌بار مودهای نرمال غیرخطی[1]را مدنظر قرار داد که شامل استخراج حالاتی از یک سیستم دو درجه آزاد نامیرا می‌شد که طی آنها تمامی درجات آزادی به شکلی هم‌آهنگ به ارتعاش درآیند. به‌عبارتی‌دیگر، حالاتی که طی آنها تمام درجات آزادی هم‌زمان به مقادیر اکسترمم خود رسیده و هم‌زمان از نقطه صفر تعادلی خود عبور کنند. او با بسط تعریف ارائه شده به یک سیستم دارای n درجه آزادی، مفهوم "ارتعاش هم‌آهنگ" را به‌عنوان پایه‌ای جهت ادامه مسیر روش خطی در ناحیه غیرخطی مدنظر قرار داد. در دهه هفتاد، رند و ریچارد [۲] با به‌کارگیری مرتبه‌های بالاتر جهت تقریب صریح عبارات متناسب با مودهای نرمال غیرخطی و نیز اعمال روش اغتشاش [2]سعی بر گسترش مطالعات پیشین نموده و سپس روشی مستقیم جهت محاسبه آنها در نزدیکی یک سیستم خطی ارائه نمودند. واکاکیس [۳] نیز به بررسی سیستم‌هایی با غیرخطی‌های شدید هندسی تحت ارتعاش آزاد پرداخت و روشی عددی جهت محاسبه مودهای غیرخطی پیشنهاد نمود و سپس با همکاری رند سیستم‌هایی با سطوح انرژی بالا [۴] را مورد بررسی قرار داد. فعالیت‌های شاَوو و پییر [۵] در سال ۱۹۹۱ نقطه عطفی در این زمینه محسوب می‌شود، چراکه نه‌تنها برای اولین‌بار به بررسی سازه‌هایی با تعداد درجات آزادی نسبی بالا پرداختند، بلکه تعریفی جدید برای مودهای نرمال غیرخطی ارائه نمودند و از آنها به‌عنوان "چندراهی تغییرناپذیر[3]" یاد کردند. آنها روشی بر پایه تکنیک چندراهی مرکزی[4]پیشنهاد کرده و بیش‌تر بر روی نقاط دوشاخگی[5]تمرکز نمودند و نشان دادند مودهای نرمال غیرخطی به شکلی مماس از ناحیه خطی در مرز انرژی غیرخطی خارج می‌شوند. آنها با بسط این مفاهیم روشی جهت محاسبه مودهای نرمال غیرخطی سیستم‌های پیوستار دوبعدی ارائه نموده و نتایج آن را به‌واسطه اعمال بر یک تیر ساده دو سر مفصلی با روش تعادل هارمونیک[6]مقایسه کردند [۶]. با گذر از مطالعات کثیر صورت‌گرفته در این حیطه، مطالعات کرشن، پییترز و همکاران [۷] در سال ۲۰۰۹ را می‌توان اقدامی مؤثر در راستای تسهیل کاربرد و اعمال این مفهوم به طیف گسترده‌تری از مسائل مهندسی دانست. آنها الگوریتمی مرحله‌به‌مرحله بر پایه تکنیک شوتینگ[7]و روش شبه طول کمان[8]جهت حل مسائل پیوستار به شکل عددی ارائه کردند. سپس رنسون و کرشن [۸] با بسط مفهوم چندراهی تغییرناپذیر به مطالعه مبسوط سیستم‌های غیرخطی پیچیده‌تر پرداخته و یک روش و فرمول‌بندی نوین در این زمینه ارائه کردند. آنها با بسط مفهوم دوراهی تغییرناپذیر و به‌کارگیری روشی نوین بر پایه روش اجزا محدود یک سازه چند درجه آزاد هوافضایی دارای غیرخطی‌های هندسی را مورد تحلیل قرار دادند.

---
[1] Nonlinear Normal Modes (NNMs)
[2] Perturbation Method
[3] Invariant Manifold
[4] Center Manifold Technique
[5] Bifurcations
[6] Harmonic Balance Method
[7] Shooting Technique
[8] Pseudo-Arc Length

تبلور مطالعات تئوریک مذکور در حیطه کاربردی برای اولین‌بار توسط ابراهیم و همکاران [۹] در دهه ۸۰ میلادی با مطالعه مودال یک سازه هوافضایی غیرخطی ساده‌سازی شده تحت تحریک سینوسی آغاز شد و تا سال ۲۰۱۱ که به‌عنوان ابزار استخراج ویژگی‌های ذاتی غیرخطی قسمت حمل موشک یک هواپیمای جنگی مورداستفاده قرار گرفت [۱۰]، معطوف به تحلیل سازه‌های ساده و اولیه بود. از دیگر مطالعات موردی جالب‌توجه می‌توان به بررسی مودهای غیرخطی یک هواپیمای جنگی F-16 با مقیاس یک‌به‌یک [۱۱]، بررسی ارتعاشات یک ماهواره کوچک حاوی تلسکوپ فضایی [۱۲]، تحلیل رفتار دینامیکی توربین‌های بزرگ صنعتی [۱۳]، مطالعه دینامیک شهاب‌سنگ‌ها [۱۴] و بررسی تبادل انرژی و رزونانس‌های داخلی نانولوله‌های تک‌دیواره کربنی [۱۵] اشاره کرد. شایان‌ذکر است که مودهای نرمال غیرخطی به‌عنوان ابزاری کاربردی در تشکیل مدل‌های کاهش مرتبه یافته [۱۸-۱۶]، پایش سلامت سازه‌ها [۱۹]، اکتشاف آسیب‌پذیری [۲۰]، مطالعه فرکانس سازه‌ها [۲۲-۲۱]، تحلیل مودال غیرخطی [۲۴-۲۳] و استخراج پارامترهای متناظر آن [۲۷-۲۵] نیز از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند.

در این مقاله، ابتدا در بخش دوم به شناخت مودهای نرمال غیرخطی شامل تعاریف بنیادین آنها و روش‌های محاسباتشان به‌عنوان صورت‌مسئله پیش‌رو پرداخته شده است. پس از آن بخش سوم با استخراج معادلات حرکت مانا متناظر با سازه‌های چند درجه آزاد تحت غیرخطی مادی به‌عنوان نقطه شروع حل مسئله بر پایه روش اجزا محدود آغاز گشته و سپس با تمرکز بر روش‌های محاسبه، الگوریتمی نوین جهت شناسایی مودهای نرمال غیرخطی ارائه شده و با بسط این الگوریتم بر معادلات دیفرانسیل مانا حاصله، امکان استخراج کلیه مودهای نرمال غیرخطی در حیطه مسئله فراهم گردیده است. پس از آن، به‌منظور بررسی عملکرد روش پیشنهادی، مدل اجزا محدودی یک سازه دو طبقه فولادی ایجاد شده و پس از اعتبارسنجی آن در فصل چهارم، در راستای تشکیل معادلات حرکت مانا سیستم مذکور بهره گرفته شده است. نهایتاً، پس از اعتبارسنجی روش تناوب مستقل، احجام مودهای نرمال غیرخطی شبه پیوستار، منحنی‌های انرژی - فرکانس و منحنی‌های فضای فازی سازه مذکور در فصل پنجم ارائه شده است. شایان‌ذکر است، عدم وابستگی به پاسخ‌های پیشین در یافتن پاسخ بعدی، امکان دستیابی به مودهای نرمال غیرخطی با فرکانس‌های متفاوت در هر درجه آزادی، جذب تمامی رزونانس‌های داخلی، امکان بسط مدل اجزا محدودی جهت دستیابی به معادلات حرکت مانا سازه‌های چند درجه آزاد و درنظرگرفتن سازه‌هایی با مصالح غیرخطی از دستاوردهای نوین این مقاله هستند.

۲- مودهای نرمال غیرخطی

۲-۱- تعریف مسئله

پیشرفت‌های تئوری در حوزه علوم غیرخطی پیدایش مفهوم مودهای نرمال غیرخطی را در پی داشت که برای اولین‌بار توسط روزنبرگ [۱] پایه‌گذاری و پرورانده شد. تلاش وی برای بسط مودهای خطی به سیستم‌های غیرخطی به‌واسطه اتخاذ مفهوم "ارتعاش هم‌آهنگ" به‌عنوان تعریفی مشترک بین مودهای نرمال خطی و غیرخطی متبلور شد. او شرایطی را شامل مودهای نرمال می‌دانست که درجات آزادی مختلف هم‌زمان به مقادیر اکسترمم خود رسیده و هم‌زمان از نقطه صفر عبور کنند. چرا که در صورت دستیابی به این موقعیت، امکان متصل کردن تمامی درجات آزادی وابسته به یک درجه آزادی اصلی ایجاد شده و مسیر تحلیل یک سیستم چنددرجه‌آزاد در تحلیل تنها یک درجه از درجات آزادی‌اش خلاصه می‌شود. در این حالت، رابطه بین درجات آزادی تحت عنوان "منحنی‌های مودال" معرفی شده که بالتبع غیرخطی هستند. به‌عبارت‌دیگر در حالت خطی همواره نسبت متناظر با جابجایی طبقه اول به جابجایی طبقه دوم برابر مقداری ثابت بوده و این نسبت در حالت غیرخطی مدام در حال تغییر است، ولی هر دو پاسخ متناوب هستند و ازاین‌رو این نسبت قابل دستیابی بوده و می‌توان باتکیه‌بر آن پاسخ یکی از درجه آزادی را به سایر درجات آزادی بسط داد. در اصل این نسبت (ها) قسمتی از مودهای نرمال غیرخطی هستند که در قالب منحنی‌های مودال ظاهر می‌شوند.

نهایتاً، به‌واسطه محدودیت علمی و غالب بودن روابط مبتنی بر فرضیات خطی در حیطه میرایی، مطالعه غیرخطی سازه‌ها به‌خصوص ساختمان‌ها عملاً به مقوله نامیرا محدود شده و مشخصاً این فرض ساده‌کننده تبعات خارج از انتظار و تعیین‌کننده‌ای در نتایج مستخرج از تحلیل بر پایه یک سیستم نامیرا در پی نخواهد داشت. همان‌طور که در [۲۸] هم اشاره شده است، ممکن است سیستمی از

حرکت پریودیک تبعیت کند ولی دوره تناوب تمامی درجات آزادی با هم برابر نباشد و این واقعیت یکی از محدودیت‌هایی است که در تعریف پایه روزنبرگ گنجانده نشده است. ازاین‌رو، مسئله پیش‌رو در مقاله حاضر یافتن پاسخ‌هایی است که تعریف "ارتعاش متحد درجات آزادی و نه لزوماً هم‌آهنگ" را ارضا نماید.

۲-۲- مفاهیم پایه

در گذر از مودهای نرمال خطی به غیرخطی، برخی ویژگی‌ها مشترک و قابل بسط و برخی منحصر به هر یک از دو ناحیه هستند. **اصل جمع آثار قوا** به‌عنوان برجسته‌ترین ویژگی مودهای خطی که امکان بیان پاسخ نهایی بر مبنای ترکیبی از مودهای خطی را فراهم می‌سازد، در ناحیه غیرخطی قابل دستیابی نیست. خاصیت **تعامد مودهای خطی** نیز که طی آن ضرب دو مود خطی متفاوت در فضای فازی یک سیستم نامیرا همواره برابر صفر می‌شود نیز منحصر به سیستم‌های خطی است. در این میان، ویژگی **تغییرناپذیری**[9] به‌عنوان یکی از تفاسیر فیزیکی جالب‌توجه از مودها در ناحیه غیرخطی نیز معتبر بوده و بدین معنی است که اگر سیستم کاملاً منطبق بر مودی آغاز به حرکت نماید، سایر مودها خاموش باقی مانده و پاسخ سیستم صرفاً منطبق بر آن مود خواهد بود. فرکانس طبیعی و نسبت‌های بین درجات آزادی در سیستم‌های خطی مقادیری ثابت هستند، اما با ورود به انرژی‌های متناظر با ناحیه غیرخطی، مقادیر فرکانس طبیعی متناظر هر مود شروع به تغییر کرده و نسبت بین جابجایی درجات آزادی از حالت خطی به منحنی‌های غیرخطی تغییر می‌یابند. نمود بارز این تغییرات در نمودار **وابستگی انرژی - فرکانس** قابل‌مشاهده است، چرا که در سطوح پایین انرژی به‌واسطه مقادیر ثابت فرکانس نمودار با یک خط افقی آغاز گشته و به‌تدریج و با ورود به انرژی‌هایی با سطوح بالاتر (نواحی غیرخطی) به منحنی منتج می‌شود. این مسئله نمودار انرژی - فرکانس را تبدیل به یکی از مناسب‌ترین ابزارها جهت ترسیم ویژگی‌های ذاتی یک سازه در مواجهه با رفتارهای غیرخطی می‌کند.

رزونانس داخلی به معنای اندرکنش بین مودهای نرمال غیرخطی در واقع یک تبادل انرژی بین فرکانس‌های پایه هر مود است و هیچ‌گونه مشابهی در ناحیه خطی برای آن تعریف نشده است. **نقطه دوشاخگی** نیز به‌عنوان مفهومی منحصر نواحی غیرخطی، به محل تغییر پایداری یک مود و تشکیل مسیر پایدار جدیدی به سمت فرکانس مود دیگر گفته می‌شود. شایان‌ذکر است تعداد مودهای نرمال غیرخطی می‌تواند به‌واسطه رخداد رزونانس داخلی به عددی بیش از تعداد درجات آزادی تجاوز نماید. گاهاً با افزایش انرژی ورودی، آن انرژی تمایل به منحصر شدن در بخشی خاص از سیستم را پیدا می‌کند و بالتبع انرژی آن بخش به شکلی مضاعف افزایش می‌یابد که این پدیده تحت عنوان **محلی‌شدگی مودی**[10] شناخته می‌شود [۲۹].

