

Buckling of FML cylindrical shell subjected to hydrostatic pressure with closed end and clamped-clamped boundary conditions

Ahmad Reza Ghasemi^{1*}, Mahdi Soleymani²

1- Associate Professor, Department of Mechanical Engineering, Kashan university, Kashan, Iran

2 -Ph.D. Student, Department of Mechanical Engineering, Kashan university, Kashan, Iran

ABSTRACT

In this research, the buckling of fibre metal laminated (FML) hybrid cylindrical shell under hydrostatic pressure with clamped - clamped boundary conditions are studied. Fourier decomposition and Galerkin method are used in the presented analytical solution. In this method, the radial displacement and the axial displacement are approximated by the function of the first vibrational mode of the clamped-clamped beam and the third order derivative of the beam function, respectively. The ends of the cylinder are closed by rigid discs, and the axial displacement of these two discs causes the axial deformation in the cylindrical shell. Using the above method, the effects of the length to radius ratio on the buckling resistance of different composite cylinders are investigated. Also, in order to see the effect of the thickness of the cylinder on its buckling resistance, buckling behaviour of cylinders with different thickness are investigated and it is shown that carbon/epoxy cylinders are more sensitive to thickness change than other composites. One of the other important issues discussed in this study is the effect of the amount of the used metal in the buckling resistance of FML hybrid cylinder. Also, it is shown that $[54/-54]_S$ is one of the best choices for producing the buckling resistant composite cylinders. In order to ensure the accuracy of the proposed method, the results of this method are compared with the results of finite element method. Using the proposed method, the critical pressure of the buckling of FML pipes with different mechanical properties and geometric dimensions under hydrostatic pressure can be analysed, and it will be possible to design tubes with maximum buckling resistance.

ARTICLE INFO

Receive Date: 11 March 2020

Revise Date: 25 May 2020

Accept Date: 29 June 2020

Keywords:

Buckling of cylinders

FMLs

Critical buckling presser

Hydrostatic presser Galerkin method

Fourier series

All rights reserved to Iranian Society of Structural Engineering.

doi: <https://dx.doi.org/10.22065/jsce.2020.223092.2101>

*Corresponding author: Ahmad Reza Ghasemi.

Email address: Ghasemi@kashanu.ac.ir

تحلیل کمانش استوانه‌های هیبرید کامپوزیت - فلز تحت فشار هیدرواستاتیک با انتهای بسته و شرایط مرزی گیردار

احمد رضا قاسمی^{۱*}، مهدی سلیمانی^۲

۱- دانشیار، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

۲- دانشجوی دکتری، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

چکیده

در این پژوهش کمانش استوانه هیبرید کامپوزیت - فلز تحت فشار هیدرواستاتیکی و شرایط مرزی گیردار بررسی شده است. در روش تحلیلی ارائه شده برای حل مساله کمانش استوانه کامپوزیت - فلز از بسط سری فوریه و روش گالرکین استفاده شده و در این روش، جابجایی شعاعی با استفاده از مود اول ارتعاشی تیر دوسرگیردار و جابجایی محوری نیز به شکل مشتق مرتبه سوم تابع تیر تخمین زده شده‌اند. ابتدا و انتهای استوانه‌ی مورد بررسی به وسیله دیسک‌های صلب بسته شده و جابجایی محوری این دو دیسک باعث ایجاد تغییر شکل محوری در دیواره استوانه می‌شود. تاثیر نسبت طول استوانه به شعاع آن بر مقاومت به کمانش استوانه‌هایی از جنس‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین با تغییر تعداد لایه‌های تشکیل دهنده پوسته استوانه، مقاومت به کمانش استوانه‌هایی با ضخامت‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفته و نشان داده شده که از بین کامپوزیت‌های مختلف، تغییر در ضخامت استوانه‌های کربن - اپوکسی تاثیر بیشتری بر مقاومت به کمانش این پوسته‌های استوانه‌ای خواهد داشت. اثر میزان فلز استفاده شده در استوانه هیبرید کامپوزیت - فلز بر مقاومت به کمانش نیز از موضوعات مهمی است که در این پژوهش به آن پرداخته شده و نشان داده شده که در چه نوع کامپوزیت‌هایی افزایش ضخامت لایه آلومینیومی باعث افزایش استحکام کمانشی شده و در چه مواقعی باعث تضعیف ساختار در مقابل کمانش می‌شود. به منظور اطمینان از صحت روش ارائه شده، نتایج این روش با حل المان محدود مقایسه شده است. با استفاده از روش ارائه شده می‌توان فشار بحرانی کمانش لوله‌های کامپوزیت - فلز با خواص مکانیکی و ابعاد هندسی مختلف تحت فشار هیدرواستاتیکی را تحلیل نموده و به طراحی لوله‌هایی با بیشینه مقاومت به کمانش دست یافت.

کلمات کلیدی: کمانش استوانه، ساختار کامپوزیت - فلز، فشار بحرانی کمانش، فشار هیدرواستاتیک، روش گالرکین، سری فوریه

شناسه دیجیتال:		سابقه مقاله:				
doi:	https://dx.doi.org/10.22065/jsce.2020.223092.2101	چاپ	انتشار آنلاین	پذیرش	بازنگری	دریافت
	10.22065/jsce.2020.223092.2101	۱۴۰۰/۱۲/۲۹	۱۳۹۹/۰۴/۰۹	۱۳۹۹/۰۴/۰۹	۱۳۹۹/۰۳/۰۵	۱۳۹۸/۱۲/۲۱
احمد رضا قاسمی Ghasemi@kashanu.ac.ir				*نویسنده مسئول: پست الکترونیکی:		

۱- مقدمه

ساختارهای ترکیبی کامپوزیت - فلز^۱ با کنار هم قرار دادن لایه‌های فلز و کامپوزیت تولید می‌شود. این ساختار علاوه بر نسبت مقاومت و سختی به وزن بالا، در برابر بارهای خستگی، نیروهای ضربه و تغییرات دما خواص بهتری نسبت به کامپوزیت‌ها از خود نشان می‌دهد [۱]. همچنین برخی از مطالعات اولیه نشان داده‌است که استفاده از کامپوزیت - فلز در طراحی بعضی از سازه‌ها می‌تواند وزن آن سازه‌ها را تا ۵۰ درصد کاهش دهد [۲]. این خواص بهبود یافته باعث شده که سازه‌های کامپوزیت - فلز در دهه‌های اخیر توجه پژوهشگران را به خود جلب کرده و در صنایع مکانیکی و هوافضا مورد استفاده قرار گیرند. اولین سازه کامپوزیت - فلز در دانشگاه صنعتی دلفت^۲ با ترکیب آلومینیوم 2.24-T3 و کامپوزیت S2-glass ساخته شد [۳]. پرکاربردترین کامپوزیت - فلزها عبارتند از آرال (ARALL^۳) که در آن الیاف آرامید توسط لایه‌های آلومینیوم تقویت شده‌اند، گلار (GLARE^۴) که در آن الیاف شیشه توسط لایه‌های آلومینیوم تقویت شده‌اند و کرال (CRALL^۵) که در آن الیاف کربن توسط لایه‌های آلومینیوم تقویت شده‌است.

