Journal of Structural and Construction Engineering, 8(5), 2021, pp. 296-314

Journal of Structural and Construction Engineering

www.jsce.ir

Development of the Discrete Singular Convolution Method for the Free Vibration Analysis of Coupled Shear Walls

Amir Zayeri Baghlani Nejad[1]*, Mohammad Shokrollahi[1]

1- Instructor, Department of Civil Engineering, Engineering Faculty, Jundi-Shapur University of Technology, Dezful, Iran

ABSTRACT

Discrete singular convolution is a new numerical method that its ability to vibrational analysis has been demonstrated in the last decade. A lot of research on how to apply the complex boundary conditions of the different issues using this method is carried out and a variety of solutions have been proposed in this regard. Applying the boundary conditions in the governing equations of coupled shear walls, is a challenging issue. This paper proposes a new algorithm for applying the boundary conditions in the vibration analysis of coupled shear walls using the DSC method. In order to validate the proposed method, several samples were analyzed using this algorithm and the results were compared with the values obtained from three conventional numerical methods of Finite element (FEM), Differential quadrature (DQM) and Finite difference (FDM) methods. The great conformity was found between the results which emphasized the validity and integrity of the proposed method. In addition, the ability of the DSC algorithm was explored in terms of the computational speed, computational effort and the amount of computer memory required aspect and compared with the other conventional numerical approaches. It is concluded that the DSC is more efficient than the compared numerical methods from the results of this study.

ARTICLE INFO

Receive Date: 22 February 2019
Revise Date: 03 December 2019
Accept Date: 31 December 2019

Keywords:
Discrete singular convolution;
free vibration;
coupled shear wall;
boundary conditions;
Numerical method.

doi: 10.22065/JSCE.2019.172977.1789

*Corresponding author: Amir Zayeri Baghlani Nejad
Email address: a_zayeri@jsu.ac.ir

Journal of Structural and Construction Engineering
JSCE
نشریه علمی-پژوهشی مهندسی سازه و ساخت

نشریه مهندسی سازه و ساخت
(علمی - پژوهشی)
www.jsce.ir

ISSE

توسعه الگوریتم همپیچی منفرد گسسته جهت آنالیز ارتعاش آزاد دیوارهای برشی کوپله

امیر زایری بغلانی نژاد[1*]، محمد شکراللهی[1]

۱- مربی، دانشکده مهندسی عمران،گروه سازه، دانشگاه صنعتی جندی شاپور دزفول،دزفول، ایران

چکیده

الگوریتم همپیچی منفرد گسسته (Discrete Singular Convolution) روش عددی نوینی است که در دهه اخیر توانایی خود را در تحلیل مسائل مربوط به ارتعاشات به خوبی نشان داده است. تحقیقات زیادی در خصوص چگونگی اعمال شرایط مرزی پیچیده مسائل مختلف با استفاده از این روش انجام و راه‌کارهای گوناگونی در این خصوص ارائه شده است. وارد کردن شرایط مرزی دیوارهای برشی کوپله در شکل گسسته شده معادلات حاکم به روش DSC، مساله چالش برانگیزی است که تا کنون راه حلی برای آن اندیشیده نشده است. هدف این مقاله، ارائه راه‌کاری جهت اعمال شرایط مرزی مساله مذکور در تحلیل عددی با استفاده از الگوریتم DSC می‌باشد. به منظور صحت‌سنجی، با بکارگیری شیوه پیشنهادی در الگوریتم مذکور، نمونه‌های متعددی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفتند و نتایج با مقادیر به‌دست آمده از سه روش عددی متداول اجزای محدود (FEM)، تفاضل مربعات (DQM) و تفاضل محدود (FDM) مقایسه شدند. انطباق بسیار خوبی بین نتایج مشاهده شد که حاکی از اعتبار و صحت شیوه پیشنهادی در تحلیل مساله مورد نظر می‌باشد. علاوه بر این توانایی الگوریتم DSC از نظر سرعت و حجم محاسبات و نیز میزان حافظه کامپیوتری مورد نیاز، نسبت به شیوه‌های عددی متداول دیگر مورد مطالعه قرار گرفت. نتایج این تحقیق نشان داد که DSC نسبت به روش‌های عددی مورد مقایسه از کارایی بالاتری در تحلیل مساله مذکور برخوردار است.

کلمات کلیدی: همپیچی منفرد گسسته، ارتعاش آزاد، دیوار برشی کوپله، شرایط مرزی، تحلیل عددی

سابقه مقاله:					شناسه دیجیتال:	
دریافت	بازنگری	پذیرش	انتشار آنلاین	چاپ	doi:	10.22065/JSCE.2019.172977.1789
۱۳۹۷/۱۲/۰۳	۱۳۹۸/۰۹/۱۲	۱۳۹۸/۱۰/۱۰	۱۳۹۸/۱۰/۱۰	۱۴۰۰/۰۵/۳۰		https://dx.doi.org/10.22065/jsce.2019.172977.1789

*نویسنده مسئول: امیر زایری بغلانی نژاد
پست الکترونیکی: a_zayeri@jsu.ac.ir

۱- مقدمه

یکی از سیستم‌های پرکاربرد جهت پایداری و مقاومت ساختمان‌های بلند مرتبه در مقابل بارهای جانبی، دیوار برشی می‌باشد. گاهی اوقات محدودیت‌های معماری برای تعبیه فضاهایی از قبیل در یا پنجره موجب می‌شود در دیوارهای برشی بازشوهایی قرار داده شود و در نتیجه کل سیستم باربر جانبی به چند دیوار تقسیم می‌شود که از طریق تیرهای پیوند به یکدیگر مرتبط هستند. به این سیستم سازه‌ای، دیوار برشی کوپله گفته می‌شود که به دلیل عملکرد تیر موجود بین دیوارهای مجاور، نسبت به حالت چند دیوار مجزا از سختی سازه‌ای بزرگ‌تری برخوردار بوده و قابلیت تحمل نیروی برشی و لنگر خمشی بیشتری دارد[۱]. با توجه به کاربرد فراوان این عناصر سازه‌ای در صنعت ساختمان سازی، آنالیز دقیق آنها اهمیت ویژه‌ای پیدا می‌کند. در این زمینه تحقیقات گسترده‌ای انجام شده است که از مهمترین آنها می‌توان به مراجع [۲-۱۳] اشاره کرد. در مقالات مذکور، ایده‌های مختلفی جهت آنالیز استاتیکی و تحلیل دینامیکی دیوارهای برشی کوپله توسط محققین و با استفاده از روش‌های مختلف ارائه شده است. به طور کلی تکنیک‌های مورد استفاده پژوهشگران را می‌توان به سه دسته روش‌های آزمایشگاهی، تحلیلی و عددی تقسیم‌بندی نمود. با این وجود پرهزینه بودن روش‌های آزمایشگاهی و عمومیت نداشتن روش‌های تحلیلی از جمله عللی است که محققین را به استفاده از آنالیزهای عددی در تحلیل متمایل ساخته است[۸-۱۳].

