Journal of Structural and Construction Engineering, 8(Special Issue 1), 2021, pp. 493-506

Journal of Structural and Construction Engineering

www.jsce.ir

The effect of crack on buckling behaviour of weakened column

S.E. Alavinasab[1], S.H. Dehghan Manshadi[2]*, H.R. Amiri[2]

1- M.S. Student, Department of Civil Engineering, Yazd Branch, Islamic Azad University, Yazd, Iran
2 -Assistant professor, Department of Civil Engineering, Yazd Branch, Islamic Azad University, Yazd, Iran

ABSTRACT

This research deals with the buckling analysis of cracked column with fixed-fixed conditions. The crack is modelled with a unilateral elastic bending-stiffness behaviour, represented by a unilateral rotational spring. This model takes into account the crack closure effect on buckling behaviour of column. The governing equation of the problem is introduced by the variational approach based on energy arguments. Using the variational approach, the governing equation can be formulated as a function of damage index. Damage index is the stiffness of the equivalent rotational spring associated with the crack. A one-crack and a tow-crack are theoretically investigated to illustrate the effects of the crack on the buckling load. For the one crack column, the buckling load increases with the stiffness of the crack section. When the crack-stiffness parameter tends towards an infinite value, the structural model is reduced to the classical Euler column. It is observed that the buckling load increases as the crack get closer to the supports, for constant damage value of the crack parameter (constant crack depth). For the two crack column, the crack closure phenomenon is investigated. In order to two cases are considered. In the first case, the two-crack are located on the same side of column, and in the second case, the cracks are located on the opposite side of the columns. Comparison between two cases show that the crack closure influence on the buckling load. In other words the crack-closure phenomenon tends to increase the buckling load.

ARTICLE INFO

Receive Date: 10 November 2019
Revise Date: 25 February 2020
Accept Date: 26 April 2020

Keywords:
Stability
Cracked column
Buckling
Crack-closure phenomenon
Energy method

doi: https://dx.doi.org/10.22065/jsce.2020.208226.1998

*Corresponding author: Hadi Dehghan Manshadi
Email address: h.d.manshadi@iauyazd.ac.ir

Journal of Structural and Construction Engineering
JSCE
نشریه علمی-پژوهشی مهندسی سازه و ساخت

نشریه مهندسی سازه و ساخت
(علمی - پژوهشی)
www.jsce.ir

ISSE
انجمن مهندسی سازه ایران

تاثیر ترک روی رفتار کمانشی ستون ضعیف شده

عماد علوی نسب [۱]، هادی دهقان منشادی [۲*]، حمیدرضا امیری [۲]

۱- دانش آموخته کارشناسی ارشد سازه، گروه مهندسی عمران، دانشگاه آزاد اسلامی واحد یزد، یزد، ایران
۲- استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشگاه آزاد اسلامی واحد یزد، یزد، ایران

چکیده

این مقاله کمانش ستونی ترک خورده را به صورت تحلیلی مورد بررسی قرار می‌دهد. به منظور یافتن معادله‌ی حاکم بر مساله از فرم تغییراتی انرژی پتانسیل ستون استفاده می‌شود. ترک بر اساس رفتار سختی خمشی الاستیک یک طرفه با استفاده از فنر پیچشی یک طرفه مدل سازی شده است. مدل سازی بدین طریق قادر می‌باشد تا اثرات باز و بسته شدن ترک بر اساس علامت لنگر خمشی (تنفس ترک) روی رفتار کمانشی ستون را در نظر بگیرد. مدل رفتاری یک طرفه‌ی ترک بر اساس تئوری‌های مکانیک شکست و مبتنی بر انرژی کرنشی می‌باشد. به منظور بررسی تحلیلی اثرات یک طرفه‌ی ترک که متناظر با باز و بسته شدن ترک می‌باشد، ستونی دو سر گیردار با یک و دو ترک در نظر گرفته می‌شود. به منظور صحت سنجی روابط تحلیلی به دست آمده از نرم افزار المان محدود آباکوس بهره گرفته شد. نتایج حاصل از تحلیل بیانگر آن است که در حالت یک ترکه مدل رفتاری یک طرفه‌ی ترک، بار کمانشی ستون مشابه با فرض باز بودن ترک بوده که در اکثر پژوهش‌های قبلی در نظر گرفته شده است. در چنین حالتی، بار کمانشی ستون با افزایش پارامتر سختی ترک به سمت بارکمانشی ستون دو سرگیردار ایده آل میل می‌کند. از سوی دیگر با نزدیک شدن ترک به تکیه گاه‌ها به ازای پارامتر سختی ترک ثابت (ثابت بودن عمل ترک)، بار کمانشی افزایش می‌یابد. به طوری‌که با فرض خسارت شدید و مفصل شدن محل ترک مقدار پارامتر بی بعد بار کمانش (λ) از ۳/۱۴ به ۴/۵ افزایش می‌یابد. اما در حالت دو ترکه نتایج حاصل از رفتار یک طرفه‌ی ترک متفاوت با فرض باز بودن ترک در لنگرهای خمشی مثبت و منفی می‌باشد. در حالت دو ترکه موقعیت قرارگیری ترک‌ها بسته به این که هر دو روی یک وجه و یا روی دو وجه مخالف ستون قرار گرفته باشند، مورد بررسی قرار می‌گیرند. نتایج حاصل از تحلیل ستون دو ترکه نشان دهنده ی آن است که پدیده ی بسته شدن ترک روی بار کمانشی ستون تاثیر گذار بوده و افزایش بار کمانش را سبب خواهد شد. به طوری‌که با فرض خسارت شدید (عمق ترک زیاد)، بسته شدن ترک افزایش ۲۱ درصدی بار کمانشی را در مقایسه با فرض باز بودن ترک، سبب خواهد شد.

کلمات کلیدی: پایداری، ستون ترک خورده، کمانش، پدیده بسته شدن ترک، رفتار یک طرفه ترک، روش انرژی

سابقه مقاله:					شناسه دیجیتال:	
دریافت	بازنگری	پذیرش	انتشار آنلاین	چاپ	doi:	https://dx.doi.org/10.22065/jsce.2020.208226.1998
۱۳۹۸/۰۸/۱۹	۱۳۹۸/۱۲/۰۶	۱۳۹۹/۰۲/۰۷	۱۳۹۹/۰۲/۰۷	۱۴۰۰/۰۳/۳۰		10.22065/jsce.2020.208226.1998