طراحی بیشتر تجهیزات انتقال سیالات از درون آب به صورت پوسته‌های استوانه‌ای یا لوله‌ها می‌باشد و همیشه به دلیل فرارگرفتن این لوله‌ها در عمق آب‌ها تحت تاثیر فشار هیدرواستاتیکی در راستای شعاعی و محوری خواهند بود. در نتیجه یکی از حالت‌های مهم آسیب دیدگی این لوله‌ها ایجاد کمانش در آن‌ها خواهد بود و این موضوع باعث شده تا مطالعه در مورد بار کمانش پوسته‌های استوانه‌ای توجه بسیاری از محققین را در سال‌های گذشته به خود جلب کند. حل کلاسیک این مساله در مورد پوسته‌های استوانه‌ای فلزی را در مقالات بسیاری مانند تیموشنکو^۶ و گر^۷ [۴]، آلفوتو^۸ [۵] و جونز^۹ [۶] می‌توان یافت.

پس از اینکه خواص جدید کامپوزیت‌ها، توجه پژوهشگران را به این ساختارها جلب کرد، در مقاله‌ای که توسط کارول^{۱۰} و همکاران [۷] ارائه شد، رفتار قطعه خاصی که در انتقال سیال از زیر اقیانوس مورد استفاده قرار می‌گیرد و از جنس شیشه - اپوکسی ساخته شده بود مورد بررسی قرار گرفت. سپس مسجر^{۱۱} و همکاران [۸] با استفاده از الگوریتم ژنتیک چیدمان‌های بهینه برای تولید لوله‌های جدارنازک مقاوم در برابر آسیب‌های ناشی از کمانش را ارائه کردند. بعد از آن، رفتار بعد از کمانش استوانه تحت فشار خارجی با استفاده از حل المان محدود و بررسی آزمایشگاهی توسط هر^{۱۲} و همکاران [۹] مورد بررسی قرار گرفت. همچنین هرناندز مورنو^{۱۳} و همکاران [۱۰] با استفاده از روش آزمایشگاهی، اثر الگوهای مختلف پیچش الیاف بر خواص مکانیکی استوانه کامپوزیتی را مورد بررسی قرار دادند. مون^{۱۴} و همکاران [۱۱] نیز با استفاده از مدل سازی المان محدود استوانه کامپوزیتی با ضخامت متوسط، بار بحرانی کمانش استوانه از جنس کربن - اپوکسی را پیش‌بینی کردند. همچنین تنوری لایه مرزی توسط لی^{۱۵} و کیاو^{۱۶} [۱۲] برای تحلیل کمانش استوانه کامپوزیتی تحت فشار خارجی به کار گرفته شد. در پژوهشی که توسط لوپاتین^{۱۷} و همکاران [۱۳] ارائه شد، کمانش پوسته استوانه کامپوزیتی تحت تاثیر فشار یکنواخت خارجی با استفاده از یک حل تحلیلی بررسی شد. لوپاتین [۱۴] پس از آن یک حل نیمه تحلیلی برای مساله کمانش استوانه با ساختار کامپوزیت ساندویچی ارائه کرد.

1. Fiber Metal Laminate (FML)
2. Delft university of Technology
3. Aramid Reinforced Aluminum Laminate
4. Glass Reinforced Aluminum Laminate
5. Carbon Reinforced Aluminum Laminate
6. S.P. Timoshenko
7. J.M. Gere
8. N.A. Alfutov
9. R.M. Jones
10. V. carvelli
11. T. Messenger
12. S.H. Hur
13. H. Hernandez-Moreno
14. C.J. Moon
15. Z.M. Li
16. P. Qiao
17. A.V. Lopatin

استفاده از روش حل عددی نیز در پژوهشی که توسط تهیر^{۱۸} و ماندال^{۱۹} [۱۵] انجام شد برای تحلیل کمانش پوسته استوانه‌ای مورد استفاده قرار گرفت. فن^{۲۰} و همکاران [۱۶] یک حل تحلیلی برای محاسبه بار بحرانی کمانش پوسته‌های استوانه‌ای ارائه کردند که در این پژوهش بار بحرانی کمانش برای استوانه‌هایی که ضخامت دیواره آن‌ها در راستای طول استوانه به صورت پلکانی تغییر می‌کند محاسبه شد.

با توجه به مجموع موضوعاتی که در فوق ذکر شد به نظر می‌رسد پوسته‌های استوانه‌ای ساخته شده از کامپوزیت - فلز می‌توانند در بسیاری از موارد جایگزین مناسبی برای لوله‌های فلزی و یا کامپوزیتی باشند. با توجه به اینکه تاکنون کمتر به تحلیل کمانش لوله‌های کامپوزیت - فلز پرداخته شده است، در این پژوهش کمانش لوله‌های کامپوزیت - فلز مورد بررسی قرار گرفته است. تحلیل کمانش پوسته‌های استوانه‌ای تحت اثر نیروی هیدرواستاتیکی در صورتی که دارای شرایط مرزی ساده باشند دارای حل تحلیلی می‌باشد اما باید توجه داشت که در نمونه‌های واقعی اتصالات دو طرف لوله‌ها هم نسبت به خمش و هم نسبت به بار پیچشی مقاومت نشان می‌دهند، بنابراین روش صحیح مدل سازی ابتدا و انتهای استوانه‌ها با صفحه‌های صلب می‌باشد، تا فقط نسبت به حرکات محوری آزاد باشند. برای تحلیل کمانش استوانه کامپوزیتی تحت فشار هیدرواستاتیکی با شرایط مرزی غیر از شرایط مرزی ساده، الگوریتم‌هایی وجود دارد، به طور مثال: در تحقیقی که توسط سابل^{۲۱} [۱۷] ارائه شد فشار بحرانی کمانش با حل معادلات غیرخطی با روش‌های محاسباتی بررسی شده است. اگرچه می‌توان از این روش در تحلیل کمانش لوله‌های کامپوزیت - فلز نیز بهره برد، اما این روش‌ها نیازمند محاسبات پیچیده کامپیوتری بوده و این موضوع باعث می‌شود که از کارآمدی این روش‌ها در طراحی لوله‌ها کاسته شود. در نتیجه در طراحی لوله‌های کامپوزیت - فلز به یک روش تحلیلی نیاز است که به شکل راحت‌تری بین پارامترهای مساله ارتباط برقرار کرده و سریعتر به حل مساله دست یافت.