یکی از روش‌های عددی نوین که اخیرا کارایی خود را در تحلیل مسائل ارتعاشی به خوبی نشان داده است، شیوه همپیچی منفرد گسسته[1] یا به اختصار روش DSC می‌باشد[۱۴]. تحلیل ارتعاشی مسائل سازه‌ای برای اولین بار در سال ۲۰۰۱ توسط پروفسور وی با استفاده از روش DSC و برای آنالیز ارتعاشی تیرها صورت پذیرفت[۱۵]. در تحقیق انجام شده فقط تیرهای با شرایط مرزی ساده و گیردار مورد تحلیل قرار گرفتند. شرایط مرزی مذکور بسیار ساده بودند و فرمول بندی آنها با استفاده از الگوریتم DSC به راحتی امکان پذیر بود. با این وجود علی‌رغم توانمندی روش مذکور در حل مسایل ارتعاشی، کاربرد آن برای مسائل با شرایط مرزی پیچیده‌تر امکان پذیر نبود. در سال ۲۰۰۵ ژائو و همکاران روشی تحت عنوان مرز انطباقی مکرر[2] بر گرفته از روش تفاضل مربعات[3] را جهت فرمول‌بندی شرایط مرزی سر آزاد تیرها با استفاده از روشDSC پیشنهاد کردند[۱۶]. شیوه پیشنهادی این محققین، الگوریتم نسبتا مناسبی را برای تحلیل ارتعاشی تیر طره‌ای اولر برنولی ارائه می‌داد. بعدها در سال ۲۰۱۰ وانگ و همکاران روش قوی‌تری برای اعمال شرایط مرزی سر آزاد تیرها و ورق‌ها ارائه نمودند که نسبت به راه‌کارهای قبلی از حجم محاسبات کمتر و دقت بالاتری در تحلیل برخوردار بود[۱۷]. آنها روش پیشنهادی خود را برای آنالیز تیر تیموشنکو که شرایط مرزی سر آزاد در آن پیچیده‌تر است، بسط دادند[۱۸]. در سال ۲۰۱۴ مولفین مقاله حاضر ارتعاش آزاد اعضای غیرمنشوری با شرایط مرزی مختلف را با استفاده از روش DSC فرمول بندی نمودند[۱۹]. اخیرا کارا و همکاران در سال ۲۰۱۹ حل مسائل ارتعاش و آکوستیک یک بعدی با شرایط مرزی امپدانس[4] را توسط الگوریتم DSC مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند[۲۰].

مرور منابع و مطالعات گذشته نشان می‌دهد که مساله فرمول‌بندی شرایط مرزی پیچیده در سازه‌های مختلف جهت حل با استفاده از روش نوین DSC همچنان موضوع جدیدی بوده و از ظرفیت پژوهشی بالایی برخوردار است. یکی از مسائل متداول در مهندسی سازه، تحلیل ارتعاشی دیوارهای برش کوپله با استفاده از مدل‌های یک بعدی جهت کاهش حجم محاسبات می‌باشد[۲۷-۲۴]. تحلیل مدل مذکور با استفاده از روش DSC به دلیل بغرنج بودن شرایط مرزی مربوطه امکان پذیر نیست. از آنجایی که تا کنون برای اعمال شرایط مرزی دیوارهای برشی کوپله ایده‌ای ارائه نشده است، این تحقیق با هدف پیشنهاد یک راه‌کار مناسب برای اعمال معادلات پیچیده مرز یاد شده در الگوریتم همپیچی منفرد گسسته انجام گردید. بدین منظور از بسط تیلور جهت گسسته‌سازی شرایط مرزی مدل یک بعدی دیوارهای برشی کوپله استفاده شد. در ادامه ابتدا روش عددی DSC و سپس شکل یک بعدی معادلات دیفرانسیل حاکم و شرایط مرزی دیوار برشی کوپله معرفی می‌گردند. پس از آن نحوه گسسته‌سازی معادلات حاکم و راه‌کار پیشنهادی جهت اعمال شرایط مرزی ارائه خواهد شد. در انتها نیز با تحلیل چند نمونه موردی، صحت‌سنجی و کارایی روش پیشنهادی و همچنین توانایی الگوریتم مذکور در تحلیل مساله یاد شده مورد بررسی قرار خواهد گرفت. همچنین توانایی الگوریتم DSC از نظر سرعت و حجم محاسبات و نیز میزان حافظه کامپیوتری مورد نیاز، نسبت به شیوه‌های عددی متداول دیگر مورد مقایسه و ارزیابی قرار می‌گیرد.

---
[1] Discrete singular convolution
[2] Iteratively matched boundary method
[3] Differential quadrature method
[4] Impedance boundaries

۲- روش همپیچی منفرد گسسته

الگوریتم DSC شیوه عددی نسبتا جدیدی است که برای اولین بار توسط وی معرفی شد[۱۴]. پس از آن DSC در حوزه‌های مختلف علوم مهندسی بکار گرفته شد. کارایی و دقت این روش در تحلیل مسائل گوناگون، آن را به شیوه‌ای مناسب و قابل اطمینان جهت آنالیز عددی بدل نموده است. در این روش مشابه سایر روش‌های عددی، جملات یک معادله دیفرانسیل به وسیله عبارات جبری تقریب زده می‌شوند که به این ترتیب معادله دیفرانسیل به یک معادله جبری معمولی تبدیل می شود. اساس ریاضی الگوریتم DSC تئوری توزیع[5] و موجک‌ها[6] می‌باشد. درصورتی که T تابع توزیع و $\eta(t)$ المانی از فضای تابع آزمون باشد، انتگرال همپیچی T,η به صورت زیر تعریف می‌گردد[۱۵]:

$$F(t) = (T * \eta)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} T(t-x)\eta(x)dx \tag{۱}$$

در این رابطه $T(t-x)$ هسته منفرد نامیده می شود. از هسته‌های منفرد مختلفی در الگوریتم DSC استفاده می شود که یکی از کارآمدترین آنها هسته تنظیم شده شانون[7] (RSK) می باشد[۱۸-۲۲]. هسته RSK در فضای یک بعدی، به صورت زیر تعریف می شود:

$$\delta_{\Delta,\sigma}(x-x_k) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\Delta}\right)(x-x_k)}{\left(\frac{\pi}{\Delta}\right)(x-x_k)} \exp\left[\frac{(x-x_k)}{2\sigma^2}\right] \tag{۲}$$

Δ، فاصله بین نقاط شبکه‌بندی و σ، پارامتر تنظیم‌کننده هسته شانون می‌باشد که به مقدار Δ وابسته است. x_k مختصات گره kام در روی محور مختصات x است.

جهت استفاده از انتگرال همپیچی با تقریبی مناسب می توان رابطه (۱) را به صورت گسسته شده زیر نوشت[۱۵]:

$$F_\alpha(t) = \sum_k T(t-x_k) f(x_k) \tag{۳}$$

در این معادله، $F_\alpha(t)$ تقریب انتگرال همپیچی $F(t)$ است و $\{x_k\}$ مختصات نقاط شبکه‌بندی می‌باشد که معادله حاکم روی آنها تعریف می‌گردد.

اگر تابع $f(x)$ مجهول مساله باشد، برای استفاده از روش DSC، این تابع باید گسسته شود و مشتقات آن در یک محیط شبکه‌بندی شده در نقاط x_i روی بازه $[x_i - x_m, x_i + x_m]$ تخمین زده شوند. این تخمین به کمک شکل منفصل‌شده انتگرال همپیچی، معادله (۳)، صورت می‌پذیرد. به عبارت ساده‌تر برای محاسبه مشتق مرتبه nام تابع $f(x)$ در گره با مختصات x_i می‌توان نوشت[۱۵]:

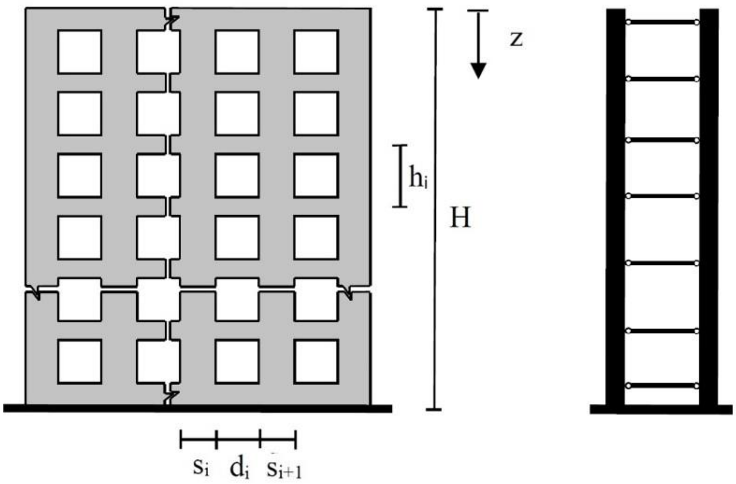
$$\left.\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right|_{x=x_i} = f^n(x_i) \approx \sum_{k=-m}^{m} \delta^n_{\Delta,\sigma}(x_i - x_k) f(x_k); n = 0,1,2,... \tag{۴}$$