*نویسنده مسئول: هادی دهقان منشادی
پست الکترونیکی: h.d.manshadi@iauyazd.ac.ir

۱- مقدمه

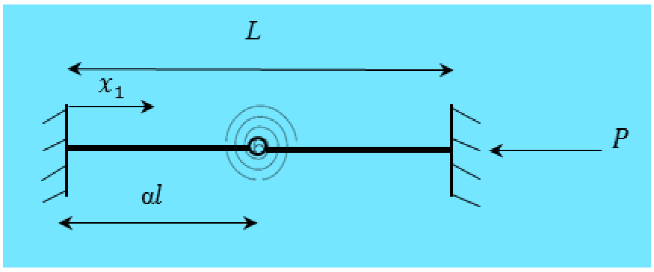
رفتار استاتیکی و دینامیکی تیرها و ستون‌های تک خورده نسبت به وجود ترک بسیار حساس می‌باشد. چنین نقایصی ممکن است خرابی‌های غیر منتظره‌ای را سبب شوند. از اینرو در سال‌های اخیر توسعه و معرفی مدل‌هایی جهت شناسایی رفتار کمانشی سازه‌های ترک خورده مورد توجه پژوهشگران زیادی بوده است و در این راستا تحقیقات گسترده ای صورت گرفته است. یکی از بهترین روش‌های موجود به منظور کاهش سختی موضعی در تیرها و ستون‌های ترک خورده استفاده از فنر پیچشی می‌باشد. به طوری‌که سختی این فنر مرتبط با شدت خسارت می‌باشد. سختی این فنرپیچشی با فرض قرار گرفتن ترک روی یک لبه‌ی تیر توسط اکامورا و همکاران در سال ۱۹۶۹ ارائه شده است [۱]. نتایج حاصل از این پژوهش نشان داد که سختی محل ترک خورده تابعی از عمق ترک و ارتفاع مقطع می‌باشد. معرفی سختی خمشی محل ترک بر حسب عمق ترک در پژوهش‌های زیادی انجام شده است [۳-۲]. پژوهش های انجام شده در گذشته مبتنی بر فرض باز بودن ترک در لنگرهای مثبت و منفی می‌باشد. بیوندی و کادمی در سال‌های ۲۰۰۵ و ۲۰۰۷ با همین فرض به بررسی حل تحلیلی تیر اویلر-برنولی در حالت استاتیکی پرداختند [۵-۴]. این فرض نیز اکثرا در پژوهش‌های مرتبط با ارتعاش تیر- ستون‌های ترک خورده نیز به کار گرفته شده است [۸-۵ و ۲]. فرض رفتار مشابه ترک در لنگرهای مثبت و منفی نیز در مسائل مربوط به کمانش نیز به کار گرفته شد. انیفنتیس و دیمارگوناس رفتار کمانشی ستون‌های ترک خورده تحت اثر بار مماسی و قائم را مورد مطالعه قرار دادند [۹]. در سال ۲۰۰۳ حل دقیق و تحلیلی بار کمانشی ستونی غیر منشوری با تعداد ترکهای دلخواه تحت اثر بار محوری متمرکز و گسترده توسط لی ارائه شد [۱۰]. کادمی و همکاران به تحلیل پایداری استاتیکی ستون تیموشینکو با ترک‌های متعدد، تحت بارهای فشاری و کمانشی پرداختند[۱۱]. کالامل و همکاران در پژوهشی اثر وجود ترک و اغتشاشات طولی در اثر جابجا شدن تکیه گاه میانی را بر رفتار کمانشی ستون دو دهانه مورد بررسی قرار دادند[۱۲]. نتایج حاصل از مطالعات کالامل نشان داد که وجود ترک به همراه جابجا شدن تکیه گاه میانی تاثیرات زیادی روی شکل مود کمانش و ارتعاش دارد. به طوری که این پدیده با عنوان لوکالیزیشن شناخته می‌شود. دهقانی و همکاران اثر پدیده‌ی لوکالیزیشن روی ستون دو دهانه با شرایط تکیه گاهی الاستیک را مورد مطالعه قرار دادند. نتایج حاصل از این پژوهش نشان داده که شدت پدیده لوکالیزیشن ارتباط مستقیمی با سختی شرایط تکیه گاهی دارد [۱۳]. ژو وهانگ اثر بار محوری فشاری روی ویژگی بسته شدن ترک را مورد بررسی قرار دادند. تحقیقات آنها رابطه‌ی بین ظرفیت باربری ستون و عمق ترک و لاغر بودن ستون را نشان داد [۱۴]. استفاده از مدل ترک باز سبب خواهد شد تا نتایج به دلیل بسته بودن تعدادی از ترک ها (با توجه به علامت لنگر) غیر واقعی و محافظه کارانه باشد. با توجه به این که رفتار ترک ذاتا یک طرفه است، لذا اثرات بسته شدن ترک به طور خاص باید روی پایداری سازه‌های ترک خورده مورد بررسی قرار گیرد. بدین منظور مدل‌های ریاضی مختلفی شامل (۱) مدل ترک سوئیچینگ (که ترک را کاملاً باز یا کاملاً بسته درنظر می‌گیرد) و (۲) مدل ترک خوردگی تنفس، که در آن یک انتقال بین شرایط باز و بسته وجود دارد، ارائه شده است [۱۵]. در سال‌های اخیر، پژوهش‌های زیادی اثر باز و بسته شدن ترک روی رفتار دینامیکی سازه‌ی ترک خورده را مورد بررسی قرار داده اند. کادمی و همکاران در سال ۲۰۱۱ مدل ترک سوئیچینگ را به منظور تحلیل دینامیکی تیر اویلر-برنولی به کار گرفتند [۱۶]. آریایی و همکاران در سال ۲۰۰۹ با استفاده از مدل ترک خوردگی تنفس به بررسی رفتار دینامیکی تیر اویلر-برنولی پرداختند [۱۷]. در اندک پژوهش‌های مرتبط با کمانش سیریکولو و پالمری تیر اولر-برنولی با تعداد ترک دلخواه تحت بار محوری و جانبی به صورت همزمان را مورد مطالعه قرار دادند. به منظور مدل ریاضیاتی ترک دو طرفه از تابع دلتای دیراک با تغییر متغیر مناسب بهره گرفته شد به طوری که امکان مدل سازی هر دو ترک باز و یا ترک بسته از طریق علامت کرنش محوری مرکز ترک وجود دارد [۱۸]. همان‌گونه که بیان شد اکثر پژوهش های انجام شده‌ی مرتبط با رفتار کمانشی تیر- ستون‌های ترک خورده مبتنی بر فرض باز بودن ترک در لنگرهای مثبت و منفی می‌باشد و اثرات یک طرفه‌ی ترک روی رفتار کمانشی سازه‌ی ترک خورده، به طور خاص مورد بررسی قرار نگرفته است. از اینرو این پژوهش قصد دارد رفتار یک طرفه‌ی ترک (اثرات باز و بسته شدن ترک) روی رفتار کمانشی ستون یک و دو ترکه را مورد بررسی قرار دهد. قابل توجه است که فرض می‌شود، ستون از قبل ترک خورده می‌باشد و اثرات مربوط به این ترک تنها در محدوده‌ی پایداری ارتجاعی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. ساختار مقاله‌ی حاضر به صورت زیر می‌باشد: در بخش ۲، معادلات حاکم بر مساله با استفاده ازاصل حساب تغییرات و با تاکید بر مفهوم انرژی به دست می‌آیند. در این بخش پارامتر سختی ترک بر اساس رفتار یک طرفه‌ی ترک مبتنی بر روابط ارائه شده در مکانیک شکست معرفی می‌شود.

بخش ۳ به بررسی رفتار کمانشی ستون یک ترکه و همچنین کنترل درستی روابط تحلیلی به دست آمده از طریق مدل سازی ستونی ترک خورده در نرم افزار اجزای محدود آباکوس اختصاص دارد. بارکمانشی ستون دو ترکه و اثرات باز و بسته شدن ترک ها در بخش۴ مورد بررسی قرار می گیرد. در انتها نیز به نتایج حاصل از این پژوهش اشاره می‌شود.

۲- معادله حاکم

ستون ترک خورده ای به طول L و صلبیت خمش EI، تحت نیروی محوری فشاری P مطابق شکل ۱ در نظر گرفته می‌شود.