در این تحقیق یک روش تحلیلی برای حل مساله کمانش استوانه کامپوزیت - فلز ارائه شده است که در آن از بسط سری فوریه و روش گالرکین استفاده شد. در این روش تغییر شکل جانبی دیواره استوانه به شکل مود اول ارتعاشی تیر با شرایط مرزی دوسرگیردار تخمین زده شده و جابجایی محوری دیواره استوانه نیز با مشتق سوم تابع تیر تخمین زده شد. این حل برای استوانه کامپوزیت - فلز با چیدمان‌های مختلف لایه‌های کامپوزیت و در نسبت‌های ابعادی مختلف مورد مطالعه قرار گرفته شده است. به منظور اطمینان از درستی روش استفاده شده، نتایج این روش با نتایج حاصل از تحلیل المان محدود که توسط دیگر محققین برای سازه‌های کامپوزیتی ارائه شده بود مقایسه شده و صحت و دقت نتایج بررسی شد.

۲- معادلات حاکم

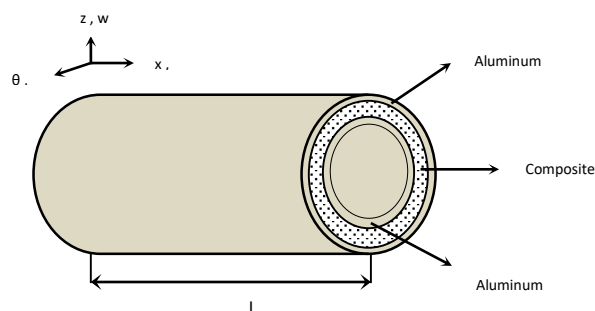
ساختار کلی استوانه هیبرید کامپوزیت - فلز مورد مطالعه در شکل ۱ نشان داده شده است. استوانه مورد بررسی از جنس کامپوزیت - فلز با طول L و شعاع میانگین R می‌باشد که مختصات محوری، شعاعی و زاویه‌ای آن به ترتیب با x و z و θ نشان داده شده است. ابتدا و انتهای استوانه $(x=0, L)$ با دیسک‌های صلب بسته شده و استوانه تحت فشار هیدرواستاتیکی بیرونی قرار گرفته است.

18. Z.R. Tahir

19. P. Mandal

20. H.G. Fan

21. L.H. Sobel



شکل (۱): استوانه کامپوزیت - فلز

معادلات کمانش استوانه تحت فشار خارجی به شکل زیر می باشد [۱۸].

$$N_{x,x} + N_{x\theta,\theta} = 0 \quad (۱-الف)$$

$$N_{x\theta,x} + N_{\theta,\theta} + \frac{1}{R}M_{x\theta,x} + \frac{1}{R}M_{\theta,\theta} = 0 \quad (۱-ب)$$

$$M_{x,xx} + 2M_{x\theta,x\theta} + M_{\theta,\theta\theta} - \frac{1}{R}N_{\theta} + N_x^0 w_{,xx} + N_{x\theta}^0 (2w_{,x\theta} - \frac{1}{R}v_{,x}) + N_{\theta}^0 (w_{,\theta\theta} - \frac{1}{R}v_{,\theta}) = 0 \quad (۱-ج)$$

نیروهای ناشی از فشار هیدرواستاتیک می باشند. در معادلات فوق نیروها و گشتاورها به شکل زیر محاسبه می شوند.

$$\{N_x, N_{\theta}, N_{x\theta}\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma_x, \sigma_{\theta}, \sigma_{x\theta}\} dz \quad (۲-الف)$$

$$\{M_x, M_{\theta}, M_{x\theta}\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma_x, \sigma_{\theta}, \sigma_{x\theta}\} z dz \quad (۲-ب)$$

ارتباط بین کرنش محوری ε_x ، جانبی ε_{θ} و برشی $\varepsilon_{x\theta}$ در هر نقطه دلخواه از پوسته استوانه‌ای با کرنش‌های سطح میانی ε_{x0} ،

$\varepsilon_{\theta0}$ و $\varepsilon_{x\theta0}$ و تغییر شکل‌های پیچشی سطح میانی k_x ، k_{θ} و $k_{x\theta}$ به شکل زیر تعریف می شود.

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x0} + zk_x \quad (۳-الف)$$

$$\varepsilon_{\theta} = \varepsilon_{\theta0} + zk_{\theta} \quad (۳-ب)$$

$$\varepsilon_{x\theta} = \gamma_{x\theta0} + zk_{x\theta} \quad (۳-ج)$$

که در آن Z فاصله شعاعی نقاط دلخواه سطح مقطع جداره استوانه از سطح میانی ضخامت پوسته می باشد.

رابطه بین کرنش‌های نقاط واقع در سطح میانی با جابجایی‌ها به شکل زیر محاسبه می شوند.

$$\varepsilon_{x0} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (۴-الف)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} \quad (4-ب)$$

$$\varepsilon_{x\theta\theta} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (4-ج)$$

که در آن R شعاع سطح میانی و u، v و w به ترتیب جابجایی در راستای محوری، زاویه‌ای و شعاعی می‌باشند. تغییر شکل پیچشی

سطح میانی نیز به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (5-الف)$$

$$k_\theta = -\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{R \partial \theta} \quad (5-ب)$$

$$k_{x\theta} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial v}{R \partial x} \quad (5-ج)$$

با قرار دادن معادله (3) در معادله (2) و با استفاده از قانون هوک رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{\theta0} \\ \varepsilon_{x\theta0} \\ k_x \\ k_\theta \\ k_{x\theta} \end{bmatrix} \quad (6)$$

که در آن مولفه‌های ماتریس‌های سفتی کششی، کوپل پیچش و خمش و سفتی خمشی برای سازه هیبرید کامپوزیت - فلز به ترتیب به شکل زیر بدست محاسبه می‌شوند:

$$A_{ij} = Q_{ij}^m h_m + \sum_{k=1}^N Q_{ij}^k (h_k - h_{k-1}) \quad (7-الف)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N Q_{ij}^k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (7-ب)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{12} Q_{ij}^m h_m^3 + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N Q_{ij}^k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad (7-ج)$$

که در آن h_m و Q_{ij}^m به ترتیب ضخامت لایه‌های فلز و مولفه‌های ماتریس سفتی فلز مورد استفاده می‌باشند.