در این رابطه $f(x_k)$ مقدار تابع مورد نظر در نقاط شبکه‌بندی شده روی بازه $[x_i - x_m, x_i + x_m]$ می‌باشد و $\delta^n_{\Delta,\sigma}(x_i - x_k)$ مشتق مرتبه nام هسته مورد استفاده است. $2m+1$ عرض باند محاسباتی است که معمولا از دامنه محاسباتی کوچک‌تر در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه ماتریس تقریب حاصله یک ماتریس قطری با عرض باند $2m+1$ خواهد بود که موجب افزایش سرعت روش و کاهش حجم محاسبات به‌خصوص در محیط‌های با تعداد گره‌های زیاد می‌گردد.

---
[5] Theory of distributions
[6] Wavelet analysis
[7] Regularized Shannon kernel

۳- معادلات حاکم و شرایط مرزی

عملکرد دیوارهای برشی کوپله مشابه تیر اولر- برنولی یا تیر تیموشنکو نیست. بلکه به صورت ترکیبی از هر دو مدل می‌باشد[۲۴]. به تیر با این حالت رفتاری اصطلاحا تیر ساندویچی گفته می‌شود. در چنین شرایطی عملکرد کوپله تیر ساندویچی موجب می‌گردد کل سیستم دیوار برشی سختی بیشتری نسبت به مجموع سختی چند دیوار برشی مجزا داشته باشد و این مجموعه، نیروی برشی و لنگر خمشی پایه بزرگ‌تری نسبت به چند دیوار مجزا تحمل نماید. شکل (۱) نمای شماتیک دیوار برشی کوپله و تیر ساندویچی معادل آن را نشان می‌دهد.



شکل۱ : دیوار برشی کوپله و تیر ساندویچی معادل آن[۲۴]

معادله حاکم بر ارتعاش آزاد دیوار برشی کوپله به صورت زیر می‌باشد:

$$EI\frac{\partial^4\Psi(z,t)}{\partial z^4}-k_s\frac{\partial^2\Psi(z,t)}{\partial z^2}+k_s\frac{\partial^2\Phi(z,t)}{\partial z^2}+\gamma\frac{\partial^2\Psi(z,t)}{\partial t^2}=0 \quad (۵)$$

در معادله (۵)، γ، Ψ و $\frac{\partial\Phi(z,t)}{\partial z}$ به ترتیب جرم واحد طول مصالح، تابع تغییر شکل و زاویه دوران خمشی دیوار برشی کوپله می‌باشند. t پارامتر زمان و z متغیر مکان مطابق با شکل ۱ می‌باشد. EI مجموع صلبیت‌های خمشی دیوارهای برشی است. k_s نیز صلبیت برشی معادل دیوار برشی کوپله است که نحوه محاسبه آن بعدا ذکر خواهد شد.

با استفاده از تکنیک جداسازی متغیرها می‌توان Ψ و Φ را به صورت توابعی از فرکانس زاویه‌ای دیوار برشی کوپله (ω) نوشت:

$$\Psi(z,t)=\overline{\Psi}(z)\sin(\omega t) \quad (۶)$$

$$\Phi(z,t)=\overline{\Phi}(z)\sin(\omega t) \quad (۷)$$

با جای‌گذاری معادلات (۶) و (۷) در معادله حاکم بر ارتعاش دیوار برشی کوپله، رابطه (۵) به صورت زیر در خواهد آمد:

$$EI\frac{d^4\overline{\Psi}}{dz^4}-k_s\frac{d^2\overline{\Psi}}{dz^2}+k_s\frac{d^2\overline{\Phi}}{dz^2}+\gamma\omega^2\overline{\Psi}=0 \quad (۸)$$

از طرفی، معادله نیروی برشی تیر ساندویچی معادل نیز به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$D\frac{d^3\overline{\Phi}}{dz^3}+k_s\frac{d\overline{\Psi}}{dz}-k_s\frac{d\overline{\Phi}}{dz}=0 \tag{۹}$$

در معادله اخیر، D صلبیت خمشی کلی دیوار برشی کوپله می‌باشد که از طریق رابطه (۱۰) به‌دست می‌آید:

$$D=\sum_{j=1}^{n}EA_j{r_j}^2 \tag{۱۰}$$

که A_j و r_j به ترتیب سطح مقطع jامین دیوار برشی و فاصله مرکز آن از مرکز سطح کل دیوارها می‌باشند.

k_s در روابط (۸) و (۹) صلبیت برشی معادل دیوار برشی کوپله است که با استفاده از معادله زیر تعیین می‌شود[۲۵]:

$$k_s=\frac{1}{\frac{1}{R_c}+\frac{1}{R_b}} \tag{۱۱}$$

برای دیوار برشی کوپله با تعداد n دیوار برشی و n-1 تیر اتصال، R_c و R_b به صورت زیر به‌دست می‌آیند[۲۶]:

$$R_c=\sum_{j=0}^{n}\frac{12EI_{cj}}{{h_i}^2} \tag{۱۲}$$

$$R_b=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{6EI_{bj}\left[\left(d_j+s_j\right)^2+\left(d_j+s_{j+1}\right)^2\right]}{{d_j}^3h_i\left(1+\dfrac{12kEI_{bj}}{GA_{bj}{d_j}^2}\right)} \tag{۱۳}$$

در معادلات بالا EI_{bj} و GA_{bj} به ترتیب صلبیت خمشی تیرهای پیوند و صلبیت برشی اتصال آنها به یکدیگر می‌باشد. k ضریب شکل برشی مقطع است که برای مقاطع مستطیلی ۱/۲ در نظر گرفته می‌شود. سایر پارامترها در شکل ۱ مشخص شده‌اند.

برای عمومیت دادن به معادلات حاکم می‌توان آنها را به صورت بی‌بعد نوشت. شکل بی‌بعد معادلات (۸) و (۹) به صورت زیر است:

$$\frac{d^4\overline{\Psi}}{d\xi^4}-k^2\frac{d^2\overline{\Psi}}{d\xi^2}+k^2\frac{d^2\overline{\Phi}}{d\xi^2}+m\overline{\Psi}=0 \tag{۱۴}$$

$$\frac{d^3\overline{\Phi}}{d\xi^3}+s^2\frac{d\overline{\Psi}}{d\xi}-s^2\frac{d\overline{\Phi}}{d\xi}=0 \tag{۱۵}$$

در معادلات (۱۴) و (۱۵) پارامترهای بدون بعد ξ، k، s و m به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\xi=\frac{z}{H},\quad k=H\sqrt{\frac{k_s}{EI}},\quad s=H\sqrt{\frac{k_s}{D}},\quad m=\frac{\gamma}{EI}H^4\omega^2 \tag{۱۶-الف، ب، ج، د}$$