به منظور مدل سازی ترک از فنری پیچشی به فاصله αL از تکیه گاه استفاده می‌شود . α پارامتری مثبت و بی بعد بوده به طوری که نمایانگر موقعیت ترک می‌باشد($\alpha \in [0,1]$)



شکل ۱: مدل سازه ای: ستون با یک ترک

برای چنین حالتی انرژی پتانسیل کل ذخیره شده در ستون به صورت زیر قابل بیان است.

$$U=\frac{1}{2}\int_0^{\alpha l} EI(w_1'')^2\,dx+\frac{1}{2}\int_{\alpha l}^{l} EI(w_2'')^2\,dx-\frac{1}{2}P\int_0^{\alpha l}(w_1')^2\,dx-\frac{1}{2}P\int_{\alpha l}^{l}(w_2')^2\,dx+ \frac{1}{2}k^+\langle w_2'(\alpha l)-w_1'(\alpha l)\rangle^2+\frac{1}{2}k^-\langle w_1'(\alpha l)-w_2'(\alpha l)\rangle^2 \tag{۱}$$

در رابطه بالا w معرف خیز در منحنی تغییر شکل یافته ستون و k^+ و k^- به ترتیب بیانگر سختی معادل فنر پیچشی بسته به چرخش مثبت ویا منفی متناسب با علامت لنگر خمشی است. سختی معادل فنر پیچشی تابعی از مشخصات ترک بوده که در ادبیات فنی مربوط به مکانیک شکست به آن اشاره شده است. این سختی تابعی از عمق ترک و ابعاد مقطع بوده و به صورت زیر تعریف می شود[۱]:

$$k=\frac{EI}{hC(\beta)},\quad \beta=\frac{d}{h} \tag{۲}$$

در رابطه بالا، h و d به ترتیب بیانگر عمق مقطع و عمق ترک می باشد. $C(\beta)$ نیز تابعی بی بعد از نسبت $\frac{d}{h}$ بوده که بسته به تعداد و موقعیت ترک روی لبه مقطع، بر اساس روابط مکانیک شکست محاسبه می شود. برای حالتی که یک ترک روی لبه‌ی مقطع باشد، رابطه‌ی زیر پیشنهاد شده است [۱]:

$$C(\beta)=6\pi(0.6272\beta^2-1.04533\beta^3+4.5948\beta^4-9.9736\beta^5+20.2948\beta^6-33.0351\beta^7+47.1063\beta^8-40.7556\beta^9+19.6\beta^{10}) \tag{۳}$$

برای مواردی که ترک روی هر دو لبه‌ی مقطع باشد، $C(\beta)$ از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود [۳]:

$$C(\beta)=6\pi(0.63845\beta^2-1.03508\beta^3+3.72015\beta^4-5.17738\beta^5+7.55301\beta^6-7.33244\beta^7+2.49091\beta^8-2.3391\beta^9+2.55976\beta^{10}) \tag{٤}$$

از مساوی صفر قرار دادن تغییرات انرژی پتانسیل کل یعنی $\delta u=0$ معادله دیفرانسیل حاکم بر مساله به صورت زیر بدست می‌آید:

$$EI\frac{d^4w_1}{dx^4}+p\frac{d^2w_1}{dx^2}=0 \qquad for \qquad x\in[0,\alpha l]$$
$$EI\frac{d^4w_2}{dx^4}+p\frac{d^2w_2}{dx^2}=0 \qquad for \qquad x\in[\alpha l,l] \tag{۵}$$

شرایط مرزی مساله عبارتند از :

$$\delta w_1(0)\ \ [EIw_1'''(0)+\ pw_1'(0)]=0 \tag{۶}$$

$$-\ \delta w_2(l)\ \ [EIw_2'''(l)+\ pw_2'(l)]=0 \tag{۷}$$

$$w_1(\alpha l)=w_2(\alpha l) \tag{۸}$$

$$EIw_2'''(\alpha l)+pw_2'(\alpha l)=EIw_1'''(\alpha l)+pw_1'(\alpha l) \tag{۹}$$

$$EIw_1''(0)\delta w_1'(0)=0 \tag{۱۰}$$

$$EIw_2''(l)\delta w_2'(l)=0 \tag{۱۱}$$

$$[EIw_1''(\alpha l)-k^+\langle w_2'(\alpha l)-w_1'(\alpha l)\rangle+k^-\langle w_1'(\alpha l)-w_2'(\alpha l)\rangle]\delta w_1'(\alpha l)=0 \tag{۱۲}$$

$$[EIw_2''(\alpha l)-k^+\langle w_2'(\alpha l)-w_1'(\alpha l)\rangle+k^-\langle w_1'(\alpha l)-w_2'(\alpha l)\rangle]\delta w_2'(\alpha l)=0 \tag{۱۳}$$

رابطه (۶) و (۷) شرایط مرزی مربوط به نیروی برشی در دو انتهای ستون می‌باشند. از سوی دیگر شرایط مرزی (۸) و(۹) نشان دهنده‌ی پیوستگی خیز و نیروی برشی در محل ترک می‌باشد. شرط مرزی (۱۰)و (۱۱) مربوط به لنگر خمشی یا وضعیت چرخش در دو انتهای عضو می‌باشد. همچنین معادلات (۱۲) و(۱۳) مرتبط با معادله‌ی رفتاری مقطع ترک خورده‌ی مدل اولر - برنولی می‌باشد.

با توجه به این که تغییرات w و w' (δw و $\delta w'$) اختیاری است. بنابر این برای یک ستون دو سر گیردار شرایط مرزی بصورت زیر باز نویسی می‌شود:

$$w_1(0)=0 \tag{۱۴}$$

$$w_2(l)=0 \tag{۱۵}$$

$$w_1(\alpha l)=w_2(\alpha l) \tag{۱۶}$$

$$EIw'''_1(\alpha l)+pw'_1(\alpha l)=EIw'''_2(\alpha l)+pw'_2(\alpha l) \tag{۱۷}$$

$$w'_1(0)=0 \tag{۱۸}$$

$$w'_2(l)=0 \tag{۱۹}$$

$$EIw''_1(\alpha l)=EIw''_2(\alpha l) \tag{۲۰}$$

$$EIw_1''(\alpha l)=k^+\langle w_2'(\alpha l)-w_1'(\alpha l)\rangle-k^-\langle w_1'(\alpha l)-w_2'(\alpha l)\rangle \tag{۲۱}$$

۳- بررسی ستون با یک ترک

در این بخش به بررسی وحل معادلات حاکم بر مساله با فرض وجود ترک در سازه می‌پردازیم. به منظور سادگی در روند محاسبات پارامترهای بی بعد زیر تعریف می‌شود:

$$\xi = \frac{x}{l} \qquad \lambda^2 = \frac{pl^2}{EI} \qquad \gamma^+ = \frac{k^+ l}{EI} \qquad \gamma^- = \frac{k^- l}{EI} \tag{۲۲}$$

که در آن ξ بیانگر مختصات بی بعد ، λ پارامتر بار کمانشی بی بعد و γ^+ و γ^- نیز به ترتیب پارامتر سختی بی بعد ترک متناظر با لنگر خمشی مثبت و منفی بوده که بر اساس مقادیر سختی به دست آمده از روابط (۳) و (۴) قابل محاسبه می‌باشد.

می‌باشد.

با استفاده از پارامترهای بی بعد تعریف شده در رابطه‌ی (۲۲) معادله دیفرانسیل حاکم بر مساله (۵) به صورت زیر باز نویسی می‌شود.

$$\begin{aligned} &w_1^{(4)} + \lambda^2 w_2'' = 0 \qquad For \qquad \xi \epsilon\, [0, \alpha] \\ &w_2^{(4)} + \lambda^2 w_2'' = 0 \qquad For \qquad \xi \epsilon\, [\alpha, 1] \end{aligned} \tag{۲۳}$$

در رابطه‌ی بالا، $'(\,)$ معرف مشتق نسبت به پارامتر بی بعد ξ می باشد. در چنین حالتی شرایط مرزی جدید مساله بر حسب پارامترهای بی بعد عبارتند از :

$$w_1(0) = 0 \tag{۲۴}$$

$$w_2(1) = 0 \tag{۲۵}$$

$$w_1(\alpha) = w_2(\alpha) \tag{۲۶}$$

$$w'''_1(\alpha) + \lambda^2 w'_1(\alpha) = w'''_2(\alpha) + \lambda^2 w'_2(\alpha) \tag{۲۷}$$

$$w'_1(0) = 0 \tag{۲۸}$$

$$w'_2(1) = 0 \tag{۲۹}$$

$$w''_1(\alpha) = w''_2(\alpha) \tag{۳۰}$$

$$w_1''(\alpha) = \gamma^+ \langle w_2'(\alpha) - w_1'(\alpha) \rangle - \gamma^- \langle w_1'(\alpha) - w_2'(\alpha) \rangle \tag{۳۱}$$