۳- روش‌شناسی

در میان روش‌های محاسبه مودهای نرمال غیرخطی، حذف مشتقات زمانی از معادلات حرکت بر پایه فرمول‌بندی انرژی-محور در حوزه تکنیک چندراهی تغییرناپذیر [۳۰]، روش مقیاس‌های چندگانه [۳۱] و جایگذاری سری‌های فوریه محدود در روش هارمونیک بالانس [۳۲] فراگیرترین روش‌های تحلیلی هستند. در نقطه مقابل، به روش‌های عددی در این حوزه کمتر پرداخته شده و ترکیب تکنیک شوتینگ با روش شبه طول کمان در حل مسائل پیوستار [۳۳] را می‌توان برجسته‌ترین ابزار عددی محاسبه مودهای غیرخطی دانست.

در این حوزه، بررسی [۳۴] می‌تواند ابعاد روش‌های محاسباتی را به بهترین شکل منعکس کند. همان‌طور که مشهود است، نقطه آغازین حل مسئله مودهای نرمال غیرخطی فارغ از روش مورداستفاده، معرفی سازه در قالب معادلات حرکتی است که در طول تحلیل یا تغییر نکنند و یا تغییرات مذکور از پیش به آنها قابل اعمال بوده و وابسته به پاسخ لحظه‌ای سیستم نباشد که عموماً در قالب معادلات دیفرانسیل مانا شناخته می‌شوند. به‌عبارت‌دیگر، مقصود از عبارت ***مانا*** ثابت ماندن مؤلفه‌های معادلات حرکت در کل تحلیل و یا پیش‌تعریف مجموعه معادلاتی معین و ثابت برای حالاتی خاص از رفتار سازه است. در نقطه مقابل به علت حجم بسیار بالای محاسبات و محدودیت‌های بارز در حوزه محاسباتی و علی‌الخصوص زمانی متناظر با روش‌های تحلیلی و وابستگی پاسخ‌ها در روش‌های عددی به مقادیر پیشین و ضعف

[9] Invariance
[10] Mode Localization

آنها در جذب تمامی دوشاخگی‌های موجود، در این مقاله با پیشنهاد روش نوین تناوب مستقل به استخراج مودهای نرمال غیرخطی پرداخته شده است.

۳-۱- تحلیل ارتعاش آزاد نامیرای سازه‌های چند درجه آزاد تحت غیرخطی مادی

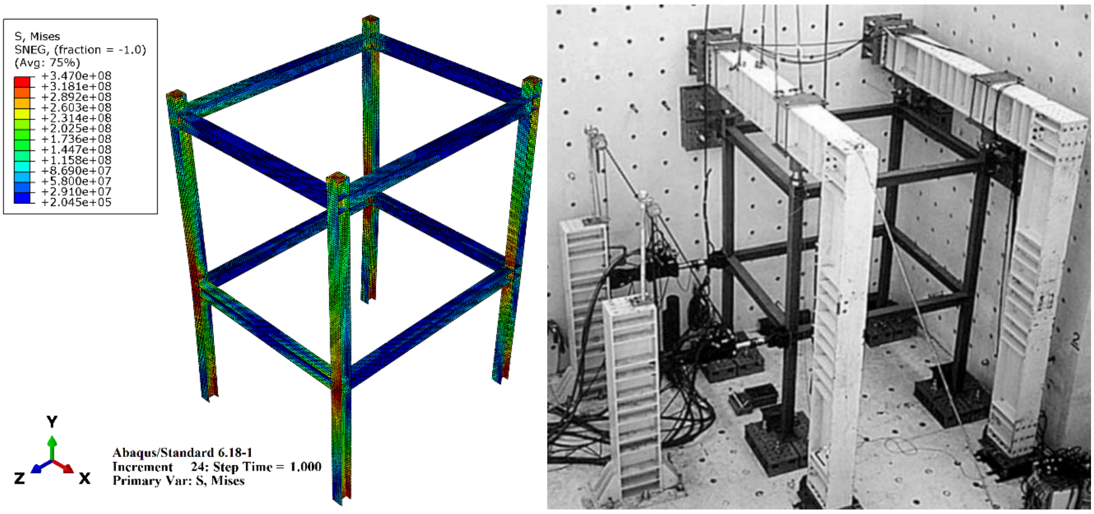
در اصل هدف نهایی یافتن شرایط اولیه‌ای برای درجات آزادی یک سیستم با مصالح غیرخطی تحت ارتعاش آزاد نامیرا است که تعریف پایه مودهای نرمال غیرخطی را ارضاء کنند. در این مسیر گام اول ایجاد ابزاری است که بتواند پاسخ سیستم مذکور را تحت هر مجموعه‌ای از شرایط اولیه به دست آورد. در مطالعات پیشین متناظر با مودهای نرمال غیرخطی، ازآنجائیکه عموماً غیرخطی سیستم‌های تحت بررسی تنها به غیرخطی هندسی محدود بوده و از منظر آن بارگذاری و باربرداری روی یک معادله یکسان عمل می‌کند، این ابزار صرفاً با تشکیل المان‌های مانای مجموعه حرکت و انتگرال‌گیری عددی بر روی آنها قابل حصول است. اما در مسئله حاضر، به‌واسطه تغییر راستای حرکت، معادلات حرکت نیز تغییر خواهند کرد و هر مجموعه معادله‌ای تنها در بخشی از پاسخ خروجی مستخرج از آن معتبر است و پس از آن می‌بایست مجموعه معادلات در هر مرحله متناظر با شرایط، گام‌به‌گام تنظیم شوند. در این راستا، گام اول تعیین المان‌های معادلات دیفرانسیل مانا متناظر با هر درجه آزادی است و پس از آن با ترکیب این المان‌ها، مجموعه معادلات حرکت سیستم حاصل خواهند شد و با اعمال روش‌های انتگرال‌گیری بر مجموعه حاصله، این ابزار پایه به‌دست خواهد آمد.

۳-۱-۱- تشکیل المان‌های معادلات دیفرانسیل مانا

نحوه اعمال شرایط غیرخطی به معادلات حرکت عموماً به‌واسطه تغییر مداوم المان‌های آنها به‌خصوص ماتریس ضرایب حادث می‌شود و این مسئله عملاً امکان دسترسی به معادلات دیفرانسیل ریاضیاتی مانا را محدود می‌کند. در این حوزه، به علت برقرار نبودن رابطه خطی بین درجات آزادی در نواحی غیرخطی، محاسبه مقادیر ویژه این معادلات حرکت در هر لحظه به‌هیچ‌عنوان مودهای نرمال غیرخطی را شامل نخواهد شد. به‌عبارتی‌دیگر، در ناحیه خطی نسبت مقادیر متناظر با بردارهای ویژه (مودهای نرمال خطی) برابر عددی ثابت است و به‌واسطه ورود به ناحیه غیرخطی این نسبت نیز از حالت خطی (یک عدد ثابت) به حالت غیرخطی (یک منحنی در زیرفضای X1-X2) تغییر کرده و محاسبه بردارهای ویژه دیگر از حل مسئله مقادیر ویژه خطی میسر نخواهد بود. ازاین‌رو، نیاز به مجموعه معادلاتی خواهد بود که غیرخطی بودن رفتار سازه در خود المان‌های معادلات ظاهر گردد. در این حیطه، با دورنمای اخذ هر طبقه به‌عنوان یک درجه آزادی، المان-های متناظر با نیروی سختی هر طبقه از تحلیل استاتیکی رفت و برگشتی غیرخطی شامل غیرخطی مادی توسط روش اجزا محدود قابل حصول است. در نقطه مقابل نیروی اینرسی مستقل از هر موردی تنها به جرم و جابجایی مطلق هر طبقه وابسته بوده و جایگاه ثابتش در میان المان‌های معادلات حرکت به شکلی معین تثبیت شده است. نهایتاً از آنجائیکه سیستم تحت ارتعاش آزاد نامیرا قرار دارد، مقادیر نیروی خارجی و نیروی میرایی برابر صفر قرار داده می‌شوند. در ادامه به جهت ترسیم هرچه بهتر مسیر تشکیل این المان‌ها، مقادیر متناظر آنها در یک مطالعه موردی گام‌به‌گام ارائه شده است.

همان‌طور که پیش‌تر نیز بیان شد، اولین گام استخراج رابطه نیرو - تغییرمکان رفت و برگشتی متناسب با هر درجه آزادی است. به این منظور یک سازه فولادی آزمایشگاهی به دهانه ۳ متر در راستای بارگذاری، ۲/۵ متر عمود بر آن، ارتفاع ۱/۷۶ متر در طبقه اول و ۲/۲ متر در طبقه دوم به‌عنوان نمونه مورد بررسی انتخاب شده است که متشکل از تیرها و ستون‌هایی با سطح مقطع ۱۵۰*۱۵۰ میلی‌متر، ضخامت بال ۱۰ میلی‌متر و ضخامت جان ۷ میلی‌متر است. فولاد مورداستفاده در المان‌های سازه‌ای مطابق [۳۵] برای اعتبارسنجی در فصل چهارم منطبق بر استاندارد SS400 کشور کره بوده و دارای مدول الاستیسیته‌ای برابر با ۲۱۸ گیگاپاسکال و ضریب پوآسونی برابر با ۰/۲۶ است که در جدول ۱ جزئیات رابطه تنش - کرنش آن نشان‌داده‌شده است. در این مرحله به جهت ساده‌تر کردن نتایج، از مصالحی با رابطه تنش - کرنش دوخطی دارای تنش جاری‌شدگی ۳۲۰ مگاپاسکال و تنش نهایی ۴۵۵ مگاپاسکال بهره گرفته شده است. در این راستا، پس از ایجاد هندسه مدل اجزا محدودی این سازه در محیط نرم‌افزار Simulia ABAQUS و اختصاص مشخصات مصالح مذکور، تمامی اتصالات

به‌صورت صلب و مش‌بندی نیز از نوع S4R در نظر گرفته شده است. شکل ۱ مدل اجزا محدودی سازه مذکور را در کنار مدل آزمایشگاهی نشان می‌دهد.

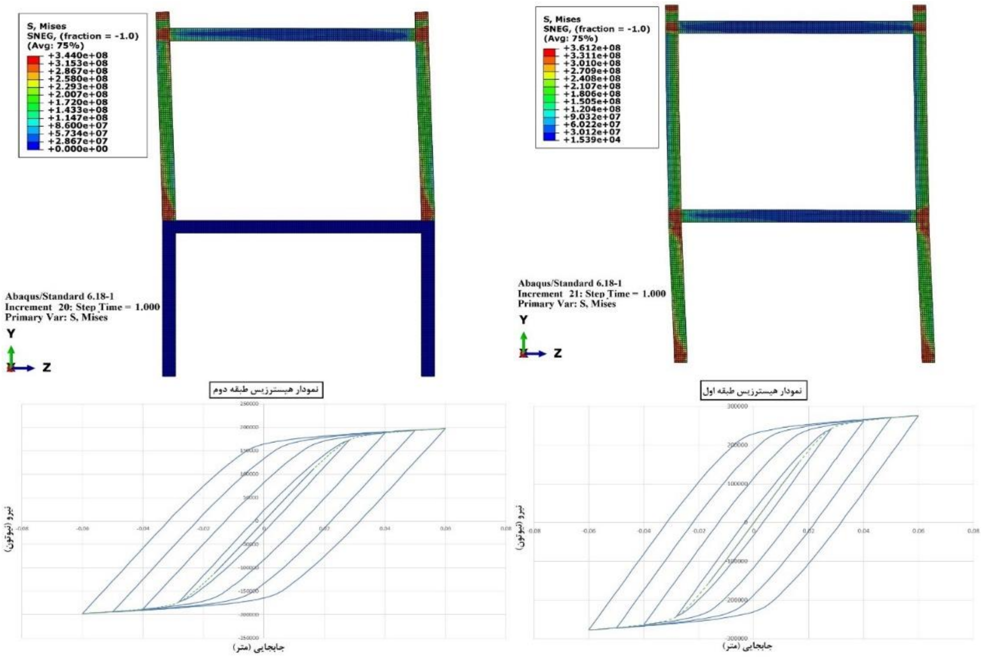


شکل ۱ : مدل آزمایشگاهی و اجزا محدودی سازه تحت بررسی [۳۵]

جدول ۱ : جزئیات رفتار غیرخطی مصالح به‌کاررفته در نمونه مورد بررسی [۳۵]

تنش (مگاپاسکال)	٣٢٠	٣٢٠	٣٦٠	٣٨٨	٤٢٦	٤٣٦	٤٥٣	٤٥٥
کرنش (%)	٠/١٤٧	٢/١٩	٣/٣٧	٤/٧١	٧/٤٥	١١/١٢	١٤/٥٥	١٩/٣٢

پس از مدل‌سازی سازه موردنظر در محیط نرم‌افزار، به جهت استخراج روابط نیرو - تغییرمکان المان باربر زیر هر طبقه، جابجایی طبقات تحتانی درجه آزادی موردنظر کاملاً محدود شده و سناریوهای جابجایی به تراز درجه آزادی موردنظر اعمال شده است. شایان‌ذکر است که مطابق جزئیات ارائه شده در [۳۵]، روی هر ستون در تراز هر طبقه باری معادل $1\ tonf$ در راستای محور آن ستون به‌منظور در-نظر گرفتن بارهای معادل ثقلی اعمال شده است. در اصل هدف این مرحله ایجاد محیطی است که بتوان از روی آن روابطی را بدست آورد که امکان تخمین مقادیر نیروی سختی متناظر با هر جابجایی هر یک از درجات آزادی را فراهم آورد. ازاین‌رو به جای اعمال یک سناریوی افزاینده به هر یک از طبقات، جداگانه جابجایی‌های ۶۰، ۵۰، ۴۰، ۲۸ و ۱۷/۴ میلی‌متر به هر طبقه اعمال شده و به صورت رفت و برگشتی به منفی مقادیر مذکور، به این مقادیر بازگردانده شده است که در شکل ۲ نتایج آن قابل مشاهده است.