شرایط مرزی انتهای گیردار و سر آزاد دیوار برشی کوپله به ترتیب در معادلات (۱۷) و (۱۸) ارائه شده‌اند:

$$\overline{\Psi}(1)=0 \tag{۱۷- الف}$$

$$\frac{d\overline{\Psi}(1)}{d\xi}=0 \tag{۱۷- ب}$$

$$\frac{d\overline{\Phi}(1)}{d\xi}=0 \tag{۱۷- ج}$$

$$\frac{d^2\overline{\Psi}(0)}{d\xi^2}=0 \quad \text{(۱۸- الف)}$$

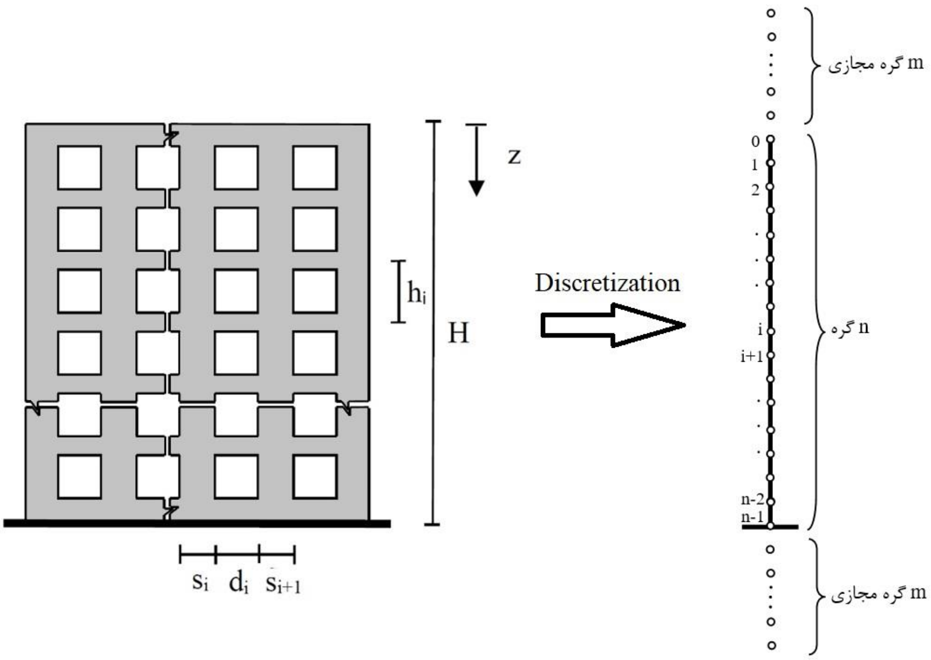
$$\frac{d^2\overline{\Phi}(0)}{d\xi^2}=0 \quad \text{(۱۸- ب)}$$

$$\frac{d^3\overline{\Psi}(0)}{d\xi^3}-k^2\left(\frac{d\overline{\Psi}(0)}{d\xi}-\frac{d\overline{\Phi}(0)}{d\xi}\right)=0 \quad \text{(۱۸- ج)}$$

۴- گسسته‌سازی معادلات حاکم به روش DSC و اعمال شرایط مرزی

۴-۱- ماتریس ضرایب DSC

در تحقیق حاضر تلاش بر این است که شرایط مرزی مساله (معادلات ۱۷ و ۱۸) برای استفاده در الگوریتم DSC گسسته‌سازی گردد. گسسته‌سازی معادلات حاکم به روش DSC مستلزم گره‌بندی محیط مساله است. در روش DSC متغیر میدان در هر نقطه بر اساس مقادیر $2m$ گره مجاور آن تخمین زده می‌شود. با توجه به این موضوع، لازم است که مش‌بندی محیط مساله به تعداد m گره در خارج از هر دو مرز ادامه پیدا کند. شکل (۲) نحوه مش‌بندی محیط و گره‌های مجازی خارج مرز را برای مدل یک بعدی دیوار برشی کوپله نشان می‌دهد. بنابراین در صورتی که در محیط مساله n گره جهت مش‌بندی ایجاد گردد، تعداد کل گره‌ها $n+2m$ خواهد بود.



شکل۲ : دیوار برشی کوپله و مدل یک بعدی گسسته‌سازی شده معادل آن

به این ترتیب محیط مساله یعنی $1 \le \xi \le 0$ به $n-1$ قسمت مساوی تقسیم بندی شده و مختصات گره‌ها در این ناحیه به صورت بی‌بعد $\xi_{n-1} > \ldots > \xi_0$ می‌باشد.

همچنین تعداد $2m$ گره مجازی در خارج از محیط مساله با مختصات بی‌بعد $\xi_{-1} > \ldots > \xi_{-m}$ و $\xi_{n+m-1} > \ldots > \xi_n$ در نظر گرفته می‌شود.

در این مساله مجهولات مساله بردارهای $\overline{\Psi}$ و $\overline{\Phi}$ می‌باشند که بر اساس گره‌بندی شکل (۲) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\left\{\overline{\Psi}\right\}=\begin{bmatrix}\overline{\Psi}(\xi_{-m})\\ \vdots\\ \overline{\Psi}(\xi_0)\\ \vdots\\ \overline{\Psi}(\xi_{n-1})\\ \vdots\\ \overline{\Psi}(\xi_{n-1+m})\end{bmatrix} \quad , \quad \left\{\overline{\Phi}\right\}=\begin{bmatrix}\overline{\Phi}(\xi_{-m})\\ \vdots\\ \overline{\Phi}(\xi_0)\\ \vdots\\ \overline{\Phi}(\xi_{n-1})\\ \vdots\\ \overline{\Phi}(\xi_{n-1+m})\end{bmatrix} \tag{۱۹}$$

بر این اساس معادله (۴) برای مختصات گرهی به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\left.\frac{d^{(n)}f(\xi)}{d\xi^{(n)}}\right|_{\xi=\xi_i} \approx \sum_{k=-m}^{m}\delta_{\Delta,\sigma}^{(n)}(\xi_i-\xi_{i+k})\,f(\xi_{i+k})=\sum_{k=-m}^{m}\lambda_{i,k}^{(n)}\,f(\xi_{i+k}) \tag{۲۰}$$

که در آن $\lambda_{i,k}^{(n)}$ ضرایب وزن مشتق مرتبه nام تابع f در گره‌ای به مختصات ξ_i می‌باشد. با توجه به معادله ۲۰ تعداد $2m+1$ ضریب وزنی جهت تخمین مشتق مرتبه nام تابع f در گره‌ای به مختصات ξ_i وجود دارد. این ضرایب را می‌توان با بردار $\left\lfloor\lambda_{i,-m}^{(n)},\ldots,\lambda_{i,0}^{(n)},\ldots,\lambda_{i,m}^{(n)}\right\rfloor$ نشان داد. از آنجایی که فاصله بین نقاط گرهی یکسان است، ضرایب وزنی کلیه گره‌ها مشابه خواهند بود. بنابراین می‌توان اندیس i را از $\lambda_{i,k}^{(n)}$ حذف کرد:

$$\lambda_{i,k}^{(n)}=\lambda_k^{(n)} \qquad k=-m,\ldots,0,\ldots,m \qquad \forall i\in\{0,1,2,\ldots,n-1\} \tag{۲۱}$$

بنابراین معادله (۲۰) به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$f^{(n)}(\xi_i)=\sum_{k=-m}^{m}\lambda_k^{(n)}\,f(\xi_{i+k}) \tag{۲۲}$$

بنابراین ماتریس ضرایب DSC، $\left[\Gamma^{(n)}\right]$، جهت گسسته‌سازی مشتق مرتبه nام تابع $f(\xi)$ در کل گره‌های محیط مساله به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\left[\Gamma^{(n)}\right]_{i,j}=\begin{cases}\lambda_{j-i-m}^{(n)} & 0\le j-i\le 2m\\ 0 & otherwise\end{cases} \quad , \quad i=1,2,\ldots,n \quad , \quad j=1,2,..n+2m \tag{۲۳}$$