در حالت کلی پاسخ معادله دیفرانسیل حاکم بر مساله (۲۳) به صورت زیر می‌باشد:

$$w_1(\xi) = A_1 + B_1 \xi + C_1 \cos(\lambda \xi) + D_1 \sin(\lambda \xi) \tag{۳۲}$$

$$w_2(\xi) = A_2 + B_2 \xi + C_2 \cos(\lambda \xi) + D_2 \sin(\lambda \xi) \tag{۳۳}$$

با اعمال شرط مرزی(۲۴)، $A_1 = -C_1$ حاصل می‌شود. از سوی دیگر با اعمال شرایط مرزی (۲۷)، (۲۹) و (۳۰) می‌توان نشان داد $A_1 = A_2 = -C_1$ و $B_1 = B_2$. همچنین با اعمال دیگر شرایط مرزی در نهایت چهار معادله‌ی زیر دست حاصل می‌شود:

$$-D_1\lambda - C_2\lambda\sin(\lambda) + D_2\lambda\cos(\lambda) = 0 \tag{۳۴}$$

$$C_1\cos(\lambda\alpha) + D_1\sin(\lambda\alpha) - C_2\cos(\lambda\alpha) - D_2\sin(\lambda\alpha) = 0 \tag{۳۵}$$

$$-C_1 - D_1\lambda + C_2\cos(\lambda) + D_2\sin(\lambda) = 0 \tag{۳۶}$$

$$\begin{gathered} D_1[-\lambda^2\sin(\lambda\alpha) + \gamma\lambda\, cos\,(\lambda\alpha)] + C_1[-\lambda^2\cos(\lambda\alpha) - \gamma\lambda\sin(\lambda\alpha)] + \\ C_2\,[\gamma\lambda\sin(\lambda\alpha)] + D_2\,[-\gamma\lambda cos\,(\lambda\alpha)] = 0 \end{gathered} \tag{۳۷}$$

معادلات بالا را می‌توان به صورت حاصلضرب ماتریس در بردار مجهولات، مطابق رابطه‌ی زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\lambda & -\lambda\sin(\lambda) & \lambda cos\,(\lambda) \\ -1 & -\lambda & cos\,(\lambda) & \sin(\lambda) \\ cos\,(\lambda\alpha) & \sin(\lambda\alpha) & -cos\,(\lambda\alpha) & -\sin(\lambda\alpha) \\ -\lambda^2\cos(\lambda\alpha) - \gamma\lambda\sin(\lambda\alpha) & -\lambda^2\sin(\lambda\alpha) + \gamma\lambda\, cos\,(\lambda\alpha) & \gamma\lambda\sin(\lambda\alpha) & -\gamma\lambda cos\,(\lambda\alpha) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ D_1 \\ C_2 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{۳۸}$$

جواب غیر بدیهی رابطه‌ی بالا، از مساوی صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب حاصل خواهد شد:

$$\begin{vmatrix} 0 & -\lambda & -\lambda\sin(\lambda) & \lambda cos\,(\lambda) \\ -1 & -\lambda & cos\,(\lambda) & \sin(\lambda) \\ cos\,(\lambda\alpha) & \sin(\lambda\alpha) & -cos\,(\lambda\alpha) & -\sin(\lambda\alpha) \\ -\lambda^2\cos(\lambda\alpha) - \gamma\lambda\sin(\lambda\alpha) & -\lambda^2\sin(\lambda\alpha) + \gamma\lambda\, cos\,(\lambda\alpha) & \gamma\lambda\sin(\lambda\alpha) & -\gamma\lambda cos\,(\lambda\alpha) \end{vmatrix} = 0 \tag{۳۹}$$

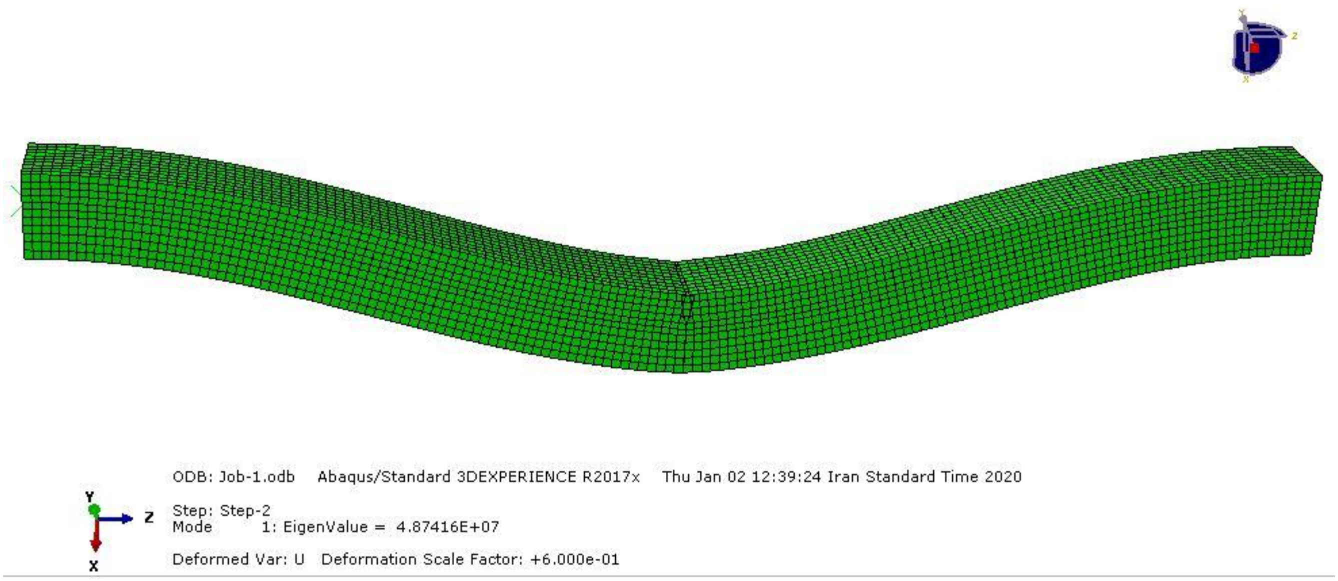
پس از ساده سازی معادله‌ی مشخصه‌ی (۳۹) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{(\lambda^4\cos(2\alpha\lambda - \lambda))}{2} + \frac{(\lambda^4\cos(\lambda))}{2} - \lambda^3\sin(\lambda) - 2\gamma\lambda^2 + 2\gamma\lambda^2\cos(\lambda) + \gamma\lambda^3\sin(\lambda) = 0 \tag{۴۰}$$

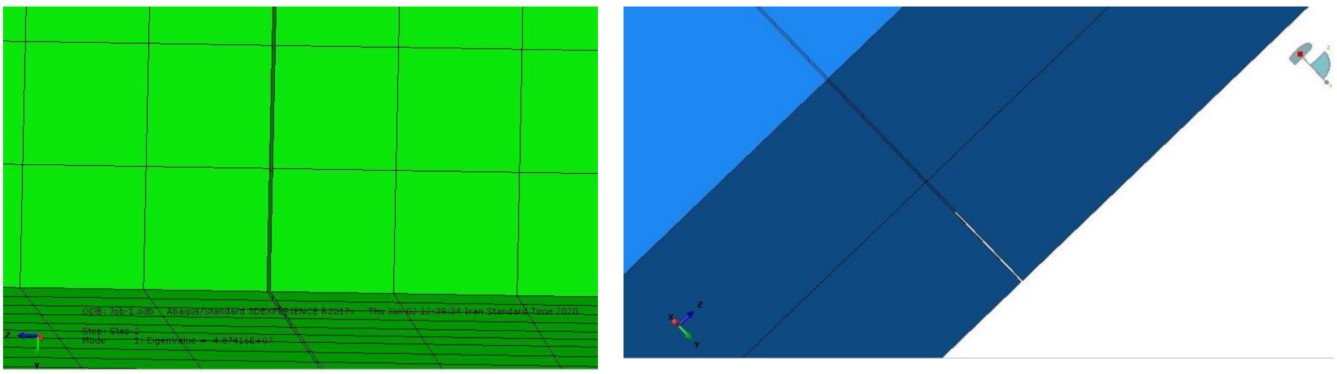
در رابطه‌ی بالا، مقدار γ (γ^+ یا γ^-) وابسته به علامت لنگر خمشی و رفتار ترک می‌باشد.