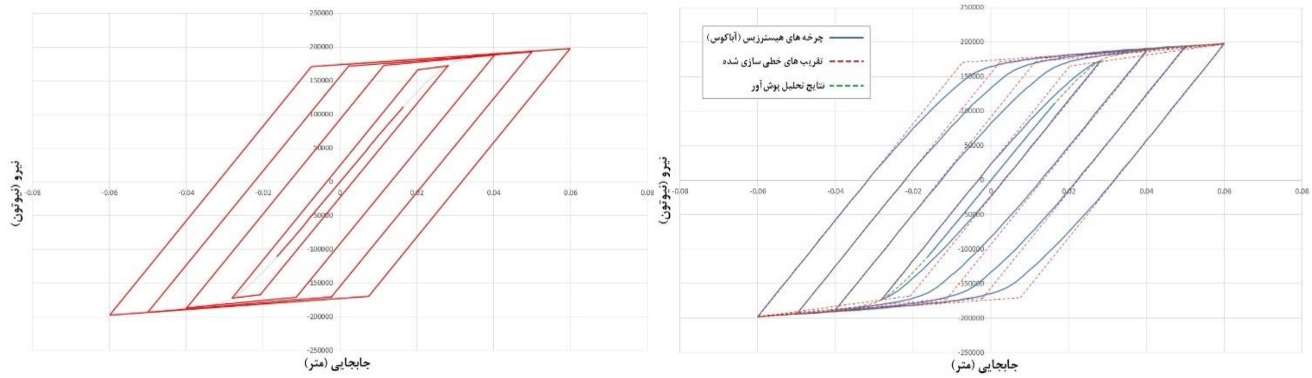


شکل ۲: استخراج روابط نیرو – تغییرمکان متناظر با المان‌های باربر طبقه اول (تصویر راست) و طبقه دوم (تصویر چپ)

حال هدف یافتن مجموعه معادلاتی است که بتواند رابطه نیرو - تغییرمکان باربرداری (و یا بارگذاری) هر نقطه از صفحه پیوستار نمودار هیسترزیس را تخمین بزند. شایان‌ذکر است که جهت انتقال بهتر مفهوم، هر ارتعاشی که جابجایی ثانویه آن از جابجایی قبلی بزرگ‌تر باشد، طبق قرارداد تحت عنوان بارگذاری و هر ارتعاشی که جابجایی ثانویه آن از جابجایی قبلی کوچک‌تر باشد تحت عنوان باربرداری شناخته می‌شود و رفتار سیستم تحت بارگذاری و باربرداری عملاً با ضرب هر دوی جابجایی و نیروهای متناظر در منفی به هم قابل تبدیل خواهند بود، چرا که مثبت و یا منفی بودن صرفاً قرارداد است و در یک سیستم نامیرا که هندسه سازه دچار پدیده‌های برگشت‌ناپذیر مانند کمانش نشود، اگر از یک جابجایی معین تا منفی آن جابجایی حرکت کرده و مجدداً به همان جابجایی برگردد، به نقطه آغازین خواهد رسید. اولین ایده مورد بررسی در این راستا برازش یک چندجمله‌ای به نمودار پوش‌آور بارگذاری و برازش یک چندجمله‌ای دیگر به بیرونی‌ترین لایه بارگذاری نمودار هیسترزیس بوده که با میانگین‌گیری بین این دو چندجمله‌ای با وزنی که از نقطه هدف عبور کند تابع مقصود ما را ارائه دهد. اما از آنجائیکه روابط به‌دست‌آمده تنها در بالای خط واصل نقطه آغازین چندجمله‌ای اول (جابجایی صفر) به نقطه آغازین چندجمله‌ای دوم (جابجایی ۶۰- میلی‌متر در شکل ۲) معتبر هستند و عموماً نقاط شروع بارگذاری مجدد ما که باید تابع مقصود از آنها بگذرد در زیر این خط هستند، این مسیر به پاسخ‌هایی نادرست منتج خواهد شد. ایده دوم نیز برایناساس شکل گرفت که اگر چرخه‌های هیسترزیس تا مقداری ادامه یابند که دچار کاهش مقاومت و کاهش سختی نشده و کل چرخه دچار پدیده باریک‌شدگی[1] نشود، شروع باربرداری (و یا بارگذاری) از هر نقطه با شیب مشخصی صورت گرفته و پس از طی جابجایی مشخصی تحت تابعی به سمت منحنی پوش‌آور میل می‌کند. تفسیر نموداری این ایده به این شکل است که اگر به‌عنوان‌مثال در شکل ۲ بیرونی‌ترین منحنی بارگذاری را اتخاذ نموده و آن را از نقطه ۶۰- میلی‌متر به هر نقطهٔ آغاز بارگذاری‌ای انتقال داده شود، نمودار حاصله برای بازه منفی تا مثبت نقطه شروع کاملاً منطبق بر نمودار هیسترزیس خواهد بود. اما بر خلاف ارتعاش آزاد نامیرای یک سیستم یک‌درجه‌آزاد که پاسخ‌های سازه هیچگاه از جابجایی اولیه تجاوز نمی‌کنند، در سیستم‌های چنددرجه‌آزاد به‌واسطه اثرات درجات آزادی بر هم، عموماً پاسخ سازه از این مقدار تجاوز کرده و این مسئله سبب آن می‌شود که چرخه‌های به‌دست‌آمده در نمودار هیسترزیس برای همان مقادیر کافی نبوده و ایده دوم تنها قابلیت پوشش منفی تا مثبت نقطه شروع بارگذاری مجدد را دارا بوده و تخمین آن خارج از این بازه کاملاً به مقادیری نادرست منتج خواهد شد.

[1] Pinching

در نهایت از آنجائیکه آغاز بارگذاری مجدد همواره با یک شیب اولیه شروع شده و در نهایت به نقطه بیشینه منحنی پوش‌آور میل می‌کند، با فرض اینکه نمودار هیسترزیس دچار کاهش مقاومت و کاهش سختی نشده و کل چرخه دچار پدیده باریک‌شدگی نشود، معادله نیرو - تغییرمکان بارگذاری مجدد شروع شونده از هر نقطه شامل خطی با شیب اولیه در نظر گرفته شده و پس از برخورد با خطی که متناظر نقطه بیشینه را به قرینه نقطه آغاز بارگذاری متصل می‌کند، ادامه مسیر را روی آن تا ۶۰+ میلی‌متر ادامه خواهد داد. در خصوص باربرداری‌ها نیز شیب خطوط اولیه و ثانویه همان مقادیر بوده و تنها تفاوت عبور خط ثانویه از نقطه متناظر با ۶۰- میلی‌متر است. شکل ۳ جزئیات تخمین صورت‌گرفته شده را نمایش می‌دهد. شیب ثانویه متناظر با چرخه بیرونی نیز مماس بر نمودار هیسترزیس در آن نقطه (نقطه ۶۰+ برای بارگذاری و یا ۶۰- برای باربرداری) در نظر گرفته شده است.



شکل ۳: مجموعه خطوط در نظر گرفته شده برای تخمین ریاضیاتی نمودار هیسترزیس

باتکیه‌بر خطوط مفروض در بخش قبل، فرمول‌بندی المان‌های تشکیل‌دهنده معادلات حرکت عبارت‌اند از:

$$\left\{\begin{matrix} f_{I1} = m_1 * \ddot{X}_1 \\ f_{I2} = m_2 * \ddot{X}_2 \\ f_{S1} = A_1 * x_1 + B_1 \\ f_{S2} = A_2 * x_2 + B_2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} A_1 = K_{lin1}\,,\ B_1 = f_{SP1} - K_{lin1} * x_{SP1} & if\ L1 = 1\ \&\ x_1 \le x_{intL1} \\ A_1 = (f_{Smax1} + f_{SP1})/(x_{max1} + x_{SP1})\,,\ B_1 = f_{Smax1} - A_1 * x_{max1} & if\ L1 = 1\ \&\ x_1 > x_{intL1} \\ A_1 = K_{lin1}\,,\ B_1 = f_{SP1} - K_{lin1} * x_{SP1} & if\ L1 = 0\ \&\ x_1 \ge x_{intU1} \\ A_1 = (f_{Smax1} - f_{SP1})/(x_{max1} - x_{SP1}),\ B_1 = -f_{Smax1} + A_1 * x_{max1} & if\ L1 = 0\ \&\ x_1 < x_{intU1} \end{matrix}\right\}$$

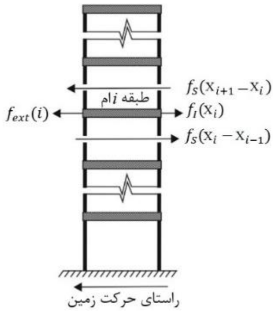
$$\rightarrow \left\{\begin{matrix} A_2 = K_{lin2}\,,\ B_2 = f_{SP2} - K_{lin2} * x_{SP2} & if\ L2 = 1\ \&\ x_2 \le x_{intL2} \\ A_2 = (f_{Smax2} + f_{SP2})/(x_{max2} + x_{SP2})\,,\ B_1 = f_{Smax2} - A_2 * x_{max2} & if\ L2 = 1\ \&\ x_2 > x_{intL2} \\ A_2 = K_{lin2}\,,\ B_2 = f_{SP2} - K_{lin2} * x_{SP2} & if\ L2 = 0\ \&\ x_2 \ge x_{intU2} \\ A_2 = (f_{Smax2} - f_{SP2})/(x_{max2} - x_{SP}),\ B_2 = -f_{Smax2} + A_2 * x_{max2} & if\ L2 = 0\ \&\ x_2 < x_{intU2} \end{matrix}\right\} \qquad (۱)$$

$$\left\{\begin{matrix} x_{intL1} = \dfrac{f_{Smax1} - ((f_{Smax1} + f_{SP1}) * x_{max1}/(x_{max1} + x_{SP1})) - f_{SP1} + (K_{lin1} * x_{SP1})}{K_{lin1} - ((f_{Smax1} + f_{SP1})/(x_{max1} + x_{SP1}))} \\ x_{intU1} = \dfrac{-f_{Smax1} + ((f_{Smax1} - f_{SP1}) * x_{max1}/(x_{max1} - x_{SP1})) - f_{SP1} + (K_{lin1} * x_{SP1})}{K_{lin1} - ((f_{Smax1} - f_{SP1})/(x_{max1} - x_{SP1}))} \\ x_{intL2} = \dfrac{f_{Smax2} - ((f_{Smax2} + f_{SP2}) * x_{max2}/(x_{max2} + x_{SP2})) - f_{SP2} + (K_{lin2} * x_{SP2})}{K_{lin2} - ((f_{Smax2} + f_{SP2})/(x_{max2} + x_{SP2}))} \\ x_{intU2} = \dfrac{-f_{Smax2} + ((f_{Smax2} - f_{SP2}) * x_{max2}/(x_{max2} - x_{SP2})) - f_{SP2} + (K_{lin2} * x_{SP2})}{K_{lin2} - ((f_{Smax2} - f_{SP2})/(x_{max2} - x_{SP2}))} \end{matrix}\right\} \qquad (۲)$$

که در آن پایین‌نویس شماره ۱ متناظر با درجه آزادی اول، پایین‌نویس شماره ۲ متناظر با درجه آزادی دوم، m بیانگر جرم، f_I بیانگر نیروی اینرسی، f_S بیانگر نیروی سختی، X بیانگر جابجایی مطلق، x بیانگر جابجایی نسبی، K_{lin} بیانگر شیب اولیه متناظر با بخش خطی، x_{SP} بیانگر جابجایی متناظر با نقطه آغازین شروع حرکت پس از تغییر نوع اعمال بار، f_{SP} بیانگر نیروی متناظر با نقطه آغازین شروع حرکت پس از تغییر نوع اعمال بار، f_{Smax} بیانگر بیشینه نیروی سختی در نظر گرفته شده در نمودار هیسترزیس و دارای مقداری مثبت، x_{max} بیانگر بیشینه جابجایی در نظر گرفته شده در نمودار هیسترزیس و دارای مقداری مثبت، x_{intL} بیانگر جابجایی متناظر با محل تقاطع خط اولیه با خط ثانویه در حالت بارگذاری، x_{intU} بیانگر جابجایی متناظر با محل تقاطع خط اولیه با خط ثانویه در حالت باربرداری و L بیانگر شرایط اعمال بار است که در حالت بارگذاری برابر یک و در حالت باربرداری برابر صفر در نظر گرفته می‌شود.