با این تعریف، مشتقات موجود در معادلات ۱۷ و ۱۸ به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d^4\overline{\Psi}(\xi_i)}{d\xi^4}=\left[\Gamma^{(4)}\right]\left\{\overline{\Psi}\right\} \tag{۲۴-الف}$$

$$\frac{d^2\overline{\Psi}(\xi_i)}{d\xi^2}=\left[\Gamma^{(2)}\right]\left\{\overline{\Psi}\right\} \tag{۲۴-ب}$$

$$\frac{d\overline{\Psi}(\xi_i)}{d\xi}=\left[\Gamma^{(1)}\right]\left\{\overline{\Psi}\right\} \tag{۲۴-ج}$$

$$\frac{d^3\overline{\Phi}(\xi_i)}{d\xi^3}=\left[\Gamma^{(3)}\right]\left\{\overline{\Phi}\right\} \tag{۲۵-الف}$$

$$\frac{d^2\overline{\Phi}(\xi_i)}{d\xi^2}=\left[\Gamma^{(2)}\right]\left\{\overline{\Phi}\right\} \tag{۲۵-ب}$$

$$\frac{d\overline{\Phi}(\xi_i)}{d\xi}=\left[\Gamma^{(1)}\right]\left\{\overline{\Phi}\right\} \tag{۲۵-ج}$$

جهت تشریح بهتر روابط اخیر، شکل بسط یافته معادله ۲۴-الف برای نمونه در زیر آمده است:

$$\frac{d^4\overline{\Psi}(\xi_i)}{d\xi^4}=\left[\Gamma^{(4)}\right]\left\{\overline{\Psi}\right\}=\begin{bmatrix}\lambda_{-m}^{(4)} & \cdots & \lambda_{m}^{(4)} & & & \\ & \lambda_{-m}^{(4)} & \cdots & \lambda_{m}^{(4)} & & \\ & & \ddots & & \ddots & \\ & & & \lambda_{-m}^{(4)} & \cdots & \lambda_{m}^{(4)}\end{bmatrix}_{(n)(2m+n)}\times\begin{bmatrix}\overline{\Psi}(\xi_{-m})\\ \vdots\\ \overline{\Psi}(\xi_0)\\ \vdots\\ \overline{\Psi}(\xi_{n-1})\\ \vdots\\ \overline{\Psi}(\xi_{n-1+m})\end{bmatrix}_{(2m+n)(1)} \qquad (۲۶)$$

۴-۲- راه‌کار پیشنهادی جهت اعمال شرایط مرزی

در این بخش به تشریح راه‌کار پیشنهادی برای نحوه اعمال شرایط مرزی در حل مساله مورد نظر با استفاده از الگوریتم DSC پرداخته می‌شود. از آنجایی که معادلات حاکم فقط برای n گره درون محیط مساله برقرار هستند، نوشتن معادلات برای این گره‌ها منجر به یک دستگاه n معادله با $n+2m$ مجهول می‌شود. برای حل دستگاه معادلات حاکم بایستی تعداد مجهولات نیز به تعداد n تقلیل یابد. این هدف با اعمال شرایط مرزی در معادلات گسسته‌سازی شده تحقق می‌یابد. به بیان ساده‌تر در این بخش هدف اصلی حذف مجهولات مساله ($\overline{\Psi}$ و $\overline{\Phi}$) در $2m$ گره خارج از مرزها می‌باشد. مقادیر توابع $\overline{\Psi}$ و $\overline{\Phi}$ در $2m$ نقطه گرهی مجازی خارج از مرز بایستی بر اساس مقادیر مربوط به نقاط داخلی محیط مساله تعیین گردند. این امر به کمک روابط مربوط به شرایط مرزی صورت می‌پذیرد. برای اعمال شرایط مرزی باید بتوان مقادیر مجهولات در m گره موهومی خارج از هر دو مرز را به طریقی به مقادیر داخلی مرتبط نمود. برای این منظور در تحقیق حاضر استفاده از بسط تیلور به شکل زیر پیشنهاد می‌شود:

$$T(-\xi)=T(\xi)+T'(0)(-2\xi)+T'''(0)(-\frac{\xi^3}{3}) \qquad (۲۷)$$

رابطه (۲۷) شکل خلاصه شده بسط تیلور می‌باشد که T در آن می‌تواند هر یک از پارامترهای مجهول $\overline{\Psi}$ یا $\overline{\Phi}$ باشد. به این ترتیب به کمک معادله ۲۷ و مطابق با توضیحاتی که در ادامه خواهد آمد، هر یک از شرایط مرزی حاکم بر مساله به سادگی قابل اعمال خواهد بود:

۴-۲-۱- شرایط مرزی سر آزاد

با اعمال رابطه (۴) در معادله (۱۸- الف) رابطه زیر حاصل خواهد شد:

$$\frac{d^2\overline{\Psi}(0)}{d\xi^2}=\overline{\Psi}''(0)=\sum_{k=-m}^{k=m}\lambda_k^{(2)}\overline{\Psi}(\xi_k)=0 \qquad (۲۸)$$

که در آن $\lambda_k^{(2)}$ ضرایب وزنی مربوط به گره مرزی سر آزاد (ξ=0) است که از طریق مشتق مرتبه دوم هسته RSK نسبت به ξ به‌دست می‌آید.

$$\lambda_k^{(2)}=\delta_{\Delta,\sigma}^2(0-\xi_k) \qquad (۲۹)$$

با توجه به این‌که $\lambda_{-k}^{(2)}=\lambda_k^{(2)}$ است، استفاده از رابطه (۲۷) در معادله (۲۸) منجر به معادله (۳۰) خواهد شد:

$$\overline{\Psi}''(0)=\sum_{k=1}^{k=m}\lambda_k^{(2)}\left[2\overline{\Psi}(\xi_k)+\overline{\Psi}'(0)(-2\xi_k)+\overline{\Psi}'''(0)(\frac{-\xi_k^{\ 3}}{3})\right]+\lambda_0^{(2)}\overline{\Psi}(0)=0 \qquad (۳۰)$$

رابطه (۱۸- ج) را می‌توان به شکل معادله (۳۱) بازنویسی کرد:

$$\overline{\Psi}'''(0) = K^2\overline{\Psi}'(0) - K^2\overline{\Phi}'(0) \tag{۳۱}$$

جای‌گذاری رابطه (۳۱) در معادله (۳۰) منجر به رابطه زیر می‌شود:

$$\overline{\Psi}'(0) = \frac{\lambda_0^{(2)}\overline{\Psi}(0) + \sum_{k=1}^{k=m} 2\lambda_k^{(2)}\overline{\Psi}(\xi_k) + K^2\overline{\Phi}'(0)(BN)}{BH} \tag{۳۲}$$

که در آن BN و BH به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$BN = \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k^{(2)} \frac{\xi_k^{\ 3}}{3} \tag{۳۳}$$

$$BH = \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k^{(2)} (2\xi_k + K^2 \frac{\xi_k^{\ 3}}{3}) \tag{۳۴}$$

چنانچه معادله (۴) در رابطه (۱۸- ب) جای‌گذاری شود، معادله (۳۵) به‌دست می‌آید:

$$\frac{d^2\overline{\Phi}(0)}{d\xi^2} = \overline{\Phi}''(0) = \sum_{k=-m}^{k=m} \lambda_k^{(2)}\overline{\Phi}(\xi_k) = 0 \tag{۳۵}$$

اگر بسط تیلور برای زوایای دوران فقط تا تقریب مشتق اول نوشته شود (معادله ۳۶)، رابطه (۳۷) به راحتی دست می‌آید:

$$\overline{\Phi}(-\xi) = \overline{\Phi}(\xi) + \overline{\Phi}'(0)(-2\xi) \tag{۳۶}$$

$$\overline{\Phi}'(0) = \frac{\lambda_0^{(2)}\overline{\Phi}(0) + \sum_{k=1}^{k=m} 2\lambda_k^{(2)}\overline{\Phi}(\xi_k)}{BM} \tag{۳۷}$$