۳-۱- صحت سنجی

در این بخش به منظور کنترل درستی روابط تحلیلی به دست آمده به مدل سازی ستونی ترک خورده در نرم افزار اجزای محدود آباکوس پرداخته و نتیجه به دست آمده از آن با نتیجه تحلیلی این پژوهش مقایسه می‌شود. بدین منظور ستون بتنی دوسرگیردار با مقطع مربعی به ابعاد $40 \times 40cm$، طول l = 600cm، عمق ترک d = 14cm و مدول الاستیسیته $E = 253456.36\ kg/cm^2$ در نظر گرفته می‌شود. موقعیت ترک در وسط دهانه فرض می‌شود. به منظور مدل‌سازی از المان سه بعدی C3D8 استفاده می‌شود. این المان هشت گرهی بوده و در هر گره دارای سه درجه آزادی است. اندازه‌ی المان‌ها در هر راستا برابر با 4cm می‌باشد. با مدل سازی ستون با مشخصات یاد شده در نرم افزار اجزای محدود آباکوس و تحلیل کمانشی، بار بحرانی کمانش ستون برابر $P_{cr} = 4.87 \times 10^7 N = 4870 ton$ گزارش می‌شود که متناظر با آن λ = 5.69 می‌باشد (شکل ۲). از سوی دیگر با توجه به مشخصات مقطع و ترک، بر اساس روابط (۲)، (۳) و (۲۲) مقدار عددی γ برابر با 9.87 حاصل می‌شود. با جاگذاری این مقدار در رابطه(۳۸) و حل عددی این رابطه، مقدار λ = 5.71 حاصل خواهد شد که مشابه مقدار λ به دست آمده از نرم افزار اجزای محدود آباکوس می‌باشد.



(الف)



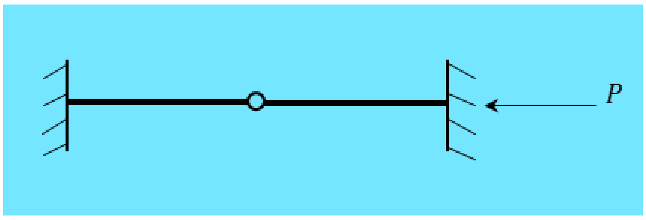
(ب)

شکل ۲: مدل اجزای محدود ستون دو سرگیردار، (الف) شکل کمانش یافته ستون و (ب) مدل‌سازی ترک

۳-۲- بررسی تغییرات γ

هنگامی که γ به سمت صفر میل می‌کند، ترک توسط لولا قابل مدل سازی می‌باشد (شکل۳). برای این حالت خاص، به ازای موقعیت‌های مختلف قرارگیری ترک در ستون(αهای مختلف)، بار معادل کمانش پس از ساده سازی مقادیر 3.14، 3.5 و 4.5 به دست می‌آید.

$$\gamma = 0 \Rightarrow \frac{(\lambda^4\cos(2\alpha\lambda - \lambda))}{2} + \frac{(\lambda^4\cos(\lambda))}{2} - \lambda^3\sin(\lambda) - 2\gamma\lambda^2 + 2\gamma\lambda^2\cos(\lambda) + \gamma\lambda^3\sin(\lambda) = 0 \quad (۴۱)$$
$$\lambda = (3.14, 3.5, 4.5)$$

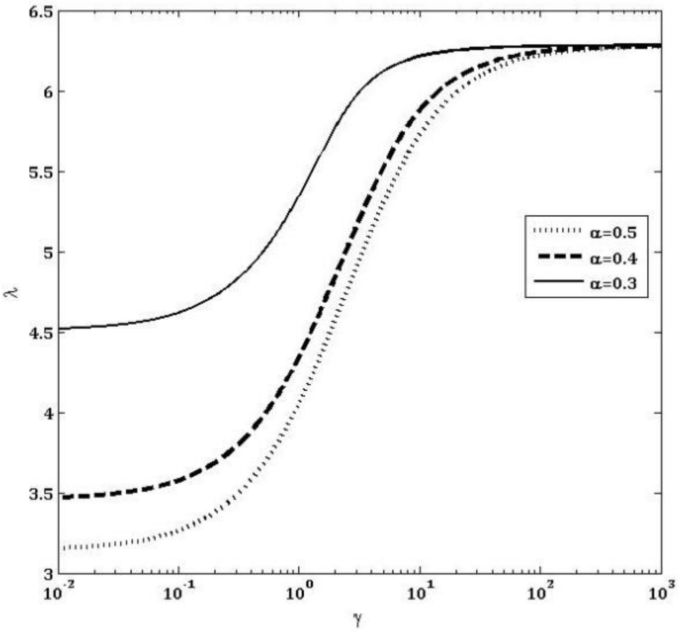


شکل ۳: حالت خاص: $\gamma = 0$، ستون با مفصل داخلی

هنگامی که γ به سمت بینهایت میل می‌کند، سازه مورد نظر ستونی دوسرگیردار را تشکیل می‌دهد. در این حالت بر اساس رابطه‌ی کلاسیک اولر، بار کمانشی ستون به صورت زیر می‌باشد:

$$\gamma \Rightarrow \infty : \lambda = 2\pi \tag{۴۲}$$

شکل۴، اثر پارامتر سختی ترک (γ) به ازای موقعیت‌های مختلف ترک را روی بار کمانشی نشان می‌دهد. بار کمانشی مستقل از موقعیت ترک با افزایش پارامتر سختی ترک افزایش یافته و با میل کردن پارامتر سختی به بینهایت(ستون دوسرگیردار ایده آل)، بار کمانشی مطابق رابطه(۴۰) به $\frac{4\pi^2 EI}{l^2}$ میل می‌کند. از سوی دیگر همانگونه که در شکل۴ مشاهده می‌شود، با نزدیک شدن ترک به تکیه گاه به ازای پارامتر سختی ترک ثابت(ثابت بودن عمق ترک)، بار کمانشی افزایش می‌یابد.



شکل ۴: اثر پارامتر سختی ترک روی بار کمانشی ستون ترک خورده

به طور کلی، برای مسئله‌ی کمانش معادله‌ی مشخصه‌ی زیر باید در نظر گرفته شود:

$$\frac{(\lambda^4 \cos(2\alpha\lambda - \lambda))}{2} + \frac{(\lambda^4 \cos(\lambda))}{2} - \lambda^3 \sin(\lambda) = \gamma(2\lambda^2 - 2\lambda^2 \cos(\lambda) - \lambda^3 \sin(\lambda)), \therefore\ \gamma = \min(\gamma^+; \gamma^-) \tag{۴۳}$$

در حالت خاص، وجود یک ترک در یکی از لبه‌های مقطع متناظر با رفتار کامل یک طرفه ترک می‌باشد. بدین معنی که به عنوان مثال γ^- به بی‌نهایت میل کرده و مقدار γ متناظر با γ^+ خواهد شد. در این حالت نتایج ارائه شده در شکل ۴ دقیقا مشابه مطالعات قبلی که مبتنی بر فرض باز بودن ترک بوده، می‌باشد.