ابتدا و انتهای استوانه با دو دیسک صلب بسته شده و فرض بر این است که دیسک‌ها بتوانند در راستای محور استوانه حرکت کنند. در نتیجه شرایط مرزی در ابتدا و انتهای استوانه به شکل زیر می‌باشد.

$$N_x = 0 \quad v = 0 \quad w = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

اگر فشار یکنواخت وارد شده از طرف سیال به اطراف استوانه به مقدار p باشد نیروی‌های وارد شده به بدنه استوانه به شکل زیر محاسبه می‌شوند.

$$N = pR$$

$$N_x^0 = -\frac{N}{2} \quad N_\theta^0 = -N \quad N_{x\theta}^0 = 0 \quad (11)$$

با قرار دادن معادله‌های (۱۱) و (۶) در معادله (۱)، معادلات کمانش استوانه کامپوزیت - فلز براساس جابجایی‌های w, v, u بدست می‌آید.

$$A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_{33} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + (A_{33} + A_{12}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{B_{12}}{R} \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (12-الف)$$

$$(A_{12} + A_{33}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} + (A_{33} + \frac{D_{33}}{R^2}) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (A_{22} + \frac{D_{22}}{R^2}) \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{A_{22}}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{D_{12} + 2D_{33}}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} - \frac{D_{22}}{R^2} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} = 0 \quad (12-ب)$$

$$\frac{A_{12}}{R} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{A_{22}}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{D_{22}}{R} \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} - \frac{D_{12} + 2D_{33}}{R} \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{A_{22}}{R^2} w + D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{33}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + N(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta}) = 0 \quad (12-ج)$$

با استفاده از معادله (۶) و (۳) می‌توان شرایط مرزی رابطه (۱۰) را به شکل زیر نوشت.

$$A_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + B_{12} (\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R}) = 0 \quad (13-الف)$$

$$v = 0 \quad w = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (13-ب)$$

با حل معادله (۱۲) که معادله مقدار مرزی همگن می‌باشد، فشار بحرانی کمانش بدست می‌آید.

۳- روش حل

متغیرهای w, v, u که تشکیل دهنده شکل کمانش پوسته استوانه‌ای هستند، با استفاده از روش فوریه به شکل تابعی دوره‌ای نسبت به مختصات θ به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند.

$$u(x, \theta) = u_n(x) \cos \lambda_n \theta \quad (14-الف)$$

$$v(x, \theta) = v_n(x) \sin \lambda_n \theta \quad (۱۴-ب)$$

$$w(x, \theta) = w_n(x) \cos \lambda_n \theta \quad (۱۴-ج)$$

در این معادله $\lambda_n = \frac{n}{R}$, $n = 2, 3, \dots$ شماره مود کمانش استوانه می‌باشد. با جایگذاری w, v, u از معادله (۱۴) در معادله (۱۲) یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی همگن به شکل زیر حاصل می‌شود.

$$A_{11} \frac{d^2 u_n}{dx^2} - A_{33} \lambda_n^2 u_n + (A_{33} + A_{12}) \lambda_n \frac{dv_n}{dx} + \frac{B_{12}}{R} \frac{dw_n}{dx} = 0 \quad (۱۵-الف)$$

$$-(A_{12} + A_{33}) \lambda_n \frac{du_n}{dx} + (A_{33} + \frac{D_{33}}{R^2}) \frac{d^2 v_n}{dx^2} - (A_{22} + \frac{D_{22}}{R^2}) \lambda_n^2 v_n - \frac{\lambda_n}{R} (A_{22} + \frac{D_{22}}{R} \lambda_n^2) + \frac{D_{12} + 2D_{33}}{R} \lambda_n \frac{d^2 w_n}{dx^2} = 0 \quad (۱۵-ب)$$

$$-\frac{A_{12}}{R} \frac{du_n}{dx} - \frac{\lambda_n}{R} (A_{22} + D_{22} \lambda_n^2) v_n + \frac{D_{12} + 2D_{33}}{R} \lambda_n \frac{d^2 v_n}{dx^2} - (\frac{A_{22}}{R^2} + D_{22} \lambda_n^4) w_n - D_{11} \frac{d^4 w_n}{dx^4} + 2(D_{12} + 2D_{33}) \lambda_n^2 \frac{d^2 w_n}{dx^2} - N_n (\frac{1}{2} \frac{d^2 w_n}{dx^2} - \lambda_n^2 w_n - \frac{\lambda_n}{R} v_n) = 0 \quad (۱۵-ج)$$

همچنین با قرار دادن رابطه (۱۴) در (۱۳)، شرایط مرزی به شکل زیر بدست می‌آیند.

$$A_{11} \frac{du_n}{dx} + B_{12} (\lambda_n v_n + \frac{w_n}{R}) = 0 \quad (۱۶)$$

$$v_n = 0 \quad w_n = 0 \quad \frac{dw_n}{dx} = 0$$

برای محاسبه جواب‌های غیر بدیهی دستگاه معادلات بیان شده در معادلات (۱۵) و (۱۶) از روش گالرکین استفاده شده است. پیاده سازی روش گالرکین به یک جواب تخمینی که شرایط مرزی را ارضاء کند نیاز دارد. در ابتدا و انتهای لوله کامپوزیت - فلز دیسک‌های صلب قرار داده شده و می‌توان آن‌ها را به عنوان تکیه گاه کاملاً گیردار در نظر گرفت. همچنین حداکثر تغییر شکل کمانش در وسط طول لوله اتفاق خواهد افتاد.