که در آن BM به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$BM = \sum_{k=1}^{k=m} \lambda_k^{(2)} (2\xi_k) \tag{۳۸}$$

در این صورت با استفاده از روابط (۳۱)، (۳۲) و (۳۷)، مشتق سوم تابع تغییر شکل در مرز را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\overline{\Psi}'''(0) = \frac{k^2\left(B_{00}\overline{\Psi}(0) + \sum_{k=1}^{k=m} 2B_{0k}\overline{\Psi}(\xi_k)\right) + k^2\overline{\Phi}'(0)(BM)}{BH} \tag{۳۹}$$

به این ترتیب با بکار گیری معادلات (۳۲)، (۳۷) و (۳۹) در رابطه (۲۷) می‌توان مقادیر کلیه گره‌های خارج مرز سر آزاد را به صورت تابعی از گره‌های داخلی نوشت. در واقع بر اساس راه‌کار ارائه شده، به کمک سری تیلور شرایط مرزی سر آزاد دیوار برشی کوپله که تلفیقی از تیر اولر و تیر تیموشنکو می‌باشد، اعمال گردید. در صورت پیاده سازی این شرایط در شکل گسسته معادلات حاکم بر ارتعاش آزاد دیوار برشی کوپله می‌توان فرکانس‌های طبیعی دیوار را که جزء مشخصات اصلی ارتعاش سازه محسوب می‌شوند و در آنالیزهای دینامیکی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند، با حل صریح معادلات به‌دست آورد. این مهم منوط به اعمال شرایط مرزی انتهای گیردار سازه نیز می‌باشد که از پیچیدگی چندانی برخوردار نیست و در ادامه به آن پرداخته می‌شود.

۴-۲-۲- شرایط مرزی انتهای گیردار

با بسط متقارن مقادیر تغییر شکل، $\overline{\Psi}$، در نقاط خارجی نسبت به نقاط داخلی، به راحتی می‌توان معادله (۱۷- ب) را اعمال نمود. برای برقراری رابطه (۱۷- ج) نیز می‌توان از بسط متقارن مقادیر زاویه دوران، $\overline{\Phi}$، برای نقاط خارجی نسبت به نقاط داخلی استفاده کرد. اما اعمال معادله (۱۷- الف) در این مرز قدری تامل برانگیز است. زیرا تغییر شکل دیوار برشی کوپله نسبت به زاویه دوران در این مرز یک مجهول کمتر دارد. این مساله از آنجا ناشی می‌شود که مقدار تغییر شکل در مرز گیردار مطابق این معادله صفر است. حال آنکه زاویه دوران در این مرز جزء مجهولات مساله به شمار می‌آید. جهت رفع این مشکل می‌بایست شرایط مرزی معادلات (۱۷) را در معادله (۱۵) اعمال نمود. به این ترتیب معادله (۱۵) به شکل زیر در خواهد آمد:

$$\frac{d^3\overline{\Phi}(0)}{d\xi^3}=0 \tag{۴۰}$$

با اعمال معادله (۴) در رابطه (۴۰)، معادله (۴۱) به‌دست خواهد آمد:

$$\frac{d^3\overline{\Phi}(1)}{d\xi^3}=\overline{\Phi}'''(1)=\sum_{k=-m}^{k=m}\lambda_k^{(3)}\overline{\Phi}(\xi_{n+k-1})=0 \tag{۴۱}$$

که در آن $\lambda_k^{(3)}$ ضرایب وزنی مربوط به گره سر گیردار ($\xi=\xi_{n-1}=1$) است و از مشتق سوم هسته RSK نسبت به ξ به‌دست می‌آید:

$$\lambda_k^{(3)}=\delta^3_{\Delta,\sigma}(\xi-\xi_{n+k-1})\Big|_{\xi=\xi_{n-1}} \tag{۴۲}$$

از آنجایی که $\lambda_{-k}^{(3)}=-\lambda_k^{(3)}$ است و در مورد $\overline{\Phi}$ها بسط متقارن بین نقاط درونی و بیرونی مرز برقرار می‌باشد، معادله (۴۱) منجر به رابطه زیر می‌گردد:

$$\overline{\Phi}(1)=0 \tag{۴۳}$$

۴-۳- شکل نهایی معادلات حاکم پس از اعمال شرایط مرزی

پس از اعمال شرایط مرزی در ماتریس‌های ضرایب DSC، مشتقات توابع $\overline{\Psi}$ و $\overline{\Phi}$ موجود در روابط ۱۷ و ۱۸ برای n گره داخلی را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\frac{d^4\overline{\Psi}(\xi_i)}{d\xi^4}=\left[\Gamma_{\overline{\Psi}}^{(4)}\right]\left\{\overline{\Psi}\right\} \tag{۴۴-الف}$$

$$\frac{d^2\overline{\Psi}(\xi_i)}{d\xi^2}=\left[\Gamma_{\overline{\Psi}}^{(2)}\right]\left\{\overline{\Psi}\right\} \tag{۴۴-ب}$$

$$\frac{d\overline{\Psi}(\xi_i)}{d\xi}=\left[\Gamma_{\overline{\Psi}}^{(1)}\right]\left\{\overline{\Psi}\right\} \tag{۴۴-ج}$$

$$\frac{d^3\overline{\Phi}(\xi_i)}{d\xi^3}=\left[\Gamma_{\overline{\Phi}}^{(3)}\right]\left\{\overline{\Phi}\right\} \tag{۴۵-الف}$$

$$\frac{d^2\overline{\Phi}(\xi_i)}{d\xi^2}=\left[\Gamma_{\overline{\Phi}}^{(2)}\right]\left\{\overline{\Phi}\right\} \tag{۴۵-ب}$$

$$\frac{d\overline{\Phi}(\xi_i)}{d\xi}=\left[\Gamma_{\overline{\Phi}}^{(1)}\right]\left\{\overline{\Phi}\right\} \tag{۴۵-ج}$$

در این روابط $\left[\overline{\Gamma}_{\Psi}^{(n)}\right]$ و $\left[\overline{\Gamma}_{\Phi}^{(n)}\right]$ ماتریس‌های ضرایب DSC هستند که شرایط مرزی در آنها اعمال شده است. به عنوان مثال شکل بسط یافته معادله ۴۴-الف به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{d^4\overline{\Psi}(\xi_i)}{d\xi^4}=\left[\overline{\Gamma}_{\Psi}^{(4)}\right]\left\{\overline{\Psi}\right\}=\begin{bmatrix}\overline{\Gamma}_{\Psi,11}^{(4)} & \overline{\Gamma}_{\Psi,12}^{(4)} & \cdots & \overline{\Gamma}_{\Psi,(1)(n-1)}^{(4)}\\ \overline{\Gamma}_{\Psi,21}^{(4)} & \overline{\Gamma}_{\Psi,22}^{(4)} & \cdots & \overline{\Gamma}_{\Psi,(2)(n-1)}^{(4)}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \overline{\Gamma}_{\Psi,(n-1)(1)}^{(4)} & \overline{\Gamma}_{\Psi,(n-1)(2)}^{(4)} & \cdots & \overline{\Gamma}_{\Psi,(n-1)(n-1)}^{(4)}\end{bmatrix}_{(n-1)(n-1)}\times\begin{Bmatrix}\overline{\Psi}(\xi_0)\\ \vdots\\ \overline{\Psi}(\xi_{n-2})\end{Bmatrix}_{(n-1)(1)} \tag{۴۶}$$

با استفاده از معادلات ۴۴-الف تا ۴۵-ج روابط حاکم، یعنی معادلات ۱۴ و ۱۵ به شکل گسسته نهایی زیر نوشته می‌شوند:

$$\left(\left[\overline{\Gamma}_{\Psi}^{(4)}\right]-K^2\left[\overline{\Gamma}_{\Psi}^{(2)}\right]\right)\left\{\overline{\Psi}\right\}+K^2\left[\overline{\Gamma}_{\Phi}^{(2)}\right]\left\{\overline{\Phi}\right\}+m[I]\left\{\overline{\Psi}\right\}=0 \tag{۴۷}$$

$$\left(\left[\overline{\Gamma}_{\Phi}^{(3)}\right]-s^2\left[\overline{\Gamma}_{\Phi}^{(1)}\right]\right)\left\{\overline{\Phi}\right\}+s^2\left[\overline{\Gamma}_{\Psi}^{(1)}\right]\left\{\overline{\Psi}\right\}=0 \tag{۴۸}$$

در معادله ۴۷، $[I]$ ماتریس یکه می‌باشد.