۴- بررسی ستون با دو ترک

دراین بخش، به بررسی ستون دوسرگیردار با دو ترک پرداخته می‌شود (شکل۵). مشابه بخش قبل معادلات دیفرانسیل بی بعد حاکم بر مساله به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$w_1^{(4)} + \lambda^2 w_1'' = 0 \qquad For \quad x \in [0, \alpha_1] \tag{۴۴}$$

$$w_2^{(4)} + \lambda^2 w_2'' = 0 \qquad For \quad x \in [\alpha_1, 1-\alpha_2] \tag{۴۵}$$

$$w_3^{(4)} + \lambda^2 w_3'' = 0 \qquad For \quad x \in [1-\alpha_2, 1] \tag{۴۶}$$

در رابطه‌ی بالا، α_1 و α_2 ضرایبی از طول ستون بوده و به ترتیب نشان دهنده‌ی موقعیت ترک از تکیه گاه چپ و راست می‌باشد، به طوری که $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$. شرایط مرزی مساله به صورت زیر می‌باشد:

$$w_1(0) = 0 \tag{۴۷}$$

$$w_3(1) = 0 \tag{۴۸}$$

$$w'_1(0) = 0 \tag{۴۹}$$

$$w'_3(1) = 0 \tag{۵۰}$$

$$w_1(\alpha_1) = w_2(\alpha_1) \tag{۵۱}$$

$$w'''_1(\alpha_1) + \lambda^2 w'_1(\alpha_1) = [w'''_2(\alpha_1) + \lambda^2 w'_2(\alpha_1)] \tag{۵۲}$$

$$w''_1(\alpha_1) = w''_2(\alpha_1) \tag{۵۳}$$

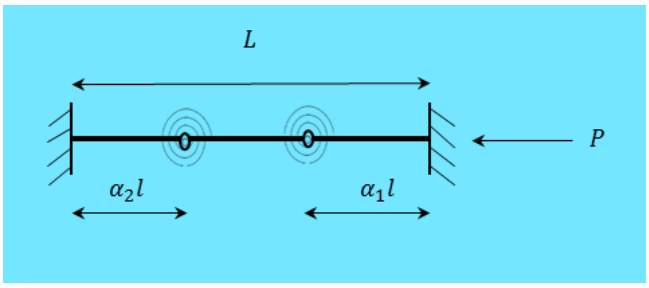
$$w_1''(\alpha_1) = \gamma_1^+ \langle w_2'(\alpha_1) - w_1'(\alpha_1) \rangle - \gamma_1^- \langle w_1'(\alpha_1) - w_2'(\alpha_1) \rangle \tag{۵۴}$$

$$w_2(1-\alpha_2) = w_3(1-\alpha_2) \tag{۵۵}$$

$$w'''_2(1-\alpha_2) + \lambda^2 w'_2(1-\alpha_2) = [w'''_3(1-\alpha_2) + \lambda^2 w'_3(1-\alpha_2)] \tag{۵۶}$$

$$w''_2(1-\alpha_2) = w''_3(1-\alpha_2) \tag{۵۷}$$

$$w_2''(1-\alpha_2) = \gamma_2^+ \langle w_3'(1-\alpha_2) - w_2'(1-\alpha_2) \rangle - \gamma_2^- \langle w_2'(1-\alpha_2) - w_3'(1-\alpha_2) \rangle \tag{۵۸}$$



شکل ۵: مدل سازه ای: ستون با دو ترک

در روابط بالا γ_1 و γ_2 نشان دهنده‌ی پارامترهای سختی بی بعد ترک‌ها بوده، به طوری که فاصله‌ی آن‌ها از تکیه گاه چپ و راست ستون به ترتیب برابر $\alpha_1 l$ و $\alpha_2 l$ است.

در این حالت پاسخ معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر مساله (۴۶-۴۴) به صورت زیر است:

$$w_1(\xi) = A_1 + B_1\xi + C_1 \cos(\lambda\xi) + D_1 \sin(\lambda\xi) \tag{۵۹}$$

$$w_2(\xi) = A_2 + B_2\xi + C_2 \cos(\lambda\xi) + D_2 \sin(\lambda\xi) \tag{۶۰}$$

$$w_3(\xi) = A_3 + B_3\xi + C_3 \cos(\lambda\xi) + D_3 \sin(\lambda\xi) \tag{۶۱}$$

با اعمال شرط مرزی در $\xi = 0$، $A_1 = -C_1$ حاصل می‌شود. همانند بخش قبلی با اعمال دیگر شرایط مرزی می‌توان نشان داد:

$B_2 = B_3 = B_1 = -D_1\lambda$. با جاگذاری مقادیر به دست آمده در روابط بالا خواهیم داشت:

$$C_1[\cos(\lambda\alpha_1) - 1] + D_1(\sin(\lambda\alpha_1)) - A_2 - C_2\cos(\lambda\alpha_1) - D_2\sin(\lambda\alpha_1) = 0 \quad (۶۲)$$

$$A_3 - D_1\lambda + C_3\cos(\lambda) + D_3\sin(\lambda) = 0 \quad (۶۳)$$

$$-D_1\lambda - C_3\lambda\sin(\lambda) + D_3\lambda\cos(\lambda) = 0 \quad (۶۴)$$

$$-C_1\cos(\lambda\alpha_1) - D_1\sin(\lambda\alpha_1) + C_2\cos(\lambda\alpha_1) + D_2\sin(\lambda\alpha_1) = 0 \quad (۶۵)$$

$$C_1\,[-\lambda\cos(\lambda\alpha_1) - \gamma_1\sin(\lambda\alpha_1)] - D_1[\,\lambda\sin(\lambda\alpha_1) - \gamma_1\cos(\lambda\alpha_1)] + C_2\gamma_1\sin(\lambda\alpha_1) - D_2\gamma_1\cos(\lambda\alpha_1) = 0 \quad (۶۶)$$

$$A_2 + C_2\cos(\lambda(1-\alpha_2)) + D_2\sin(\lambda(1-\alpha_2)) - A_3 - C_3\cos(\lambda(1-\alpha_2)) - D_3\sin(\lambda(1-\alpha_2)) = 0 \quad (۶۷)$$

$$[-C_2\cos\big(\lambda(1-\alpha_2)\big) - D_2\sin\big(\lambda(1-\alpha_2)\big) + C_3\cos\big(\lambda(1-\alpha_2)\big) + D_3\sin\big(\lambda(1-\alpha_2)\big)] = 0 \quad (۶۸)$$

$$-C_2\lambda\cos\big(\lambda(1-\alpha_2)\big) - D_2\,\lambda\sin\big(\lambda(1-\alpha_2)\big) + C_3\gamma_2\sin\big(\lambda(1-\alpha_2)\big) - D_3\gamma_2\cos\big(\lambda(1-\alpha_2)\big) - C_2\gamma_2\sin\big(\lambda(1-\alpha_2)\big) + D_2\gamma_2\cos\big(\lambda(1-\alpha_2)\big) = 0 \quad (۶۹)$$