۳-۱-۲- تشکیل مجموعه معادلات سیستم

اولین گام در راستای استخراج مجموعه معادلات دیفرانسیل سازه‌ها گسسته‌سازی آنها است. بدین منظور با به‌کارگیری روش اجزا محدود و مش‌بندی کل سازه، سیستمی با n درجه آزادی پدیدار می‌شود. خوشبختانه در ارتباط با سازه‌های عمرانی، درنظرگرفتن هر طبقه به‌عنوان یک درجه آزادی در صفحه بارگذاری جانبی، فرضی تسهیل‌کننده و با خطایی قابل‌قبول بوده و این اقدام کاهش تعداد بسیار بالای گره‌ها به تعداد طبقات سازه در تعریف تعداد درجات آزادی سیستم کاهش مرتبه یافته را در پی خواهد داشت. ازاین‌رو، پس از بهره‌گیری از تحلیل استاتیکی غیرخطی رفت و برگشتی روش اجزا محدود در تشکیل المان‌های معادلات حرکت متناظر با هر طبقه، حال می‌توان به یکپارچه‌سازی اجزای تشکیل‌دهنده مجموعه معادلات حرکت مانای سیستم پرداخت. با فرض نامیرایی سیستم، نمودار جسم آزاد سیستم شامل بار خارجی (f_{ext})، نیروی سختی (f_s) و نیروی اینرسی (f_I) بوده و جزئیات نحوه ترکیب آنها در هر سطر مجموعه معادلات حرکت در شکل ۴ آمده است. توجه به مطلق بودن جابجایی‌های بکار رفته در عبارات متناظر با نیروی اینرسی و نیز نسبی بودن جابجایی‌های بکار رفته در روابط نیروی سختی حاصله از بخش پیش بسیار حائز اهمیت بوده و از آنجائیکه روش‌های انتگرال‌گیری مورداستفاده در محیط MATLAB مشتقات را در سمت چپ معادله به شکل منفرد قرار می‌دهند، کلیه معادلات حرکت می‌بایست بر اساس جابجایی‌های مطلق ایجاد شده و در مواردی که مقصود جابجایی نسبی است، اختلاف جابجایی مطلق طبقه مذکور از طبقه زیرین‌اش آن را بدست خواهد داد.



شکل ۱: نمودار جسم آزاد سازه مورد بررسی

شایان‌ذکر است که با اتخاذ i به‌عنوان شماره طبقه، نیروی سختی متناظر با $i = 3$ برابر صفر خواهد بود و X_i بیانگر جابجایی مطلق متناظر طبقه i ام است. مضافا مقادیر نیروی اینرسی در هر سطر مطابق قانون نیوتون از ضرب جرم آن طبقه در مشتق دوم زمانی جابجایی مطلق آن طبقه محاسبه شده و مستقل از سایر طبقات است. با در نظر گرفتن جرمی برابر با چهار تن در هر یک از طبقات، مجموعه معادلات دیفرانسیل حرکت مانای سازه مورد بررسی تحت ارتعاش آزاد در معادله (۳) آورده شده است که در آن V بیانگر سرعت، نقطه بیانگر مشتق نسبت به زمان و سایر عبارات متناسب با موارد مذکور در بخش‌های پیشین است. علت به‌کارگیری تغییر-متغیر و تبدیل معادلات دیفرانسیل به معادلات مرتبه اول امکان استفاده از روش رانگ-کوتا اصلاح شده است که در توابع *MATLAB* با عنوان *ODE45* شناخته می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} f_{ext}(1) = f_I(X_1) + f_{S1}(X_1 - 0) - f_{S2}(X_2 - X_1) \\ f_{ext}(2) = f_I(X_2) + f_{S2}(X_2 - X_1) + 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \dot{X}_1 = V_1 \\ \dot{V}_1 = \left(-\frac{1}{4000}\right) * ((A_1 * x_1 + B_1) - (A_2 * (x_2 - x_1) + B_2)) \\ \dot{X}_2 = V_2 \\ \dot{V}_2 = \left(-\frac{1}{4000}\right) * (A_2 * (x_2 - x_1) + B_2) \end{Bmatrix} \quad (۳)$$

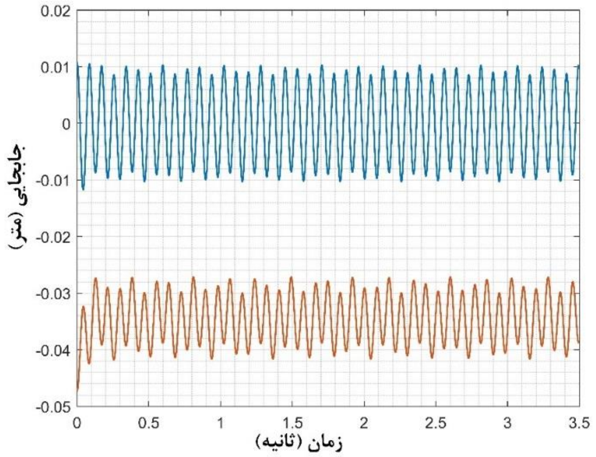
۳-۱-۳- محاسبه پاسخ سیستم تحت ارتعاش آزاد نامیرا

پس از دستیابی به مجموعه معادلات حرکت مانای سیستم، با جایگذاری معادله (۳) به‌عنوان تابع هدف انتگرال‌گیری عددی و تعریف A_1، B_1، A_2 و B_2 به‌عنوان ورودی‌های آن متناظر با معادلات (۱)، شرایط برای به‌کارگیری $ODE45$ که از توابع پیش‌فرض متلب جهت انتگرال‌گیری عددی بر پایه روش رانگ-کوتا اصلاح شده است، محیا می‌شود. از آنجائیکه در یک پاسخ متناوب مفروض معین، نقطه

شروع از هر جای این پاسخ تعریف شود، تفاوتی نکرده و عملاً اعمال یک سرعت اولیه و یک جابجایی اولیه به پاسخی یکسان با تعریف مقدار قله به‌عنوان جابجایی اولیه به همراه سرعت اولیه صفر منجر خواهد شد، همان‌طور که در مطالعات پیشین نیز رایج است به‌منظور جلوگیری از پاسخ‌های تکراری مقدار متناظر با سرعت اولیه در ابتدای مسیر همواره برابر صفر در نظر گرفته شده است.

سپس در گام اول اگر هر یک از جابجایی‌های اولیه مقداری مثبت داشته باشند، مقدار متناظر L برابر صفر و اگر منفی باشند برابر یک بوده و خط دارای سختی اولیه معادله صادق در تخمین نیروی سختی آنها خواهد بود. با جایگذاری مقادیر متناظر با این منطق از مجموعه معادلات (۱) پروسه حل آغاز گشته و پاسخ را مثلا در بازه یک ثانیه شامل چندین قله و دره محاسبه می‌کند. گام بعدی بدست آوردن چهار مقدار است که دو مورد از آنها متناظر با اولین تغییر جهت پاسخ (اولین اکسترممی که قبل و بعدش از آن بزرگتر و یا کوچکتر باشند) در هر یک از درجات آزادی است که عملاً سبب تغییر از باربرداری به بارگذاری و یا بالعکس است و دو مورد محاسبه محل تقاطع خط دارای سختی اولیه با خط دارای شیب ثانویه است که از معادلات (۲) قابل دسترسی خواهد بود. حال از میان این چهار مقدار آن موردی که زودتر رخ داده (دارای زمان متناظر کوچکتری است) مدنظر قرار گرفته و کلیه پاسخ‌ها تنها تا آن زمان معتبرند و پس از آن می بایست معادلات اصلاح شده و ادامه پاسخ بر اساس معادلات جدید بدست آید. از این رو با در نظر گرفتن مقادیر متناظر با جابجایی ها و سرعت‌ها در آن زمان به‌عنوان شرایط اولیه هر یک از درجات آزادی و تغییر معادله آن درجه آزادی‌ای که مشمول مورد زودتر واقع‌شونده شده و نیز عدم تغییر شرایط معادله درجه آزادی دیگر، مجددا پروسه انتگرال‌گیری عددی ادامه یافته و دوباره این اقدامات می‌بایست بر پاسخ جدید اعمال شده و این روند ادامه پیدا کند تا یک شرط پایان دهنده آن را متوقف نماید. شایان‌ذکر است که اگر مقدار کوچکتر متناظر با یک اکسترمم باشد، می‌بایست مقدار L تغییر کرده و معادله جدید منطبق بر خطی با شیب اولیه و گذرنده از همان نقطه در زیرفضای نیروی سختی-تغییرمکان در نظر گرفته شود و اگر مقدار کوچکتر محل تقاطع دو خط باشند، بدون تغییر L خط با شیب ثانویه که بالتبع از نقطه محل تقاطع آغاز می‌شود و پاسخ‌های پیشین تنها تا همان نقطه در نظر گرفته شده‌اند، به‌عنوان معادله جدید معرفی گردد. در نظرگرفتن سرعت‌ها و جابجایی ها به‌عنوان مقادیر اولیه ادامه محاسبات سبب آن خواهد شد که در هیچ نقطه‌ای از پاسخ نهایی عدم پیوستگی و یا تغییر شیب و شکست نمودار مشاهده نشود.

از آنجائیکه الگوریتم نوین تناوب عملاً بر پایه قله‌ها متناوب بودن پاسخ را می‌سنجد، پیشنهاد می‌شود محدودکننده میزان پیشروی پاسخ بر پایه زمان نبوده و بر پایه تعداد قله‌ها قرار داده شود. در این حوزه هر تغییر L به معنی تشکیل یک اکسترمم بوده و چون ممکن است این اکسترمم یک اکسترمم محلی و یا حتی یک کمینه مطلق باشد، با فرض نهایتاً ۱۰ اکسترمم در بازه نیمه دوره تناوب، مقدار متناظر با محدودکننده تعداد اکسترمم‌ها در هر درجه آزادی برابر ۶۰ در نظر گرفته شده است تا اطمینان حاصل شود که قطعاً حداقل سه بیشینه مطلق در پاسخ‌ها گنجانده شده است. این عدد بر پایه بررسی حدودی چند پاسخ و با درنظرگرفتن ضریب اطمینانی بالا در نظر گرفته شده است. البته هر چه این عدد بزرگ‌تر در نظر گرفته شود، زمان تحلیل نیز به‌تناسب افزایش خواهد یافت. به‌منظور شناخت بیشتر پاسخ ارتعاش آزاد سیستم‌های غیرخطی نامیرا، شکل ۵ پاسخ متناسب با تحریک اولیه (۰/۰۱۰۷۵) متر برای طبقه اول و (۰/۰۴۷۲۵-) متر برای طبقه دوم و اختصاص مقدار صفر برای هر دو سرعت اولیه را نشان می‌دهد. نکته اول در خصوص نتایج مستخرج از تحلیل ارتعاش آزاد نامیرای سازه‌های دارای مصالح غیرخطی این است که مدتی زمان می‌برد تا پاسخ به ارتعاشات ماندگار خود برسد که بر اساس مشاهدات در نتایج این مدت در سازه تحت بررسی قطعاً زیر نیم ثانیه است و ازاین‌رو در کلیه محاسبات نیم ثانیه اول پاسخ حذف شده و سپس برای بررسی عبور از فیلتر مودهای نرمال غیرخطی ارسال شده است. نکته جالب دوم عدم نوسان پاسخ حول نقطه صفر بوده و به نظر می‌رسد هر طبقه به شکلی تخمینی حول نقطه‌ای نوسان می‌کند که در آن نیروی سختی متناظر با آن طبقه برابر صفر است و اثرات کرنش پسماندی که قبل از شروع نوسان به‌واسطه اعمال جابجایی اولیه به سیستم تحمیل شده، بدین شکل بروز می‌کند.



شکل ۵: پاسخ ارتعاش آزاد سازه مذکور متناظر با ۰/۰۱۰۷۵ =$X_1(0)$ و ۰/۰۴۷۲۵- =$X_2(0)$

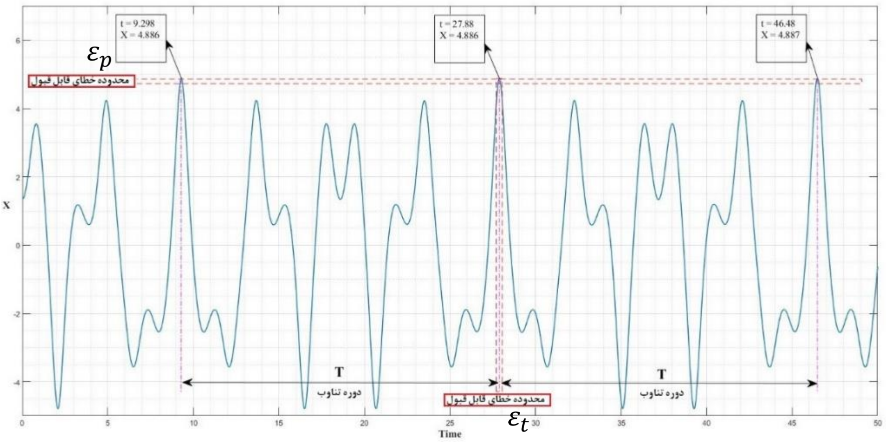
گام نهایی شامل محاسبات انرژی سیستم غیرخطی تحت بررسی است. از آنجائیکه تعریف پایه مودهای نرمال غیرخطی متناظر با سیستم‌های نامیرا بوده و نیروی میرایی از مجموعه معادلات حرکت حذف شده و نیز به علت خطی بودن معادلات حرکت در هر گام از محاسبه پاسخ، پاسخ نهایی هر گام به شکلی کاملاً نامیرا به‌دست‌آمده و انرژی سیستم در کل آن گام ثابت است و بالتبع این انرژی ثابت به‌عنوان انرژی اولیه جاری در گام نامیرای بعد به‌واسطه جابجایی‌ها و سرعت‌های اولیه مذکور معرفی می‌گردد. به‌عبارت‌دیگر در هر گام عملاً رفت‌وبرگشت بر روی یک خط معین (یک تابع یکنواخت) محاسبه شده و با اینکه تنها بخش رفت (و یا برگشت) برای پاسخ نهایی معتبر شناخته می‌شود و پس از آن به خط دیگری رجوع می‌شود، ولی انرژی مضاعفی از مجموعه معادلات حرکت نخواهد کاست و این مسئله گام‌به‌گام رعایت می‌شود که بالتبع در راستای نامیرا بودن پاسخ خواهد بود. در این حوزه، در یک سیستم نگهدارنده همواره برآیند انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی در کل پاسخ یکسان است و با محاسبه انرژی سیستم در لحظه صفر، مقدار انرژی کل سیستم در حین ارتعاش به دست خواهد آمد که جزئیات محاسبه آن در بخش ۳-۳ ارائه شده است. در خصوص سیستم‌های میرا برای مطالعات آتی پیشنهاد می‌شود که در هر گام سطح زیر نمودار نیرو - جابجایی از نقطه شروع آن گام تا نقطه پایانش به‌عنوان انرژی تلف شده با اعمال علامت متناظر با باربرداری و یا بارگذاری محاسبه شده و در عبارت متناظر با نیروی میرایی مجموعه معادلات حرکت به شکلی تعدیل‌یافته گنجانده شود که البته جهت دستیابی به مودهای نرمال غیرخطی، دیگر تعریف پایه موجود مکفی نبوده و نیازمند تعریف جدیدی خواهد بود که افت پاسخ در هر دوره تناوب در فیلتر تأیید مود نرمال غیرخطی در نظر گرفته شود.