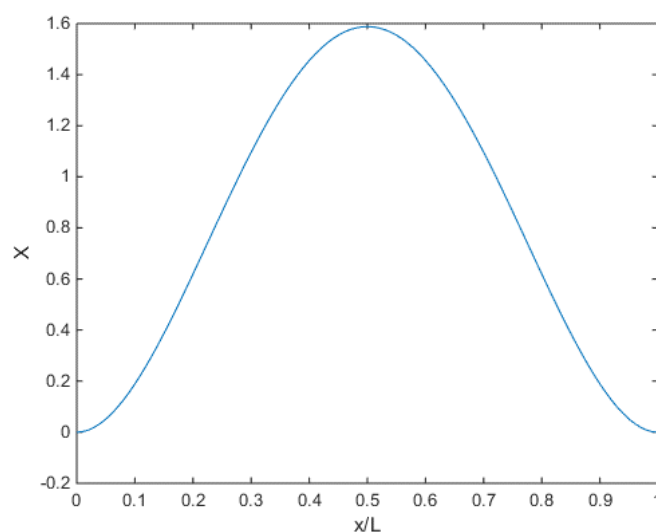
در نتیجه می‌توان معادله مود اول ارتعاشی تیر دوسر گیردار را به عنوان تخمین رفتار دیواره استوانه در نظر گرفت.

$$v_n(x) = V_n X(x) \quad w_n(x) = W_n X(x) \quad (۱۷)$$

$$X(x) = \cosh(\frac{\lambda x}{L}) - \cos(\frac{\lambda x}{L}) - \sigma \left[\sinh(\frac{\lambda x}{L}) - \sin(\frac{\lambda x}{L}) \right] \quad (۱۸)$$

که در آن V_n, W_n ضرایب مجهول و $X(x)$ تابع تیر دوسر گیردار می‌باشد [۱۹]. در شکل ۲ تابع $X(x)$ ترسیم شده است.

در معادله (۱۸)، $\lambda = 4.73004074$ و $\sigma = 0.98250$ می باشد.



شکل (۲): نمودار تابع X در راستای محور استوانه

همانطور که در شکل ۲ مشاهده می شود مقدار تابع X و مشتق آن در ابتدا و انتها صفر می باشند در نتیجه با قرار دادن معادله (۱۷) در (۱۶) رابطه زیر بدست می آید.

$$A_{11} \frac{du_n}{dx} + B_{12} \left(\lambda_n V_n + \frac{W_n}{R} \right) X = 0 \quad (19)$$

و با توجه به شرایط مرزی بیان شده در رابطه (۱۶) معادله زیر برقرار می شود:

$$\frac{du_n}{dx} = 0 \quad (20)$$

اکنون با توجه به اینکه جابجایی طولی در وسط راستای محوری استوانه صفر خواهد بود، می توان تابع $U_n(x)$ را با مشتق مرتبه سوم تابع تیر دو سر گیردار تخمین زد.

$$u_n(x) = U_n \frac{d^3 X}{dx^3} \quad (21)$$

در این مرحله براساس روش گالرکین و با قرار دادن روابط (۲۱) و (۱۷) در رابطه (۱۵) معادلات زیر حاصل می شوند:

$$R_x = (B_{11} \frac{\lambda^4}{l^4} \frac{dX}{dx} - B_{33} \lambda_n^2 \frac{d^3 X}{dx^3}) U_n + (B_{12} + B_{33}) \lambda_n \frac{dX}{dx} V_n + \frac{B_{12}}{R} \frac{dX}{dx} W_n \quad (22-f)$$

$$R_\theta = -(B_{12} + B_{33})\lambda_n \frac{\lambda_n^4}{l^4} XU_n + \left[(B_{33} + \frac{D_{33}}{R^2}) \frac{d^2 X}{dx^2} - (B_{22} + \frac{D_{22}}{R^2}) \lambda_n^2 X \right] V_n - \frac{\lambda_n}{R} \left[(B_{22} + D_{22} \lambda_n^2) X - (D_{12} + 2D_{33}) \frac{d^2 X}{dx^2} \right] W_n \quad (22-ب)$$

$$R_z = -\frac{B_{12}}{R} \frac{\lambda_n^4}{l^4} XU_n - \frac{\lambda_n}{R} \left[(B_{22} + D_{22} \lambda_n^2) X - (D_{12} + 2D_{33}) \frac{d^2 X}{dx^2} \right] V_n - \left[(D_{11} \frac{\lambda_n^4}{l^4} + D_{22} \lambda_n^4 + \frac{B_{22}}{R^2}) X - 2(D_{12} + 2D_{33}) \lambda_n^2 \frac{d^2 X}{dx^2} \right] W_n - N_n \left[\left(\frac{1}{2} \frac{d^2 X}{dx^2} - \lambda_n^2 X \right) W_n - \frac{\lambda_n}{R} X V_n \right] \quad (22-ج)$$

حالت تعامد توابع خطای موجود در معادله (22) با توابع تخمین زده شده به شکل زیر نشان داده می شوند:

$$\int_0^l R_x \frac{d^3 X}{dx^3} dx = 0 \quad \int_0^l R_\theta X dx = 0 \quad \int_0^l R_z X dx = 0 \quad (23)$$

با قرار دادن معادلات (22) در روابط (23) دستگاه معادلات زیر بدست می آید:

$$(B_{11} \frac{\lambda_n^4}{l^4} K - B_{33} \lambda_n^2 L) U_n + (B_{12} + B_{33}) \lambda_n K V_n + \frac{B_{12}}{R} K W_n = 0 \quad (24-الف)$$

$$-(B_{12} + B_{33}) \lambda_n \frac{\lambda_n^4}{l^4} I U_n + \left[(B_{33} + \frac{D_{33}}{R^2}) J - (B_{22} + \frac{D_{22}}{R^2}) \lambda_n^2 I \right] V_n - \frac{\lambda_n}{R} \left[(B_{22} + D_{22} \lambda_n^2) I - (D_{12} + 2D_{33}) J \right] W_n = 0 \quad (24-ب)$$

$$-\frac{B_{12}}{R} \frac{\lambda_n^4}{l^4} I U_n - \frac{\lambda_n}{R} \left[(B_{22} + D_{22} \lambda_n^2) I - (D_{12} + 2D_{33}) J \right] V_n - \left[(D_{11} \frac{\lambda_n^4}{l^4} + D_{22} \lambda_n^4 + \frac{B_{22}}{R^2}) I - 2(D_{12} + 2D_{33}) \lambda_n^2 J \right] W_n - N_n \left[\left(\frac{1}{2} J - \lambda_n^2 I \right) W_n - \frac{\lambda_n}{R} I V_n \right] = 0 \quad (24-ج)$$

که در آن:

$$I = \int_0^l X^2 dx \quad J = \int_0^l X \frac{d^2 X}{dx^2} dx \quad K = \int_0^l \frac{dX}{dx} \frac{d^3 X}{dx^3} dx \quad (25)$$

$$L = \int_0^l \left(\frac{d^3 X}{dx^3} \right)^2 dx$$

حاصل انتگرال‌های فوق به شکل زیر است [۱۸].