به منظور ساده سازی، معادلات ۴۷ و ۴۸ به شکل زیر بازنویسی می‌شوند:

$$[A]\left\{\overline{\Psi}\right\}+[B]\left\{\overline{\Phi}\right\}+m[I]\left\{\overline{\Psi}\right\}=0 \tag{۴۹}$$

$$[C]\left\{\overline{\Phi}\right\}+[D]\left\{\overline{\Psi}\right\}=0 \tag{۵۰}$$

که در آن ماتریس‌های ضرایب به صورت زیر هستند:

$$[A]=\left[\overline{\Gamma}_{\Psi}^{(4)}\right]-K^2\left[\overline{\Gamma}_{\Psi}^{(2)}\right] \tag{۵۱}$$

$$[B]=K^2\left[\overline{\Gamma}_{\Phi}^{(2)}\right] \tag{۵۲}$$

$$[C]=\left[\overline{\Gamma}_{\Phi}^{(3)}\right]-s^2\left[\overline{\Gamma}_{\Phi}^{(1)}\right] \tag{۵۳}$$

$$[D]=s^2\left[\overline{\Gamma}_{\Psi}^{(1)}\right] \tag{۵۴}$$

اگر معادله ۵۰ به شکل زیر باز نویسی شود:

$$\left\{\overline{\Phi}\right\}=-[C]^{-1}[D]\left\{\overline{\Psi}\right\} \tag{۵۵}$$

با جای‌گذاری معادله ۵۵ در رابطه ۴۹، معادله ۵۶ حاصل می‌شود که مقادیر ویژه آن فرکانس‌های طبیعی بدون بعد دیوار برشی کوپله خواهند بود:

$$\left([A]-[B][C]^{-1}[D]\right)\left\{\overline{\Psi}\right\}+m[I]\left\{\overline{\Psi}\right\}=0 \tag{۵۶}$$

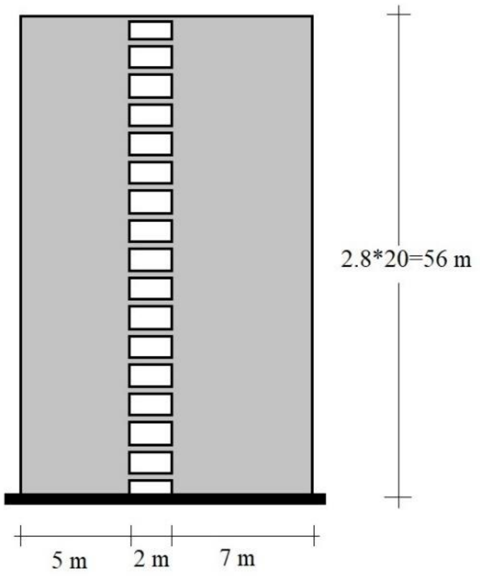
۵- نتایج عددی

در این بخش به صحت‌سنجی و بررسی کارایی الگوریتم همپیچی منفرد گسسته در تحلیل ارتعاش آزاد دیوارهای برشی کوپله پرداخته می‌شود. بطور کلی این قسمت به سه بخش تقسیم می‌شود. در بخش اول اعتبار و صحت الگوریتم پیشنهادی مورد ارزیابی قرار خواهد گرفت. بررسی و مقایسه کارایی روش DSC نسبت به روش‌های عددی متداول FEM، DQM و FDM در بخش دوم ارائه خواهد شد. از آنجایی که پارامتر تنظیم کننده σ یکی از متغیرهای مهم و تاثیرگذار بر دقت روش DSC می‌باشد، لذا در بخش سوم با انجام آنالیز

حساسیت، بازه‌ای قابل قبول برای انتخاب پارامتر تنظیم کننده σ جهت استفاده در مساله ارتعاش آزاد دیوارهای برشی کوپله پیشنهاد خواهد شد.

۵-۱- صحت‌سنجی نتایج

به منظور صحت‌سنجی نتایج حاصل از الگوریتم پیشنهادی، یک برنامه کامپیوتری به کمک نرم افزار MATLAB تهیه شد و سه مدل دیوار برشی مختلف که نتایج تحلیل آنها در مراجع دیگر موجود بود، با استفاده از برنامه تهیه شده مورد تحلیل قرار گرفتند. دیوارهای برشی کوپله ۱ و ۲ دو مدل یک دهانه با ارتفاع ۵۶ و ۳۶ متر هستند. مشخصات هندسی و سازه‌ای این دو مدل در جدول (۱) و به صورت شماتیک در شکل (۳) نشان داده شده است. این دو مدل از مرجع [۲۵] انتخاب شده‌اند.



شکل۳ : دیوار برشی کوپله یک دهانه و ۲۰ طبقه (مدل ۱)[۲۵]

جدول۱ : مشخصات هندسی و مکانیکی دیوارهای برشی کوپله ۱ و ۲

	مدل ۱	مدل ۲
مدول یانگ (N/m^2)	$۳/۶\times۱۰^{۱۰}$	$۲/۱\times۱۰^{۱۰}$
ضریب پواسون	۰/۱۵	۰/۱۵
چگالی جرمی (kg/m^3)	$۲/۴\times۱۰^{۳}$	$۲/۴\times۱۰^{۳}$
تعداد طبقات	۲۰	۱۲
ارتفاع کل سازه (m)	۵۶	۳۶
ضخامت دیوار سمت چپ (m)	۰/۳	۰/۵
عرض دیوار سمت چپ (m)	۵	۷
ضخامت دیوار سمت راست (m)	۰/۳	۰/۵
عرض دیوار سمت راست (m)	۷	۶
عرض تیر اتصال (m)	۰/۳	۰/۵
ارتفاع تیر اتصال (m)	۰/۴	۰/۴۵
طول تیر اتصال (m)	۲	۱/۸

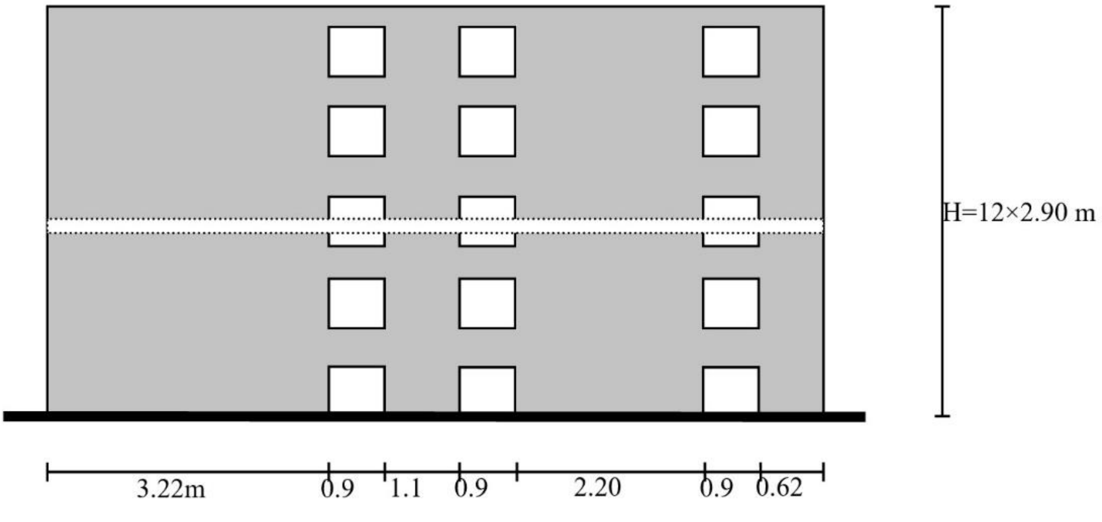
فرکانس‌های ارتعاشی مربوط به چهار مد اول برای دیوارهای برشی ۱ و ۲ با استفاده از روش DSC محاسبه شد و نتایج با فرکانس‌های به‌دست آمده از روش متداول المان محدود (FEM) مقایسه گردید. جدول (۲) مقایسه این نتایج را نشان می‌دهد.