۳-۲- الگوریتم نوین تناوب

هرکجا که سخن از بررسی پریودیک بودن توابع به میان می‌آید، تکنیک شوتینگ در اولویت قرار می‌گیرد. در حقیقت در این رویکرد با در نظر گرفتن T به‌عنوان دوره تناوب سیستم، اختلاف پاسخ سیستم در هر درجه آزادی بین زمان صفر و زمان T برابر مقدار تابع شوتینگ (باقی‌مانده تابع هدف) در نظر گرفته شده و شرط پریودیک بودن هر پاسخی کوچک‌تر بودن مقدار متناظر تابع شوتینگ آن پاسخ از محدوده خطای قابل قبول (ε) است. در نظر گرفته شدن دوره تناوب به‌عنوان یک متغیر مستقل از یک طرف و پیچیدگی‌های شرایطی که در آنها دوره تناوب هر درجه آزادی متفاوت بوده ولی تک‌تک درجات آزادی جداگانه پریودیک هستند، به‌کارگیری این تکنیک را در حیطه محاسبات مودهای نرمال غیرخطی با مشکلاتی جدی مواجه می‌سازد.

ازاین‌رو در این مقاله، الگوریتمی نوین بر پایه اکسترمم‌ها ارائه شده است که نه‌تنها قادر به بررسی تناوب پاسخ موردنظر است، بلکه برخلاف تکنیک شوتینگ که نیاز به مقدار دوره تناوب به‌عنوان ورودی داشته و تنها بررسی‌کننده تناوب است، قادر به استخراج مقدار متناظر دوره تناوب پاسخ می‌باشد. مضافاً هر درجه آزادی می‌تواند عملکرد مستقل خود را داشته باشد و محدودیتی تحت عنوان برابری دوره تناوب درجات آزادی مختلف در این الگوریتم وجود ندارد؛ به‌خصوص در مواردی که عبارت "ارتعاش متحد و نه لزوماً هم‌آهنگ" به شکلی کامل متبلور می‌شود. به‌منظور ترسیم بهتر این الگوریتم شکل ۶ پاسخ شماتیک یکی از درجات آزادی را ترسیم می‌کند که در آن محدوده

خطای قابل‌پذیرش (ε) با خط‌چین‌ها و بازه‌های محتمل دوره تناوب با T مشخص شده اند. شایان‌ذکر است که محدودیت عدم محاسبه دوره تناوب در تکنیک شوتینگ عملاً امکان جستجوی دامنه را برای این تکنیک با مشقات زیادی همراه می‌سازد؛ چراکه این متغیر ریشه در تمام درجات آزادی داشته و تنها به اضافه شدن یک متغیر محدود نخواهد شد.



شکل ۶: پاسخ شماتیک یکی از درجات آزادی در حوزه غیرخطی

نهایتاً روند الگوریتم در بررسی تناوب پاسخ سیستم و محاسبه دوره تناوب احتمالی عبارت است از:

۱) استخراج قله‌های محلی: کلیه نقاطی که از هر دو نقطه مجاورشان بزرگ‌تر هستند.

۲) محاسبه خطای قابل‌قبول قله: ضرب ماکزیمم مطلق کل پاسخ در ε_p

۳) تعیین قله‌های مطلق: انتخاب مواردی از مرحله (۱) که اختلافشان با قله ماکزیمم مطلق پاسخ کمتر از مقدار متناظر (۲) است.

۴) محاسبه دوره تناوب‌های احتمالی: اگر تعداد جمعیت مرحله (۳) بیش از سه عدد بود: محاسبه اختلاف زمان متناظر با قله دوم و اول تحت عنوان دوره تناوب احتمالی اول و اختلاف زمان متناظر با قله سوم و دوم تحت عنوان دوره تناوب احتمالی دوم، در غیر این صورت خروج از روند.

۵) کنترل تناوب: اگر اختلاف دوره تناوب احتمالی اول و دوم از خطای قابل‌قبول زمانی (ε_t) کمتر بود: دوره تناوب هر درجه آزادی برابر میانگین دوره تناوب احتمالی اول و دوم، در غیراین‌صورت خروج از روند.

۶) تکرار مرحله (۱) تا (۵) برای تمام درجات آزادی.

۷) اگر تمام درجات آزادی از فیلتر تناوب عبور کنند، صرف‌نظر از برابری دوره‌های تناوب، پاسخ عموماً پریودیک بوده و در مسائل ارتعاش آزاد آن شرایط اولیه‌ای که سبب آن پاسخ گشته مشمول مودهای نرمال غیرخطی است.

۳-۳- روش تناوب مستقل

پس از آماده‌سازی الگوریتم تناوب مذکور به‌عنوان ابزار اصلی استخراج مودهای نرمال غیرخطی، گام بعدی استخراج سلسله‌مراتب محاسبه مودهای نرمال غیرخطی هدف است. عموماً روش‌های محاسباتی مختلف فعال در این زمینه با شروع از مودهای نرمال خطی و بسط پاسخ‌ها به سمت نواحی و انرژی‌های غیرخطی به یافتن مودهای نرمال غیرخطی می‌پردازند. این رویکرد در کنار مزایایی که دارد، از آنجائیکه اثبات شده تعداد مودهای غیرخطی می‌تواند به بیش از تعداد درجات آزادی تجاوز کند [۲۹]، همواره یک سؤال را بی‌پاسخ گذاشته و آن پوشش داده شدن تمامی پاسخ‌های محتمل است. اولین گام در راستای مواجهه با این مشکل تبری جستن از وابستگی به شرایط اولیه مسئله است که در اینجا به‌واسطه آغاز از مودهای خطی و وابستگی پاسخ‌های جدید به پاسخ پیشین نمود پیدا می‌کند. ازاین‌رو تنها راهکار امکان‌پذیر بررسی کلیه پاسخ‌های محتمل با پذیرش خطای قابل‌قبول خواهد بود. بدین منظور، ابتدا می‌بایست دامنه پیوستار مسئله

مشخص شده و سپس به‌واسطه گسسته‌سازی و با تعیین ***رزولوشن*** قابل‌قبول، حدود خطای قابل‌پذیرش اعمال شود. هر چه رزولوشن منتخب بزرگ‌تر باشد، دقت پاسخ‌ها بهتر، تمایل آنها به پیوستگی نسبی و هم‌پوشانی بالاتر و بالتبع هزینه‌های محاسبات نیز بیشتر خواهد بود. در نقطه مقابل رزولوشن کمتر ازدست‌دادن پاسخ‌ها را محتمل‌تر می‌کند. در حقیقت برقراری تعادل میان حصول دقت مکفی در حل مسئله ازیک‌طرف و کاهش هزینه‌های محاسباتی از سمت دیگر عوامل تعیین‌کننده در تخمین رزولوشن بهینه هستند.

در مسئله حاضر که شامل یافتن شرایط اولیه‌ای است که سبب ارتعاش متحد درجات آزادی یک سیستم ارتعاش آزاد می‌شود، کاندیداهای احتمالی پاسخ شامل یک زوج تغییرمکان اولیه و سرعت اولیه برای هر درجه آزادی هستند که به‌عنوان ورودی به مسیر گام‌به‌گام تحلیل سیستم دارای مصالح غیرخطی تحت ارتعاش آزاد نامیرا است. مرحله بعدی انتساب متغیرهای ورودی موردنیاز توابع انتگرال‌گیری عددی است که اولین آنها دامنه زمانی[1] هدف می‌باشد و به معنی انتخاب بازه‌ای زمانی برای محاسبه پاسخ‌ها در هر گام است. تلورانس خطای نسبی $RelTol$ مقدار اسکالر مثبتی است که خطای نسبی متناظر با بزرگی هر مولفه پاسخ را اندازه‌گیری می‌کند و در کنار آن تلورانس خطای مطلق $AbsTol$ مقادیر قابل صرف نظر پاسخ را می‌سنجد. نهایتاً خطای متناظر با تکرار i ام انتگرال‌گیر هنگامی قابل قبول است که هم از تلورانس خطای مطلق و هم از ضرب تلورانس خطای نسبی در مقدار مطلق پاسخ i ام کوچکتر باشد. پس از فراخوانی مسیر گام به گام ارائه شده در بخش ۳-۱ و اعمال این مقادیر و شرایط اولیه به سیستم دارای مصالح غیرخطی تحت ارتعاش آزاد نامیرا، پاسخ هر درجه آزادی قابل حصول بوده و زمینه لازم برای بررسی شدنش توسط الگوریتم تناوب آماده شده و به‌عنوان ورودی برای آن تعریف می‌شود. در خصوص کاندیداهای که می‌توانند از فیلتر الگوریتم تناوب عبور کنند؛ انرژی کل سیستم بر اثر تحریک به‌واسطه شرایط متناسب با آن پاسخ می‌بایست محاسبه شود. در این زمینه، همان‌طور که پیش‌تر نیز بیان شد، انرژی کل از جمع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل حاصل می‌شود. به علت یکسان بودن مولفه نیروی اینرسی در تمامی معادلات حرکت و نیز این حقیقت که انرژی جنبشی به‌واسطه انتگرال‌گیری از آن قابل دسترسی خواهد بود، مقدار انرژی جنبشی متناظر با هر درجه آزادی از رابطه ای ثابت قابل محاسبه خواهد بود. انرژی پتانسیل نیز از انتگرال‌گیری نیروی سختی متناظر با هر طبقه قابل دسترسی است و وابسته به اینکه در کجای معادله پوش‌آور قرار دارد، به سادگی با محاسبه سطح زیر نمودار در هر درجه آزادی قابل دسترسی خواهد بود. رابطه (۴) جزئیات محاسبه انرژی کل سیستم در هر نقطه پاسخ را نشان می‌دهد.

$$\text{انرژی کل} = \sum \text{انرژی جنبشی} + \sum \text{انرژی پتانسیل} = \sum_{i=1}^{n}(0.5 * m_i * \dot{x}_i^2) + \sum_{i=1}^{n}(\int f_{S,i}\, dx_i) \qquad (۴)$$

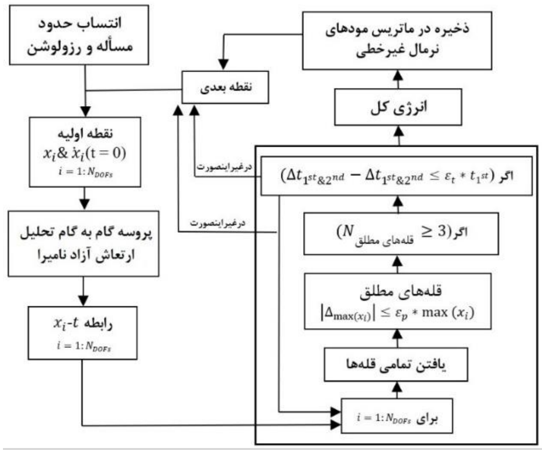
که در آن i بیانگر شماره طبقه، n بیانگر تعداد درجات آزادی، m_i بیانگر جرم طبقه i ام، $f_{S,i}$ بیانگر نیروی سختی متناسب با طبقه i ام و x_i بیانگر جابجایی متناظر در رابطه نیروی سختی طبقه i ام است. بدیهی است از آنجاییکه مقادیر x_i به‌عنوان جابجایی در آن معادله سختی درنظر گرفته شده است، در هر طبقه این مقدار بر پایه اختلاف جابجایی بالا و پایین آن طبقه در نظر گرفته شده است. نهایتاً توانایی روش تناوب مستقل در جذب تمام تغییر جهت‌ها و نقاط دوشاخگی، آن را تبدیل به مطمئن‌ترین گزینه برای محاسبه موهای نرمال غیرخطی سازه‌ها می‌کند. سلسله مراتب روش تناوب مستقل به اختصار در شکل ۷ نشان داده شده است.