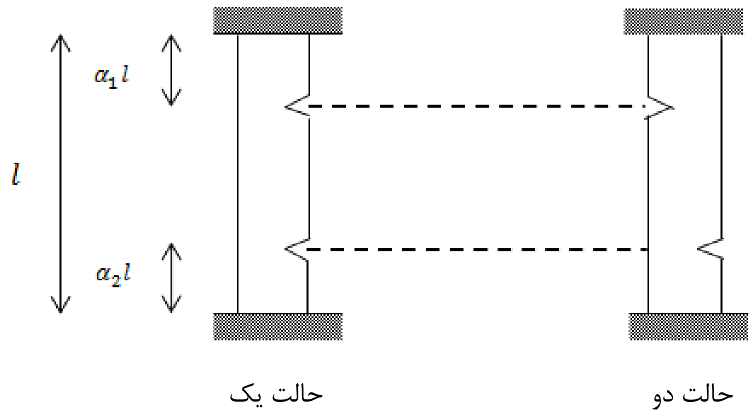
معادلات بالا را می‌توان به صورت حاصلضرب ماتریس در بردار مجهولات، مطابق رابطه‌ی زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} \cos(\lambda\alpha_1)-1 & \sin(\lambda\alpha_1) & -1 & -\cos(\lambda\alpha_1) & -\sin(\lambda\alpha_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 1 & \cos(\lambda) & \sin(\lambda) \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda\sin(\lambda) & \lambda\cos(\lambda) \\ -\cos(\lambda\alpha_1) & -\sin(\lambda\alpha_1) & 0 & \cos(\lambda\alpha_1) & \sin(\lambda\alpha_1) & 0 & 0 & 0 \\ A & B & 0 & \gamma_1\sin(\lambda\alpha_1) & -\gamma_1\cos(\lambda\alpha_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cos[\lambda(1-\alpha_2)] & \sin[\lambda(1-\alpha_2)] & -1 & -\cos[\lambda(1-\alpha_2)] & -\sin[\lambda(1-\alpha_2)] \\ 0 & 0 & 0 & -\cos[\lambda(1-\alpha_2)] & -\sin[\lambda(1-\alpha_2)] & 0 & \cos[\lambda(1-\alpha_2)] & \sin[\lambda(1-\alpha_2)] \\ 0 & 0 & 0 & C & D & 0 & \gamma_2\sin[\lambda(1-\alpha_2)] & -\gamma_2\cos[\lambda(1-\alpha_2)] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ D_1 \\ A_2 \\ C_2 \\ D_2 \\ A_3 \\ C_3 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (۷۰)$$

A=$-\boldsymbol{\lambda}\,\mathbf{cos}(\boldsymbol{\lambda\alpha_1}) - \boldsymbol{\gamma_1}\,\mathbf{sin}(\boldsymbol{\lambda\alpha_1})$ C=$-\boldsymbol{\lambda}\,\mathbf{cos}[\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha_2})] - \boldsymbol{\gamma_2}\,\mathbf{sin}[\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha_2})]$

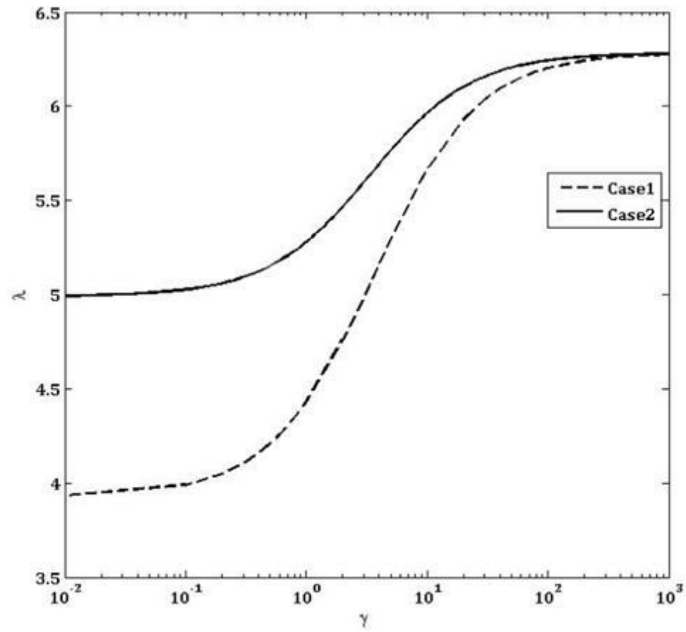
B=$-\boldsymbol{\lambda}\mathbf{sin}(\boldsymbol{\lambda\alpha_1}) + \boldsymbol{\gamma_1}\,\mathbf{cos}(\boldsymbol{\lambda\alpha_1})$ D=$-\boldsymbol{\lambda}\,\mathbf{sin}[\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha_2})] + \boldsymbol{\gamma_2}\,\mathbf{cos}[\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha_2})]$

در رابطه‌ی بالا، مقدار $\gamma_i(\gamma_i^+$ یا $\gamma_i^-)$ بطوری که $i \in \{1,2\}$ وابسته به علامت لنگر خمشی و رفتار ترک می‌باشد. با مساوی صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب، معادله‌ی مشخصه ای شامل پارامترهای λ ، γ_1 ، γ_2 ، α_1 و α_2 به دست می‌آید. با میل کردن γ_2 به سمت بینهایت، معادله‌ی مشخصه برای این حالت همانند معادله‌ی مشخصه برای حالت ستون دو سر گیردار یک ترکه خواهد شد. همچنین هنگامی که γ_1 و γ_2 به سمت صفر میل می‌کنند، ترک‌ها به صورت مفصل داخلی عمل می‌کنند. از سوی دیگر با میل کردن γ_1 و γ_2 به سمت بینهایت، سازه مورد نظر ستونی دو سر گیردار را تشکیل می‌دهد. در این حالت بر اساس رابطه‌ی اولر، بار کمانشی ستون به $\frac{4\pi^2 EI}{l^2}$ میل می‌کند. نتایج عددی ارائه شده در این بخش، با فرض قرار گرفتن ترک‌ها در فاصله‌ی $\frac{1}{10}$ از تکیه‌گاه‌ها ($\alpha_2 = \alpha_1 = 0.1$) می‌باشد. به منظور بررسی اثرات بسته شدن ترک (بر اساس علامت لنگر خمشی)دو حالت مورد بررسی قرار می‌گیرد. حالت اول: $\gamma_1^+ = \gamma;\ \gamma_1^- = \infty;\ \gamma_2^+ = \infty;\ \gamma_2^- = \gamma$ و حالت دوم: $\gamma_1^+ = \gamma;\ \gamma_1^- = \infty;\ \gamma_2^+ = \gamma;\ \gamma_2^- = \infty$. به بیانی دیگردر حالت اول دو ترک روی یک وجه ستون قرار گرفته اند، در حالی که در حالت دوم ترک‌ها رو به روی هم و در دو وجه مخالف قرار گرفته اند (شکل۶).



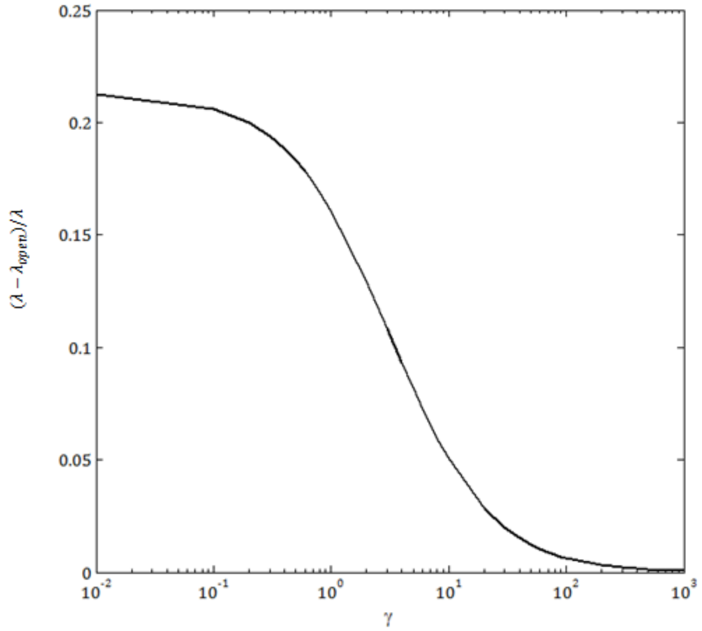
شکل ۶: اثر بسته شدن ترک روی مود کمانش

نتایج ارائه شده در شکل(۷) به خوبی اثرات بسته شدن ترک روی بار کمانشی ستون را نشان می‌دهد. همان گونه که در شکل(۷) مشاهده می‌شود، بار کمانشی حالت دوم نسبت به حالت اول بیشتر می‌باشد. در حالت اول تحت اثر کمانش هر دو ترک باز شده در حالی که در حالت دوم تنها یکی از ترک‌ها باز می شود.