$$I = l \quad J = -\frac{\xi}{l} \quad K = -\frac{\lambda^4}{l^3} \quad L = \frac{\lambda^4}{l^5} \zeta \quad (26)$$

$$\xi = \sigma\lambda(\sigma\lambda - 2) \quad \zeta = \sigma\lambda(\sigma\lambda + 6)$$

پس روابط معادله (۲۴) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$a_{11}U_n + a_{12}V_n + a_{13}W_n = 0 \quad (27\text{-الف})$$

$$a_{21}U_n + a_{22}V_n + a_{23}W_n = 0 \quad (27\text{-ب})$$

$$a_{31}U_n + (a_{32} - N_n b_{32})V_n + (a_{33} - N_n b_{33})W_n = 0 \quad (27\text{-ج})$$

که در آن:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\lambda^4}{l^4} (B_{11} \frac{\lambda^4}{l^4} + B_{33} \lambda_n^2 \frac{\xi}{l^2}) & a_{12} = a_{21} &= (B_{12} + B_{33}) \lambda_n \frac{\lambda^4}{l^4} \\ a_{13} = a_{31} &= \frac{B_{12} \lambda^4}{R l^4} & a_{22} &= (B_{33} + \frac{D_{33}}{R^2}) \frac{\xi}{l^2} + (B_{22} + \frac{D_{22}}{R^2}) \lambda_n^2 \\ a_{23} = a_{32} &= \frac{\lambda_n}{R} \left[B_{22} + D_{22} \lambda_n^2 + (D_{12} + 2D_{33}) \frac{\xi}{l^2} \right] & & (27) \\ a_{33} &= D_{11} \frac{\lambda^4}{l^4} + D_{22} \lambda_n^4 + \frac{B_{22}}{R^2} + 2(D_{12} + 2D_{33}) \lambda_n^2 \frac{\xi}{l^2} \\ b_{32} &= \frac{\lambda_n}{R} & b_{33} &= \frac{1}{2} \frac{\xi}{l^2} + \lambda_n^2 \end{aligned}$$

دستگاه معادلات (۲۷) در صورتی جواب غیر بدیهی دارد که دترمینان ضرایب آن برابر صفر باشد و در صورتی که دترمینان ضرایب برابر صفر قرار داده شود، نیروی بحرانی کمانش به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$N_n = \frac{a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2}{b_{32}(a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}) + b_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)} \quad (28)$$

به ازای هر N_n محاسبه شده از رابطه (۲۸) با استفاده از رابطه (۱۱) یک فشار کمانش محاسبه می‌شود، که از میان آن‌ها کوچکترین مقدار محاسبه شده برای فشار کمانش همان فشار بحرانی کمانش خواهد بود. بنابراین فشار بحرانی کمانش استوانه فلز - کامپوزیت مورد نظر با محاسبات کامپیوتری اندکی محاسبه می‌شود.

۴- نتایج عددی و بحث و بررسی

در این قسمت نتایج حاصل از حل مساله کمانش در استوانه کامپوزیت - فلز با استفاده از روش ارائه شده برای استوانه‌هایی از جنس‌های مختلف، چیدمان‌های مختلف و نسبت‌های ابعادی مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۴-۱- مقایسه نتایج بدست آمده از روش ارائه شده با تحیل المان محدود

به منظور اطمینان از درستی جواب‌های حاصل از روش ارائه شده، مساله کمانش یک استوانه با ساختار همگن و یک استوانه از جنس کامپوزیت تک جهت به شعاع ۰/۵ متر و طول‌های ۱ و ۲ و ۳ متر که خواص مکانیکی آن‌ها در جدول ۱ نشان داده شده‌است، به روش فوق بررسی شده و جواب‌های بدست آمده با جواب‌های حاصل از روش المان محدود [۲۰] مقایسه شده‌است.

جدول (۱): خواص مکانیکی ماده کامپوزیت و فلز [۲۰]

جنس ماده	$E_x (GPa)$	$E_\theta (GPa)$	$G_{x\theta} (GPa)$	$\nu_{x\theta}$	$\nu_{\theta x}$
۱	۵۴/۵۵	۵۴/۵۵	۲۰/۶۷	۰/۳۲	۰/۳۲
۲	۱۸	۵۰	۷	۰/۱۴	۰/۰۵

جدول (۲): مقایسه فشار بحرانی کمانش (کیلو پاسکال) از روش جدید و روش المان محدود

ماده (۱)			ماده (۲)			
طول استوانه (متر)	حل جدید	حل المان محدود [۲۰]	درصد اختلاف	حل جدید	حل المان محدود [۲۰]	درصد اختلاف
۱	۱۹۲۲	۲۰۰۳	٪۴	۱۰۷۰	۱۱۱۹	٪۴/۳
۲	۹۹۴	۱۰۲۷	٪۳/۲	۶۲۰	۶۲۸	٪۱/۳
۳	۷۵۴	۷۲۴	٪۴	۴۲۶	۴۲۲	٪۰/۹

همانطور که در جدول ۲ مشاهده می‌شود اختلاف جواب‌های بدست آمده از روش ارائه شده و حل المان محدود [۱۹] کمتر از ۵٪ بوده و اختلاف چشمگیری بین جواب‌های حاصل از این دو روش مشاهده نمی‌شود.

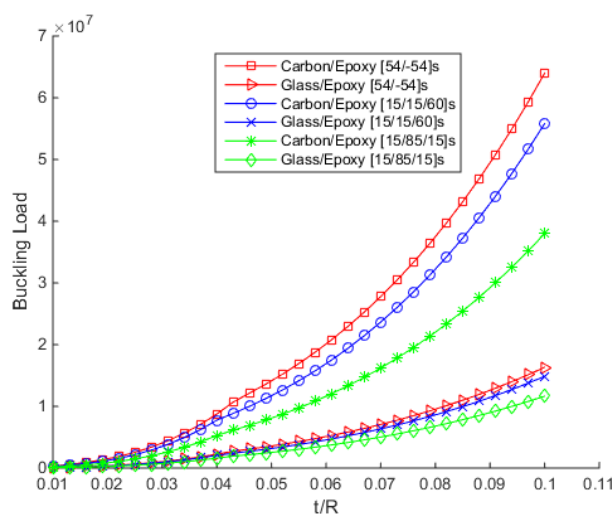
۴-۲- اثر ضخامت لوله بر فشار بحرانی کمانش

برای مطالعه اثر ضخامت لوله بر میزان فشار بحرانی کمانش، استوانه‌هایی از جنس‌های کربن - اپوکسی و شیشه - اپوکسی که خواص مکانیکی آن‌ها در جدول ۳ آورده شده با چیدمان‌های $[54_m / -54_m]_s$ ، $[15_p / 15_p / 60_p]_s$ و $[15_q / 85_q / 15_q]_s$ به طول ۱ متر و شعاع ۱۰ سانتیمتر با ضخامت‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفته و حاصل این بررسی‌ها در شکل ۳ ارائه شده‌است. ضرایب m ، p و q

تعداد لایه‌ها در هر جهت است، با توجه به اینکه ضخامت هر لایه ۰/۲ میلی‌متر در نظر گرفته شده‌است، با تغییر تعداد لایه‌ها، ضخامت پوسته استوانه مورد نظر تغییر می‌کند.