به‌صورت خاص در زمینه استخراج مودهای نرمال غیرخطی سازه فولادی مذکور، بازه ۶ سانتی‌متر تغییرات برای هر یک از درجات آزادی در نظر گرفته شده است. مضافاً رزولوشن بررسی ۰/۱ میلی‌متر معادل ۰/۰۰۰۱ متر به دامنه مذکور در هر دو راستای مثبت و منفی اعمال شده است. همان‌طور که پیش‌تر نیز بیان شد، با فرض مقداری یکسان برای بیشینه دامنه جابجایی در یک پاسخ مشخص، اعمال سرعت اولیه (شیب پاسخ در زمان صفر) همراه با کاهش جابجایی اولیه متناظر خواهد بود که به‌مانند جابجایی محور قائم نمودار است و پاسخ جدیدی را منتج نخواهد شد. ازاین‌رو مقادیر محدودیت‌ها تنها به جابجایی‌های اولیه اعمال و سرعت‌های اولیه به‌عنوان متغیرهای وابسته به آنها برابر صفر در نظر گرفته شده‌اند. بدیهی است به لطف الگوریتم تناوب نیازی به معرفی متغیری برای دوره تناوب نبوده و این مقدار به‌عنوان خروجی الگوریتم اتوماتیک برای پاسخ‌های پریودیک محاسبه می‌شود. در حیطه انتگرال‌گیری عددی دامنه زمانی برابر بازه صفر تا یک ثانیه در هر گام در نظر گرفته شده است. مضافاً تلورانس خطای نسبی برابر 10^{-6} و تلورانس خطای مطلق برابر 10^{-9} فرض

[1] tspan

[2]

شده است. در حیطه الگوریتم تناوب، مقدار خطای قابل قبول قله ε_p برابر ۰/۱ درصد (۰/۰۰۱) و برابر با خطای قابل قبول زمانی ε_t قرار داده شده است. نهایتاً مقادیر ۹۶۰۰۰۰۰ و ۶۸۵۰۰۰۰ نیوتون بر متر به ترتیب برای سختی اولیه طبقه اول و سختی اولیه طبقه دوم در نظر گرفته شده و جرمی برابر با ۴۰۰۰ کیلوگرم به هر طبقه منتسب شده است.

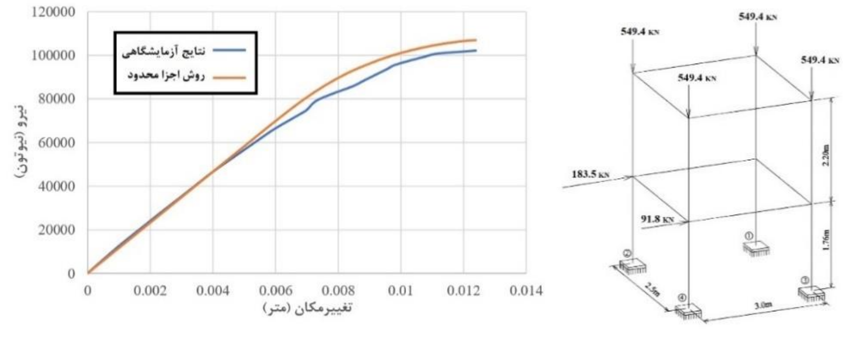


شکل ۷: سلسله‌مراتب روش تناوب مستقل

۴- اعتبارسنجی

۴-۱- روش اجزا محدود

جزئیات مدل پایه تحت تحلیل در بخش سوم شامل هندسه و ابعاد، اتصالات، مش‌بندی و سایر جزئیات کاملاً منطبق بر مورد آزمایشگاهی معرفی شده در [۳۵] بوده و تنها جزئیات بارگذاری و مشخصات مصالح آن تفاوت کرده است. ازاین‌رو به جهت راستی‌آزمایی روش اجزا محدود به کار گرفته شده در بخش‌های پیشین، مطابق جزئیات بارگذاری مذکور در [۳۵]، نیرویی معادل ۵۴۹/۴ کیلونیوتن در راستای محور هرکدام از ستون‌ها در تراز بام، یک نیروی جانبی به بزرگی ۱۸۳/۵ کیلونیوتن به ستون شماره ۲ در تراز طبقه اول و یک نیروی جانبی به بزرگی ۹۱/۸ کیلونیوتن به ستون شماره ۴ در تراز طبقه اول وارد شده است. پس از اعمال جزئیات مذکور در محیط نرم‌افزار ABAQUS رابطه نیرو - تغییرمکان در محل اثر بار جانبی ستون شماره ۴ استخراج شده و در کنار ترسیم شماتیک جزئیات هندسی مدل در شکل ۸ آورده شده است. مضافاً جزئیات ترسیمی توزیع تنش پس از اعمال بارگذاری مذکور در شکل ۱ قابل‌مشاهده است.



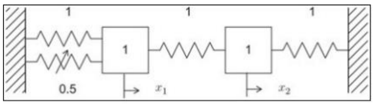
شکل ۸: ترسیم شماتیک سازه تحت بررسی و نتایج اعمال بارگذاری [۳۵]

۴-۲- روش تناوب مستقل

پس از اعتبارسنجی مدل روش اجزا محدود به‌کاررفته در ابتدای روند حل مسئله، گام بعدی اعتبارسنجی روشی است که به‌واسطه آن مودهای نرمال غیرخطی محاسبه شده‌اند. در این راستا، مثالی فراگیر که در بسیاری از تحقیقات مرتبط با این حوزه بررسی شده است را

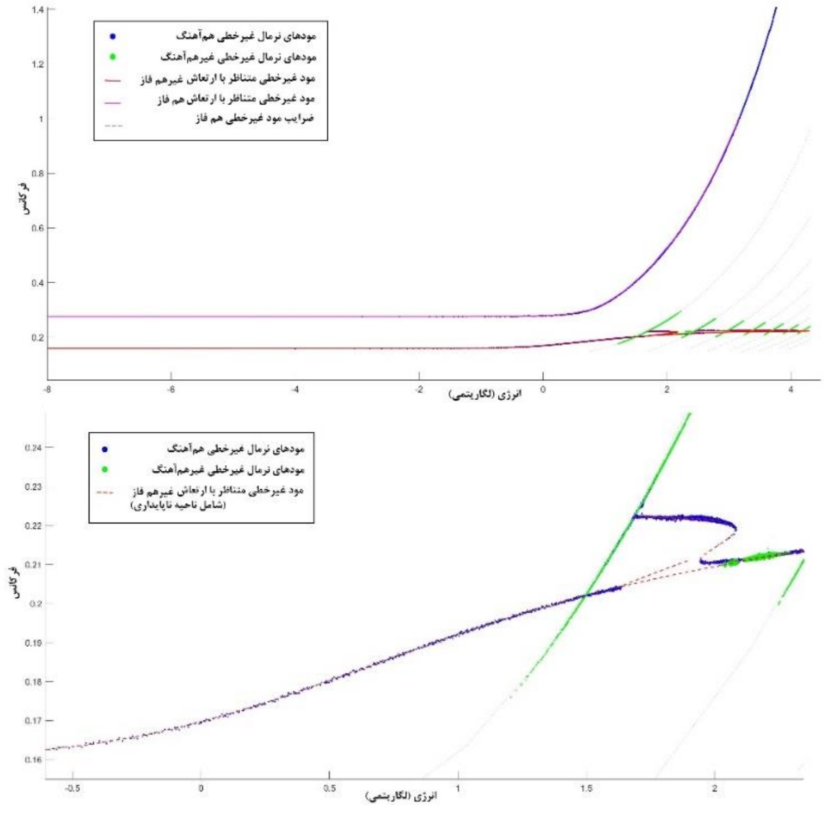
مجدداً با به‌کارگیری روش تناوب مستقل تحت تحلیل قرار داده و نتایج با هم مقایسه شده است [۲۸]. ترسیم شماتیک سیستم مذکور در شکل ۹ و جزئیات متناظر با معادلات دیفرانسیل آن در رابطه (۵) آمده است.

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 + (2x_1 - x_2) + 0.5x_1^3 = 0 \\ \ddot{x}_2 + (2x_2 - x_1) = 0 \end{Bmatrix} \tag{۵}$$



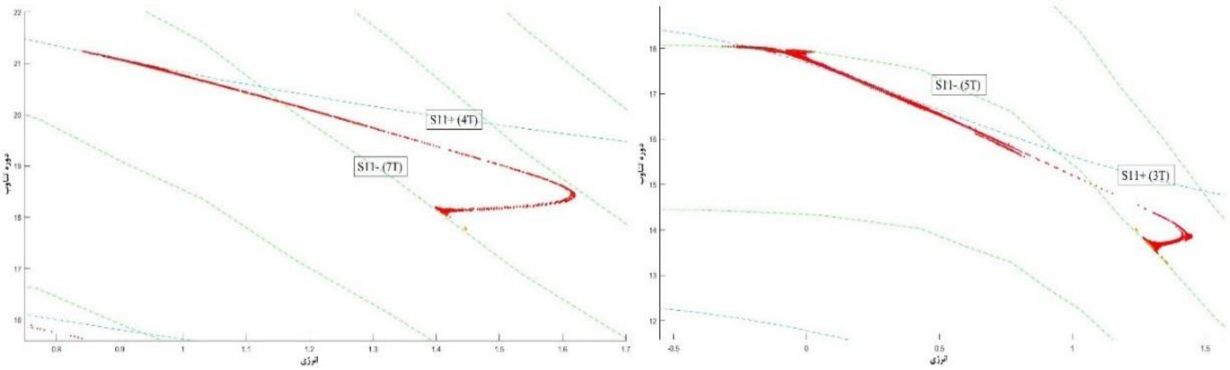
شکل ۹: ترسیم شماتیک نمونه مورد بررسی در [۲۸]

روش مورداستفاده در [۲۸] برگرفته از ترکیب تکنیک شوتینگ به‌عنوان معیار مود نرمال غیرخطی بودن با روش شبه طول کمان به‌عنوان یابنده پاسخ بعدی در محیطی متشکل از پاسخ‌های پیوستار می‌باشد. شایان‌ذکر است همان‌گونه که پیش‌تر نیز بیان شد، نقطه آغازین نمودار که در روش [۲۸] به‌عنوان نقاط اولیه در نظر گرفته شده است، مقادیر متناظر با مودهای نرمال خطی است که در نمودار انرژی - فرکانس به‌واسطه خطی افقی در سطوح پایین انرژی منعکس می‌شود. بخشی از نتایج که توسط [۲۸] نیز به‌دست‌آمده است در شکل ۱۰ آمده است. مضافاً، به جهت نمایش بهتر توانایی روش تناوب مستقل در جذب دوشاخگی پاسخ، جزئیات دوشاخگی از نمایی نزدیک‌تر و با جزئیاتی بیش‌تر ترسیم شده است. دراین‌خصوص خط‌چین قرمزرنگ نمای نزدیک شامل بخش ناپایدار مودهای نرمال غیرخطی است که در دنیای واقعی نمود خارجی ندارد. از آنجائیکه اگر سیستمی تحت مقدار دوره تناوبی پریودیک باشد، مضارب آن دوره تناوب نیز بازه‌های تناوبی آن سیستم محسوب می‌شوند، خط‌چین‌های طوسی رنگ به‌عنوان مضارب مود نرمال غیرخطی هم‌فاز به شکل اضافه شده‌اند.



شکل ۱۰: مودهای نرمال غیرخطی هم‌فاز و غیرهم‌فاز سیستم تحت اعتبارسنجی (بالا) و نمای نزدیک دوشاخگی آن (پایین)

شایان‌ذکر است روش تناوب مستقل قادر به یافتن پاسخ‌ها و دوشاخگی‌هایی است که در هیچ‌یک از مطالعات پیشین قابل‌دسترسی نبوده‌اند که به‌عنوان نمونه می‌توان به شکل ۱۱ اشاره کرد که به‌منظور نمایش بهتر جزئیات از مقادیر دوره تناوب در محور عمودی بهره گرفته شده است. در نهایت، با استناد نتایج ارائه شده کفایت نسبی روش اجزا محدود و روش تناوب مستقل مورداستفاده مشهود است.