شکل ۷: اثر پدیده بسته شدن ترک روی بار کمانشی ستون ترک خورده ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0.1$)

شکل۸ تغییرات بار کمانشی دو حالت نسبت به هم را نشان می‌دهد، بیشترین تغییرات حدود ۲۱٪ مربوط به خسارت شدید است. با افزایش پارامتر سختی مربوط به ترک (کاهش عمق ترک)، تغییرات قابل چشم پوشی بوده و به سمت صفر میل می‌کند.



شکل ۸: تاثیر ترک بسته نسبت به ترک باز ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0.1$)

۵- نتیجه گیری

در این مقاله،کمانش ستون دوسرگیردار با یک و دو ترک به صورت تحلیلی مورد بررسی قرار گرفت. ترک بر اساس رفتار سختی خمشی الاستیک یک طرفه با استفاده از فنر پیچشی یک طرفه مدل سازی شده است. مدل سازی بدین طریق قادر می‌باشد تا اثرات باز و بسته شدن ترک روی رفتار کمانشی ستون را در نظر بگیرد. شایان ذکر است که فنر پیچشی جهت مدل‌سازی اتصالات نیمه صلب در مهندسی عمران و یا مکانیک نیز قابل استفاده است. معادله‌ی رفتاری حاکم بر مسأله با استفاده از تغییرات انرژی پتانسیل برابر با صفر حاصل شده است. اثر وجود ترک روی بار کمانشی ستون دوسرگیردار و همچنین اثر پارامتر سختی ترک به ازای موقعیت‌های مختلف ترک روی بار کمانشی مورد مطالعه قرار گرفت که طی آن نتایج زیر حاصل شد:

- در حالت یک ترکه مدل رفتاری یک طرفه‌ی ترک، بار کمانشی ستون مشابه با فرض باز بودن ترک بوده که در اکثر پژوهش‌های قبلی در نظر گرفته شده است.
- بار کمانشی مستقل از موقعیت ترک با افزایش پارامتر سختی ترک افزایش یافته و با میل کردن پارامتر سختی به بینهایت (ستون دوسرگیردار ایده آل)، بار کمانشی به رابطه‌ی ارائه شده توسط اولر برای ستون دوسرگیردار میل می‌کند.
- با نزدیک شدن ترک به تکیه گاه گیردار ستون به ازای پارامتر سختی ترک ثابت(ثابت بودن عمق ترک)، بار کمانشی افزایش می‌یابد.
- در حالت دو ترکه موقعیت قرارگیری ترک‌ها بسته به این که هر دو روی یک وجه و یا روی دو وجه مخالف ستون قرار گرفته باشند، مورد بررسی قرار گرفت. نتایج حاصل از تحلیل ستون دو ترکه نشان دهنده‌ی آن است که پدیده ی بسته شدن ترک بسته به علامت لنگر خمشی روی بار کمانشی ستون تاثیر گذار بوده و افزایش بار کمانش را سبب خواهد شد. به طوری‌که با فرض خسارت شدید (عمق ترک زیاد)، بسته شدن ترک افزایش ۲۱ درصدی بار کمانشی را در مقایسه با فرض باز بودن ترک، سبب خواهد شد. با افزایش پارامتر سختی مربوط به ترک (کاهش عمق ترک)، تغییرات قابل چشم پوشی است و به سمت صفر میل می‌کند.

منابع

[1]. Okamura, H., Liu, H.W., Chu, C.S., Liebowitz, H., (1969). A cracked column under compression. *Engineering Fracture Mechanics*, 1(3), 547-564.

[2]. Ostachowicz, WM., Krawczuk C. (1991). Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam. *J Sound Vib*,150(2), 191–201.

[3]. Chondros, TJ., Dimarogonas, AD., Yao, J. (1998). A continuous cracked beam vibration theory. *J Sound Vib* , 215(1),17–24.

[4]. Biondi, B., Caddemi, S. (2005). Closed form solutions of Euler–Bernoulli beam with singularities. *Int. J. Solids Struct*, 42, 3027–3044.

[5]. Biondi, B., Caddemi, S. (2007). Euler–Bernoulli beams with multiple singularities in the flexural stiffness. *Eur. J. Mech*, 26, 789–809.

[6]. Shifrin, E.I., Ruotolo, R. (1999). Natural frequencies of a beam with an arbitrary number of cracks. *J. Sound Vib*, 222, 409–423.

[7]. Kisa, M. (2011). Vibration and stability of multi-cracked beams under compressive axial loading. *Int. J. Phys*. Sci. 6, 2681–2696.

[8]. Caddemi, S., Calió, I. (2011). The influence of the axial force on the vibration of the Euler–Bernoulli beam with an arbitrary number of cracks. *Arch. Appl. Mech*, 82, 1–13.

[9]. Anifantis, N., Dimarogonas, A., (1983). Stability of columns with a single crack subjected to follower and vertical loads. *International Journal of Solids and structures*, 19(4), 281-291.

[10]. Li, Q.S, (2003). Classes of exact solutions for buckling of multi-step non-uniform columns with an arbitrary number of cracks subjected to concentrated and distributed axial loads. *International Journal of engineering Science*, 41(6), 569-586.

[11]. Caddemi, S., Calio, I., Cannizzaro, F. (2013). The influence of multiple cracks on tensile and compressive buckling of shear deformable beams. *International Journal of Solids and Structures*, 50(20-21),3166-3183.

[12]. Challamel, N., Lanos, C., Casandjian, C. (2006). Localization in the vibration of a two-span weakened column. *Engineering Structures*, 28(5), 776-782.

[13]. Dehghani, M.A., Dehghan Manshadi, S.H., Ranjbaran, A., Esfandiari, M.J. Dehghan Manshadi, S.M. (2018). Analysis of localization in the buckling of a two-span column with elastic end connections. European *Journal of Environmental and Civil* Engineering, 22(7), 811-835.

[14]. Zhou, L., Huang, Y. (2006).Crack effect on the elastic buckling behavior of axially and eccentrically loaded columns. *Struct Engng Mechanics*, 22(2), 169-184.

[15]. Patel, T.H., Darpe, A.K. (2008). Influence of crack breathing model on nonlinear dynamics of a cracked rotor. *J. Sound Vib*. 311, 953–972.

[16]. Caddemi, S., Calió, I. (2011). The influence of the axial force on the vibration of the Euler–Bernoulli beam with an arbitrary number of cracks. *Arch. Appl. Mech*, 82, 1–13.

[17]. Ariaei, A., Ziaei-Rad, S., Ghayour M. (2009). Vibration analysis of beams with open and breathing cracks subjected to moving masses. *Journal of sound and vibration*, 326(3-5),709-724.

[18]. Cicirello, A., Palmeri, A. (2014). Static analysis of Euler-Bernoulli beams with multiple unilateral cracks under combined axial and transverse loads. *International Journal of Solids and Structures*, 51(5), 1020-1029.