جدول (۳): خواص مکانیکی کربن - اپوکسی و شیشه - اپوکسی

جنس ماده	$E_1 (GPa)$	$E_2 (GPa)$	$E_{12} (GPa)$	ν_{12}	ν_{21}
کربن-اپوکسی	۱۸۱	۱۰/۳	۷/۱۷	۰/۰۱۶	۰/۲۸
شیشه اپوکسی	۳۸/۶	۸/۲۷	۴/۱۴	۰/۰۵۶	۰/۲۶

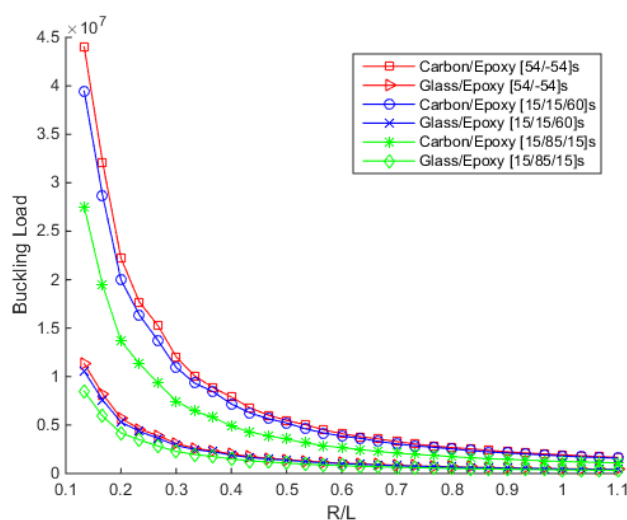


شکل (۳): تغییرات بار بحرانی کمانش نسبت به ضخامت پوسته استوانه

همانطور که در شکل ۳ مشاهده می‌شود، اگرچه در همه نمونه‌های مورد بررسی، افزایش ضخامت باعث افزایش فشار بحرانی کمانش می‌شود اما استوانه‌های کربن - اپوکسی حساسیت بیشتری نسبت به افزایش ضخامت دارند. به عبارت دیگر میزان فشار بحرانی کمانش در لوله‌های شیشه - اپوکسی با تغییر ضخامت، تغییر کمتری خواهد داشت.

۳-۴- اثر شعاع لوله بر بار بحرانی کمانش

چون در این قسمت هدف اصلی بررسی تاثیر نسبت شعاع لوله به طول آن بر بار بحرانی کمانش می‌باشد لوله‌هایی با ضخامت ثابت ۰/۰۱ متر و طول ۱ متر با شعاع‌های مختلف و از جنس کربن - اپوکسی و شیشه - اپوکسی با سه نوع چیدمان متفاوت مورد بررسی قرار گرفته‌است که نتایج این بررسی‌ها در شکل ۴ نشان داده شده‌است.

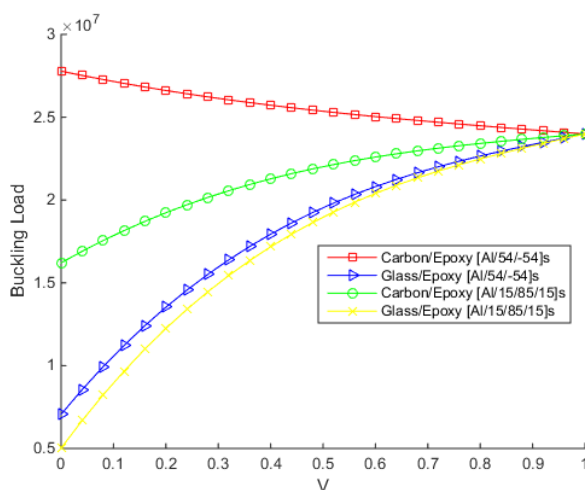


شکل (۴): تغییرات بار بحرانی کمانش نسبت به تغییر شعاع استوانه

همانطور که در شکل ۴ مشخص است افزایش قطر لوله باعث افت شدید در بار بحرانی کمانش پوسته شده و در نتیجه لوله‌های با قطرهای بیشتر، مقاومت کمتری نسبت به کمانش دیواره خواهند داشت. همچنین مشاهده می‌شود که همواره لوله‌های کربن - اپوکسی مقاومت بیشتری نسبت به کمانش خواهند داشت و از نظر چیدمان نیز بهترین حالت برای مقاومت به کمانش چیدمان $[54_m / -54_m]_s$ می‌باشد.

۴-۴- اثر درصد حجمی فلز در مقاومت نسبت به کمانش

در این قسمت استوانه‌هایی با ساختار هیبرید کامپوزیت - فلز از جنس کربن - اپوکسی و شیشه - اپوکسی به همراه لایه‌های آلومینیوم با چیدمان‌های $[Al/54_m / -54_m]_s$ و $[Al/15_q / 85_q / 15_q]_s$ به طول ۱ متر، شعاع ۰/۱ متر و ضخامت ۷ میلی متر مورد بررسی قرار گرفت. در هر مرحله درصد حجمی آلومینیوم تغییر داده شده و نتایج حاصل در شکل ۵ نشان داده شده است.



شکل (۵): تاثیر درصد حجمی فلز بر مقاومت به کمانش

همانطور که در شکل ۵ مشاهده می‌شود در بیشتر مواقع با افزایش میزان درصد حجمی آلومینیوم، بار بحرانی کمایش افزایش می‌یابد و لوله مورد نظر مقاومت بیشتری در مقابل کمایش پیدا می‌کند اما تنها در کرال (CRALL) با چیدمان $[Al/54_m/-54_m]_s$ ، با افزایش درصد آلومینیوم از میزان مقاومت به کمایش کاسته می‌شود.