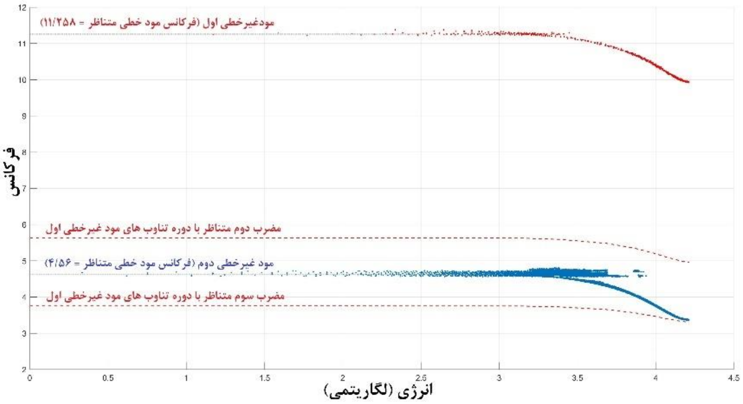
شکل ۱۱: نمونه‌هایی از دوشاخگی‌های به‌دست‌آمده مازاد بر [۲۸] شامل رزونانس‌های داخلی ۵:۳ و ۷:۴

۵- نتایج

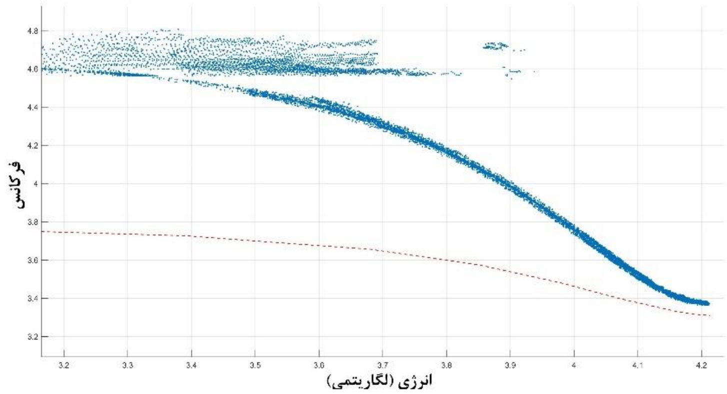
پس از اعتبارسنجی ابزار مورداستفاده در مسیر تحلیل، روش تناوب مستقل بر سازه فولادی دوطبقه مذکور در بخش ۱-۳ با هدف ارزیابی آن اعمال شد. اگرچه روش جاری پروسه‌ای نسبتاً زمان‌گیر است، ولی آن را می‌توان تنها راه پوشش کلیه پاسخ‌های محتمل دانست؛ چرا که فارغ از اثرات هرگونه فرضیات اولیه و وابستگی به سایر پاسخ‌ها عمل می‌کند. یکی دیگر از مزایای این رویکرد عدم مواجهه با مفهوم واگرایی در بدنه روش تناوب مستقل است؛ چراکه الگوریتم نوین تناوب در مرحله قبل فیلتر مناسبی برای عبور پاسخ‌های قابل‌قبول و در حیطه خطاهای قابل‌پذیرش ارائه می‌دهد. امکان ترکیب الگوریتم نوین تناوب با سایر روش‌ها نیز می‌تواند سبب ارتقاء عملکردی آنها شود، چرا که با حذف یک متغیر می‌تواند سرعت روش‌های پیوستار را به‌مراتب بالاتر ببرد. نهایتاً روش تناوب مستقل را می‌توان به‌عنوان روشی قابل‌اتکا جهت اعتبارسنجی سایر روش‌ها در یافتن تمامی مودهای نرمال غیرخطی مسائل جدیدی دانست که ممکن است طی آنها مودهای نرمال خطی تنها نقاط آغاز پاسخ نباشند. در مطالعه حاضر، کلیه جزئیات مذکور از روش تناوب مستقل در محیط نرم‌افزار *MATLAB* کدنویسی شده و تحت اجرا قرار گرفته است و نهایتاً نتایج حاصل از آن در قالب نمودار انرژی-فرکانس، منحنی‌های فضای فازی و احجام شبه‌پیوستار مودهای نرمال غیرخطی ارائه شده است.

۵-۱- وابستگی انرژی- فرکانس

جداسازی زمان و جابجایی درجات آزادی در معادلات حرکت غیرخطی عملاً به دلیل وابستگی انرژی - فرکانس امکان‌پذیر نیست؛ در نتیجه ترسیم این رابطه می‌تواند ابزاری مناسب برای ترسیم پاسخ‌های غیرخطی در راستای مودهای نرمال غیرخطی و متعاقباً در راستای تفسیر دینامیک غیرخطی سازه‌ها باشد. ازاین‌رو در شکل ۱۲ رابطه انرژی - فرکانس متناظر با سازه فولادی مذکور ترسیم شده و پاسخ‌های تکراری متناظر با مضارب پاسخ‌های اصلی به‌منظور تفکیک بهتر رفتار پایه حذف شده‌اند. نهایتاً به‌منظور یک تخمین گرافیکی بهتر، شکل ۱۳ نمایی نزدیک‌تر از رزونانس داخلی ۱:۳ را نشان می‌دهد که به معنی تمایل پاسخ‌ها به یک تبادل انرژی بین مود نرمال غیرخطی دوم با مضرب سوم از مود نرمال غیرخطی اول است و منطق توجه به این مضارب از این مفهوم نشات می‌گیرد که اگر پاسخی تحت دوره تناوبی متناوب باشد، در مضارب آن دوره تناوب نیز متناوب است و بسط این مفهوم به فرکانس که معکوس دوره تناوب است بدین معنی است که ضرایب $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{3}$، $\frac{1}{4}$ و ... از مود نرمال غیرخطی اول در زیرحوزه انرژی-فرکانس نیز جزو پاسخ‌هایی است که شرط متناوب بودن را ارضاء می‌کند. شایان‌ذکر است خط‌چین‌های قرمز رنگ مضارب دوره تناوب مود نرمال غیرخطی اول و نقطه‌چین‌های طوسی رنگ متناظر با مودهای نرمال خطی اول و دوم هستند که با تغییر انرژی ثابت مانده و تطابق نسبی مناسبی با پاسخ سازه غیرخطی در سطوح انرژی پایین دارند.



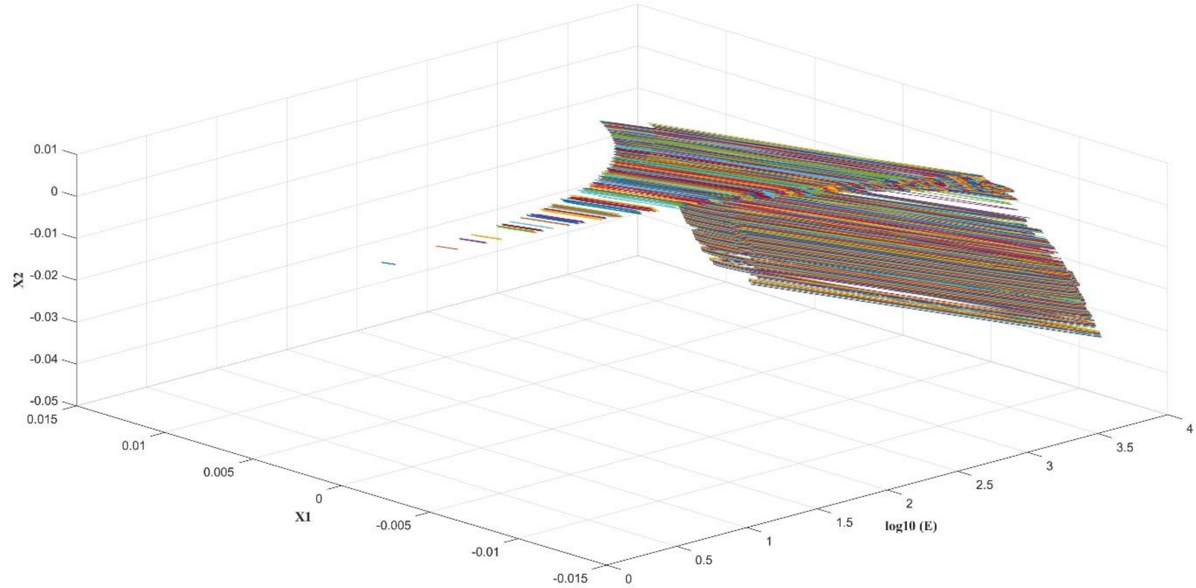
شکل ۱۲: کلیه پاسخ‌های متناسب با مودهای نرمال غیرخطی در زیر حوزه انرژی - فرکانس



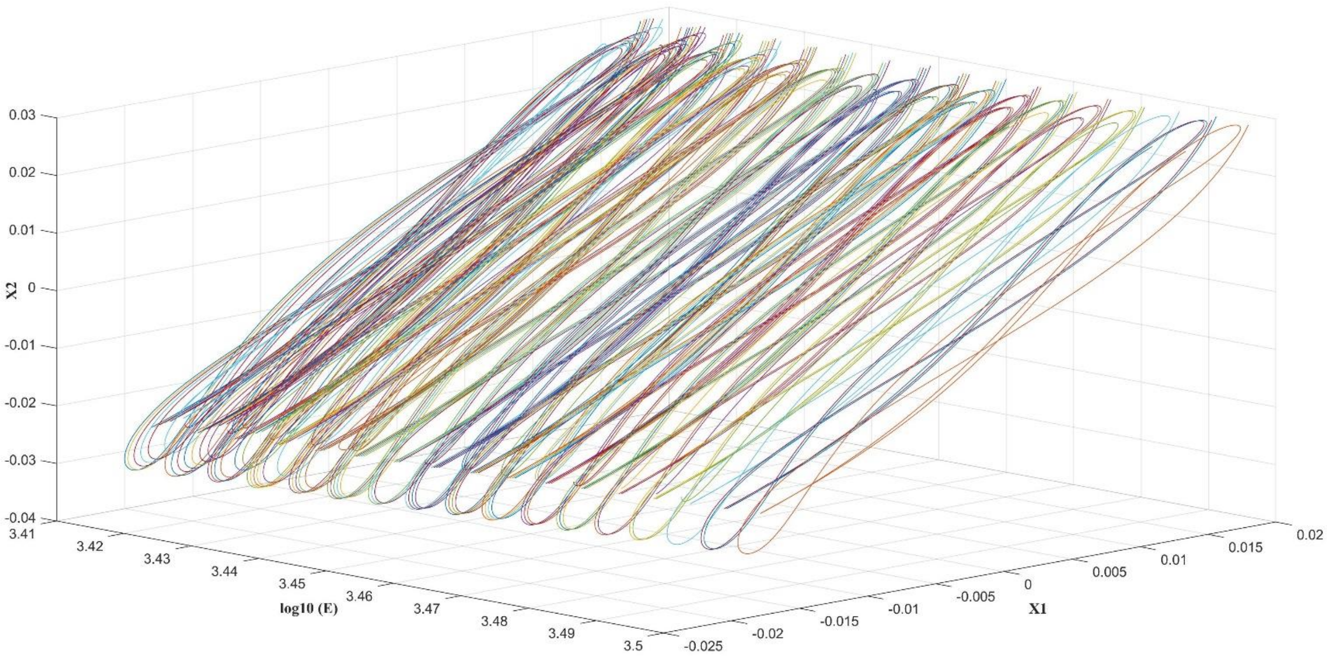
شکل ۲: نمایی نزدیک از رزونانس داخلی ۱:۳

۵-۲- مودهای نرمال غیرخطی شبه پیوستار

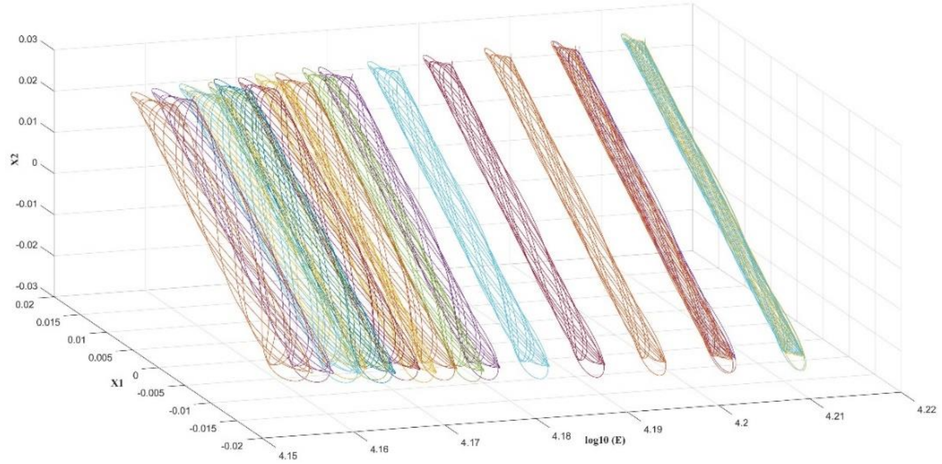
مودهای نرمال خطی عموماً در قالب نسبت‌های بین مقادیر درجات آزادی و گاهاً با مقیاس کردن یکی از آنها به مقدار واحد نمایش داده می‌شوند؛ ولی به دلیل ذات دائماً در حال تغییر مودهای نرمال غیرخطی در سطوح مختلف انرژی و مضافاً رابطه غیرخطی (منحنی) در هر نقطه زمانی، مسیر ترسیم متفاوتی برای نسخه غیرخطی آنها لازم است. سایر تحقیقات به ترسیم تعداد بسیار محدودی از منحنی‌های مودال غیرخطی در تک‌نقطه‌هایی با انرژی مشخص اکتفا نموده‌اند. در این مقاله سعی شده تا از ترسیمی شبه پیوستار در فضای سه‌بعدی بین انرژی و جابجایی درجات آزادی جهت نمایش آنها بهره گرفته شود. در این زمینه شکل ۱۴ مودهای نرمال غیرخطی متناظر با مود نرمال غیرخطی اول، شکل ۱۵ مودهای نرمال غیرخطی متناظر با بخش‌هایی از اواسط مود نرمال غیرخطی دوم و شکل ۱۶ مودهای نرمال غیرخطی در انتهای رزونانس داخلی ۱:۳ را نشان می‌دهد.



شکل ۳: مودهای نرمال غیرخطی در اوایل (تصویر راست) و اواخر (تصویر چپ) ارتعاش غیرهم‌فاز



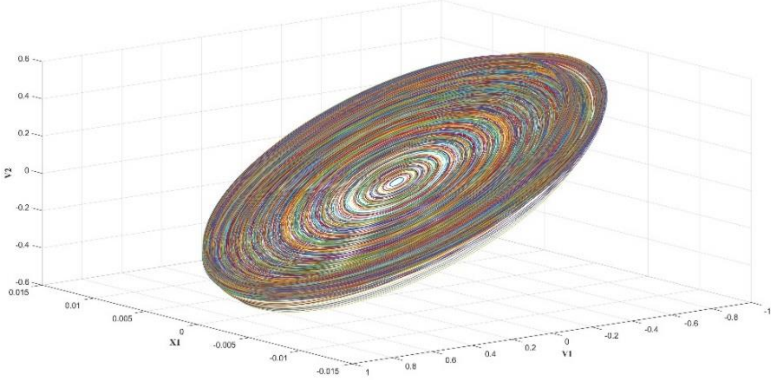
شکل ۴: مودهای نرمال غیرخطی در اوایل (تصویر راست) و اواخر (تصویر چپ) ارتعاش غیرهم‌فاز



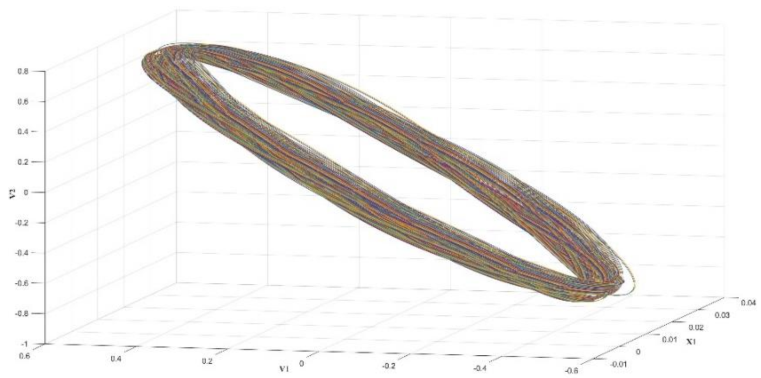
شکل ۵: مودهای نرمال غیرخطی متناظر با رزونانس داخلی ۱:۲ (تصویر راست) و رزونانس داخلی ۲:۵ (تصویر چپ)

۵-۳- منحنی‌های فضای فازی

به‌واسطه ترویج تکنیک دوراهی تغییرناپذیر در این حیطه، در نظر گرفتن سرعت به‌عنوان متغیری مستقل در سیستم‌های غیرخطی در فضای فازی مرسوم شده است. البته ارائه روابط این متغیرها در مسائل نامیرا نیز خالی‌ازلطف نیست، چرا که در اصل پیوستگی پاسخ‌ها در هر ناحیه و نیز بیان مودهای نرمال بر پایه متغیرهای ثانویه را به تصویر می‌کشد. ازاین‌رو رابطه متغیرهای ثانویه (سرعت) در قالب یکی از متغیرهای اولیه (جابجایی) تحت عنوان منحنی‌های فضای فازی ارائه شده است. در این راستا شکل ۱۷ مودهای نرمال غیرخطی فازی متناظر با مود اول و شکل ۱۸ مودهای نرمال غیرخطی فازی متناظر با بخش‌هایی از مود دوم را نشان می‌دهد.



شکل ۶: مودهای نرمال غیرخطی متناظر با مود اول



شکل ۷: مودهای نرمال غیرخطی متناظر با بخش‌هایی از مود دوم

نهایتاً علی‌رغم عدم اعتبار اصل جمع آثار قوا در ناحیه غیرخطی، مودهای نرمال غیرخطی به‌عنوان ابزاری کاربردی در تشکیل مدل‌های کاهش مرتبه یافته، پایش سلامت سازه‌ها، اکتشاف آسیب‌پذیری، مطالعه فرکانس سازه‌ها و استخراج پارامترهای غیرخطی مودال مورد کاربرد بوده و ازاین‌رو در دهه اخیر موردتوجه محققان بسیاری قرار گرفته شده است.

۶- نتیجه‌گیری

مودهای نرمال غیرخطی ابزاری مناسب برای تحلیل و تفسیر رفتار غیرخطی سازه‌ها هستند. ازاین‌رو پس از شناخت بنیادین تعاریف و مفاهیم پایه آنها، سلسله‌مراتب محاسباتشان از ابتدای مدل‌سازی تا انتهای استخراج مودهای نرمال غیرخطی ارائه شده است. در این زمینه، پس از استخراج مؤلفه‌های معادلات حرکت مانای سازه‌های چند درجه آزاد تحت غیرخطی مادی بر پایه روش اجزا محدود، مسیری جهت تحلیل ارتعاش آزاد این نوع از سیستم‌های غیرخطی پیشنهاد و جزئیات آن ارائه شده است. پس از آن باتکیه‌بر این ابزار محاسبه‌گر پاسخ به‌عنوان نقطه شروع حل مسئله، الگوریتمی نوین جهت شناسایی مودهای نرمال غیرخطی ارائه شده و با بسط این الگوریتم بر معادلات دیفرانسیل مانا حاصله، امکان استخراج کلیه مودهای نرمال غیرخطی در حیطه مسئله فراهم گردیده است. پس از آن، به‌منظور بررسی عملکرد روش پیشنهادی، مدل اجزا محدودی یک سازه دو طبقه فولادی دارای مصالح غیرخطی ایجاد و پس از اعتبارسنجی، از آن در راستای تشکیل معادلات دیفرانسیل مانا بهره گرفته شده و امکان تحلیل ارتعاش آزاد آن فراهم گردیده است. نهایتاً، پس از اعتبارسنجی روش نوین تناوب مستقل، احجام مودهای نرمال غیرخطی شبه پیوستار، منحنی‌های انرژی - فرکانس و منحنی‌های فضای فازی سازه مذکور ارائه شده است.

از منظر کلی، عدم وابستگی به پاسخ‌های پیشین و فرضیات محدودکننده در یافتن پاسخ بعدی، پوشش کل پاسخ‌های محتمل، امکان دستیابی به مودهای نرمال غیرخطی با فرکانس‌های متفاوت در هر درجه آزادی، معرفی مسیر بسط مدل اجزا محدودی به یک مجموعه معادلات حرکت مانا، تسهیل مسیر تحلیل ارتعاش آزاد سازه‌های تحت غیرخطی مادی، عدم مواجهه با مفهوم واگرایی در بدنه روش به‌واسطه بهره‌گیری از فیلتر الگوریتم تناسب و جذب تمامی رزونانس‌های داخلی از مزایا و دستاوردهای نوین روش مورداستفاده و زمان تحلیل نسبتاً بالا و بالتبع هزینه‌های نسبی اجرای پروسه از معایب آن است. نهایتاً، این مقاله برای اولین‌بار کلیه جزئیات سلسله‌مراتب استخراج مودهای نرمال غیرخطی سازه‌های عمرانی را ارائه نموده و می‌تواند پنجره‌ای نوین به روی تحلیل غیرخطی آنها از این منظر در نظر گرفته شود.

مراجع

[1] Rosenberg, R. M., (1960), "Normal modes of nonlinear dual-mode systems."

[2] Rand, R. H., (1971), "A higher order approximation for non-linear normal modes in two degree of freedom systems," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 6(4), pp. 545-547.

[3] Vakakis, A. F., (1991), "*Analysis and identification of linear and nonlinear normal modes in vibrating systems*," California Institute of Technology.

[4] Vakakis, A. F., and Rand, R., (1992), "Normal modes and global dynamics of a two-degree-of-freedom non-linear system—II. High energies," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 27(5), pp. 875-888.

[5] Shaw, S., and Pierre, C., (1991), "Non-linear normal modes and invariant manifolds."

[6] Shaw, S. W., and Pierre, C., (1994), "Normal modes of vibration for non-linear continuous systems," *Journal of sound and vibration*, 169(3), pp. 319-347.

[7] Peeters, M., Viguié, R., Sérandour, G., Kerschen, G., and Golinval, J.-C., (2009), "Nonlinear normal modes, Part II: Toward a practical computation using numerical continuation techniques," *Mechanical systems and signal processing*, 23(1), pp. 195-216.

[8] Renson, L., and Kerschen, G., (2013), "*Nonlinear normal modes of nonconservative systems*," Topics in Nonlinear Dynamics, Volume 1, Springer, pp. 189-202.

[9] Ibrahim, R., and Woodall, T., (1986), "Linear and nonlinear modal analysis of aeroelastic structural systems," *Computers & structures*, 22(4), pp. 699-707.

[10] Peeters, M., Kerschen, G., Golinval, J.-C., Stephan, C., and Lubrina, P., (Year) Published, "Nonlinear modal analysis of aerospace structures," *Proc. Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering*, pp. 26-28.

[11] Noël, J.-P., Renson, L., Kerschen, G., Peeters, B., Manzato, S., and Debille, J., (Year) Published, "Nonlinear dynamic analysis of an F-16 aircraft using GVT data," *Proc. Proceedings of the international forum on aeroelasticity and structural dynamics*.
[12] Detroux, T., Renson, L., and Kerschen, G., (2014), "*The harmonic balance method for advanced analysis and design of nonlinear mechanical systems*," Nonlinear Dynamics, Volume 2, Springer, pp. 19-34.
[13] Joannin, C., Thouverez, F., and Chouvion, B., (2018), "Reduced-order modelling using nonlinear modes and triple nonlinear modal synthesis," *Computers & Structures*, 203, pp. 18-33.
[14] Chujo, T., Mori, O., and Kawaguchi, J., (2019), "Normal mode analysis of rubble-pile asteroids using a discrete element method," *Icarus*, 321, pp. 458-472.
[15] Strozzi, M., Smirnov, V. V., Manevitch, L. I., and Pellicano, F., (2020), "Nonlinear normal modes, resonances and energy exchange in single-walled carbon nanotubes," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 120, p. 103398.
[16] Kuether, R. J., and Allen, M. S., (2016), "*Validation of nonlinear reduced order models with time integration targeted at nonlinear normal modes*," Nonlinear Dynamics, Volume 1, Springer, pp. 363-375.
[17] Ehrhardt, D. A., Hill, T. L., and Neild, S. A., (2019), "Experimentally measuring an isolated branch of Nonlinear normal modes," *Journal of Sound and Vibration*, 457, pp. 213-226.
[18] Ferhatoglu, E., Cigeroglu, E., and Özgüven, H. N., (2020), "A novel modal superposition method with response dependent nonlinear modes for periodic vibration analysis of large MDOF nonlinear systems," *Mechanical Systems and Signal Processing*, 135, p. 106388.
[19] Jahan, S., Hoseinzadeh, Y., and Mojtahedi, A., (2017), "Steel bridges structural health monitoring based on operational modal analysis accommodating evaluation of uncertainty," *Journal of Structural and Construction Engineering*, 4(3), pp. 5-17.
[20] Shankar, K. A., and Pandey, M., (2016), "Nonlinear dynamic analysis of cracked cantilever beam using reduced order model," *Procedia Engineering*, 144, pp. 1459-1468.
[21] Najafgholipour, M. A., Darvishi, h., Dehghan, S. M., and Maheri, M. R., (2018), "Empirical Equations for Estimation of the Fundamental Vibration Frequency of Historical Masonry Towers," *Journal of Structural and Construction Engineering*.
[22] ghamari, m., and Gholhaki, m., (2019), "Calculate the main rotation time of the composite steel shear wall and examine the effect of the crater and the thickness of the concrete coating on it," *Journal of Structural and Construction Engineering*.
[23] Meyrand, L., Sarrouy, E., Cochelin, B., and Ricciardi, G., (2019), "Nonlinear normal mode continuation through a Proper Generalized Decomposition approach with modal enrichment," *Journal of Sound and Vibration*, 443, pp. 444-459.
[24] Alijani, A., Khomami Abadi, M., and Razzaghi, J., (2018), "A new technique in the modal analysis of cracked reinforced concrete (RC) beams through the finite element method," *Journal of Structural and Construction Engineering*.
[25] Peter, S., Scheel, M., Krack, M., and Leine, R. I., (2018), "Synthesis of nonlinear frequency responses with experimentally extracted nonlinear modes," *Mechanical Systems and Signal Processing*, 101, pp. 498-515.
[26] Aghayari, R., rahimi, F., and Samali, B., (2020), "Experimental Investigation on the Performance of Tuned Mass Damper Embedded on Steel Frame under earthquake excitation and Estimation of the Modal Parameters," *Journal of Structural and Construction Engineering*.
[27] Bagheri, S., and Hayati Raad, H., (2019), "Parametric study on dynamic behavior of liquid storage tanks subjected to pulse-like excitations," *Journal of Structural and Construction Engineering*, 6(Issue 2), pp. 75-86.
[28] Kerschen, G., Peeters, M., Golinval, J.-C., and Vakakis, A. F., (2009), "Nonlinear normal modes, Part I: A useful framework for the structural dynamicist," *Mechanical systems and signal processing*, 23(1), pp. 170-194.
[29] Peeters, M., (2010), "*Theoretical and experimental modal analysis of nonlinear vibrating structures using nonlinear normal modes*," Ph. D. Thesis, University of Ličge.
[30] Renson, L., (2014), "*Nonlinear modal analysis of conservative and nonconservative aerospace structures*," Ph. D. thesis, Université de Liège, Liège.
[31] Li, X., Ji, J., and Hansen, C. H., (2006), "Non-linear normal modes and their bifurcation of a two DOF system with quadratic and cubic non-linearity," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 41(9), pp. 1028-1038.
[32] Jahn, M., Tatzko, S., Panning-von Scheidt, L., and Wallaschek, J., (2019), "Comparison of different harmonic balance based methodologies for computation of nonlinear modes of non-conservative mechanical systems," *Mechanical Systems and Signal Processing*, 127, pp. 159-171.
[33] Kuether, R. J., and Allen, M. S., (2014), "A numerical approach to directly compute nonlinear normal modes of geometrically nonlinear finite element models," *Mechanical Systems and Signal Processing*, 46(1), pp. 1-15.
[34] Renson, L., Kerschen, G., and Cochelin, B., (2016), "Numerical computation of nonlinear normal modes in mechanical engineering," *Journal of Sound and Vibration*, 364, pp. 177-206.
[35] Kim, S.-E., Kang, K.-W., and Lee, D.-H., (2003), "Full-scale testing of space steel frame subjected to proportional loads," *Engineering structures*, 25(1), pp. 69-79.