۵- نتیجه گیری

در این پژوهش، حلی تحلیلی برای کمایش استوانه کامپوزیت - فلز که در ابتدا و انتها توسط دو دیسک صلب بسته شده‌است و تحت تاثیر فشار هیدرواستاتیکی قرار دارد ارائه شده‌است. جابجایی‌های شعاعی دیواره استوانه مورد نظر با استفاده از معادله مود اول ارتعاشی تیر دوسر گیردار تخمین زده شده و با استفاده از بسط سری فوریه و روش گالرکین فشار بحرانی کمایش محاسبه شده‌است. با استفاده از معادلات به کار گرفته شده در این پژوهش، می‌توان فشار بحرانی کمایش در لوله‌های کامپوزیت - فلز تحت تاثیر فشار هیدرو استاتیکی در ابعاد و با خواص مکانیکی مختلف را محاسبه کرد. از بررسی نتایج نمونه‌های عددی حل شده می‌توان به نتایج زیر اشاره کرد:

- با استفاده از روش ارائه شده می‌توان با تغییر چیدمان زاویه الیاف و تغییر درصد حجمی فلز استفاده شده در تولید لوله‌های کامپوزیت فلز، به طراحی لوله‌هایی با مقاومت بهینه نسبت به کمایش دست پیدا کرد.

- نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که چیدمان $[54/-54]_s$ یکی از مقاوم‌ترین چیدمان‌ها نسبت به کمایش است. در نتیجه می‌توان از این نوع چیدمان در تولید مخازن تحت فشار هیدرواستاتیک و یا لوله‌های انتقال سیالات از زیر آب استفاده کرد.

- همچنین مشاهده می‌شود که در بیشتر مواقع افزایش میزان درصد حجمی آلومینیوم باعث افزایش چشمگیری در فشار بحرانی کمایش می‌شود اما در استوانه کرال (CRALL) با چیدمان $[Al/54_m/-54_m]_s$ ، با افزایش درصد آلومینیوم از میزان مقاومت به کمایش کاسته می‌شود. در نتیجه استفاده از لایه آلومینیومی در تولید مخازن و لوله‌های تحت فشار هیدرو استاتیک در بیشتر مواقع می‌تواند تقویت کننده مناسبی به حساب بیاید.

- مقاومت به کمایش استوانه‌های کامپوزیتی از جنس کربن/اپوکسی نسبت به تغییر ضخامت حساس تر از کامپوزیت های دیگر می‌باشد.

- روش ارائه شده علاوه بر دقت و صحت در نتایج، همچنین نسبت به روش‌های قبلی بسیار ساده‌تر بوده و به محاسبات کامپیوتری کمتری نیاز دارد، در نتیجه می‌تواند کاربرد بهتری در طراحی لوله‌های فلزی، کامپوزیتی و هیبرید کامپوزیت - فلز داشته باشد.

۶- مراجع

- [1] T. Sinmazçelik, E. Avcu, M. Özgür Bora, O. Çoban, A review: Fibre metal laminates, background, bonding types and applied test methods, *Material and. Design*, 32 (2011) 3671-3685.
- [2] J.G. Carrillo, W.J. Cantwell, Scaling effects in the tensile behavior of fiber-metal laminates, *Composite Science and Technology*, 67 (2007) 1684-1693.
- [3] A. Vlot, R. Alderliesten, P. Hooijmeijer, J. de Kanter, J. Sinke, M. Ypma, Fibre metal laminates: a state of the art, *International Journal of Materials and Product Technology*, 17 (2002) 79-98.
- [4] S.P. Timoshenko, J.M. Gere, *Theory of elastic stability*, 2nd edition, New York, McGraw-Hill, 1963.
- [5] N.A. Alfutov, *Stability of elastic structures*, Berlin, Springer Verlag, 2010.
- [6] R.M. Jones, *Buckling of bars, plates and shell*, Blacksburg, Virginia, Bull Ridge Publishing, 2006.
- [7] V. Carvelli, N. Panzeri, C. Poggi, Buckling strength of GFRP under-water vehicles, *Composite Part B*, (2001) 89-101.
- [8] T. Messenger, M. Pyrz, B. Gineste, P. Chauchot, Optimal laminations of thin underwater composite cylindrical vessels, *Composite Structure*, 58 (2002) 529-37.

- [9] S.H. Hur, H.J. Son, J.H. Kweon, J.H. Choi, Postbuckling of composite cylinders under external hydrostatic pressure, *Composite Structure*, 86 (2008) 114–24.
- [10] H. Hernandez-Moreno, B. Douchin, F. Collombet, D. Choqueuse, P. Davies, Influence of winding pattern on the mechanical behavior of filament wound composite cylinders under external pressure, *Composite Science and Technology*, 68 (2008) 1015–24.
- [11] C.J. Moon, I.H. Kim, B.H. Choi, J.H. Kweon, J.H. Choi, Buckling of filament-wound composite cylinders subjected to hydrostatic pressure for underwater vehicle applications, *Composite Structure*, 92 (2010) 2241–51.
- [12] Z.M. Li, P. Qiao, Buckling and postbuckling of anisotropic laminated cylindrical shells under combined external pressure and axial compression in thermal environments, *Composite Structure*, 119 (2015) 709–26.
- [13] A.V. Lopatin, E.V. Morozov, Buckling of a composite cantilever circular cylindrical shell subjected to uniform external lateral pressure, *Composite Structure*, 94 (2012) 553–62.
- [14] A.V. Lopatin, E.V. Morozov, Buckling of the composite sandwich cylindrical shell with clamped ends under uniform external pressure, *Composite Structure*, 122 (2015) 209–16.
- [15] Z.R. Tahir, P. Mandal, A new perturbation technique in numerical study on buckling of composite shells under axial compression, *World Academy of Science Engineering and Technology*, 70 (2012) 10-27.
- [16] H.G. Fan, Z.P. Chen, W.Z. Feng, F. Zhou, X.L. Shen, G.W. Cao, Buckling of axial compressed cylindrical shells with stepwise variable thickness, *Structural Engineering Mechanics*, 54(1) (2015) 87-103.
- [17] L.H. Sobel, Effects of boundary conditions on the stability of cylinders subject to lateral axial pressures, *AIAA Journal*, 2 (1964) 1437–40.
- [18] V.V. Vasiliev, *Mechanics of composite structures*. Washington DC, Taylor & Francis, 1993.
- [19] R.D. Blevins, *Formulas for natural frequency and mode shape*, Malabar FL, Krieger Publishing Company, 2001.
- [20] A.V. Lopatin, E.V. Morozov, Buckling of composite cylindrical shells with rigid end disks under hydrostatic pressure, *Composite Structure*, 173 (2017) 136–143.