جدول۲ : فرکانس‌های دیوار برشی کوپله مدل‌های ۱ و ۲

شماره مد نوسانی	مدل ۱		مدل ۲	
	DSC	FEM[۲۵]	DSC	FEM[۲۵]
۱	۱۲/۹۰	۱۳/۰۹	۱۹/۷۶	۱۹/۹۷
۲	۵۸/۰۳	۵۵/۵۵	۸۴/۲۷	۸۲/۱۵
۳	۱۳۳/۴۲	۱۲۹/۰۰	۱۹۵/۲۴	۱۹۱/۰۰
۴	۲۴۱/۱۲	۲۲۴/۹۰	۳۲۷/۵۶	۳۱۳/۶۴

همان‌طور که ملاحظه می‌شود نتایج به‌دست آمده از روش DSC مطابقت مناسبی با روش FEM دارد. به طوری که اختلاف بین نتایج دو روش برای مد اول تنها حدود ۱٪ می‌باشد. با افزایش شماره مد نوسانی این اختلاف قدری افزایش می‌یابد به‌گونه‌ای که در مد چهارم به طور میانگین برای دو مدل مورد نظر به حدود ۶٪ می‌رسد. این خطا از آنجا ناشی می‌شود که در مرجع [۲۵] برای تحلیل مساله با استفاده از روش FEM، مدل دو بعدی دیوار برشی کوپله مورد تحلیل قرار گرفته است [۲۵]. این در حالی است که در تحقیق حاضر، معادلات یک بعدی مساله با استفاده از الگوریتم DSC حل شده‌اند. از آنجایی که مدل یک بعدی برای تخمین مدهای نوسانی اصلی سازه معادل‌سازی شده است[۲۵]، بدیهی است که با افزایش مدهای نوسانی، اختلاف حاصل از پاسخ دو مدل بیشتر شود. به بیان دیگر اختلاف بین پاسخ‌ها در مدهای نوسانی بالاتر ناشی از معادلات حاکم به‌کار رفته در تحلیل مساله بوده و ارتباطی به روش عددی مورد استفاده ندارد. به هر حال همان‌طور که ملاحظه می‌شود جواب‌های حاصل از روش DSC برای حل معادلات دیفرانسیل مدل یک بعدی دیوارهای برشی کوپله که موضوع اصلی تحقیق حاضر می‌باشد، از دقت قابل قبولی برخوردار هستند.

به منظور بررسی بیشتر، مثال دیگری مورد تحلیل قرار گرفت. مدل ۳ یک دیوار برشی با سه دهانه و دوازده طبقه می‌باشد که مشخصات هندسی آن در شکل (۴) نشان داده شده است. خصوصیات هندسی و مکانیکی دیوار برشی شامل مدول الاستیسیته، چگالی، ارتفاع تیرهای اتصال و ضخامت دیوارها به ترتیب $2\times10^{10}\,N/m^2$، $2400\ Kg/m^3$، ۳۱ و ۱۶ سانتیمتر می‌باشد. نتایج آنالیز ارتعاش آزاد دیوار مدل ۳ در مراجع [۲۴] و [۲۷] با استفاده از روش‌های DQM و FEM موجود است.



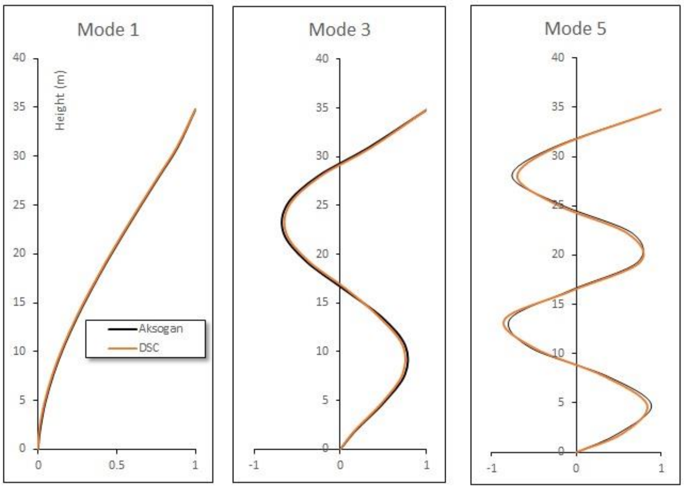
شکل۴ : دیوار برشی کوپله سه دهانه و ۱۲ طبقه (مدل ۳)[۲۴،۲۷]

فرکانس‌های ارتعاشی مربوط به چهار مد نوسانی اول مدل ۳ به کمک برنامه کامپیوتری محاسبه شد. جدول (۳) نتایج حاصل از سه روش DSC، FEM و DQM را برای این مدل نشان می‌دهد. همان‌طور که مشخص است در این مورد نیز جواب‌های حاصل از روش همپیچی منفرد گسسته انطباق بسیار مناسبی با دو روش عددی دیگر دارد. مجددا شایان ذکر است که در روش‌های DSC و DQM دیوار برشی به صورت یک بعدی و در روش FEM به صورت دوبعدی در نظر گرفته شده است.

جدول۳ : فرکانس‌های دیوار برشی کوپله با سه دهانه و دوازده طبقه (مدل ۳)

شماره مد نوسانی	DSC	FEM[۲۷]	DQM[۲۴]
۱	۳/۰۳۶	۳/۰۳۰	۳/۰۷۰
۲	۱۲/۰۹۱	۱۲/۰۰۴	۱۲/۲۸۸
۳	۲۵/۹۷۴	۲۵/۹۶۹	۲۶/۵۳۶
۴	۴۲/۸۶۳	۴۲/۸۸۴	۴۲/۷۳۹

همچنین اشکال مدی اول، سوم و پنجم مربوط به دیوار برشی مدل ۳ محاسبه و با نتایج به‌دست آمده از مرجع [۲۷] مقایسه گردید. شکل (۵) مقایسه این نتایج را نشان می‌دهد. انطباق بسیار خوب بین نتایج دو روش دلیل دیگری بر صحت عملکرد روش DSC در آنالیز ارتعاش آزاد دیوارهای برشی کوپله می‌باشد.



شکل۵ : مقایسه شکل مدهای اول، سوم و پنجم برای دیوار برشی مدل ۳

۵-۲- بررسی کارایی الگوریتم پیشنهادی

در این بخش کارایی الگوریتم DSC مورد تجزیه و تحلیل بیشتری قرار می‌گیرد تا نقاط قوت و ضعف آن نسبت به سه روش عددی متداول تفاضلات محدود (FDM) ، تفاضل مربعات (DQM) و اجزاء محدود (FEM) در حل مساله ارتعاش آزاد دیوارهای برشی کوپله روشن گردد. در تمام آنالیزهای انجام شده در این بخش دیوار برشی مدل ۳ در نظر گرفته شد.

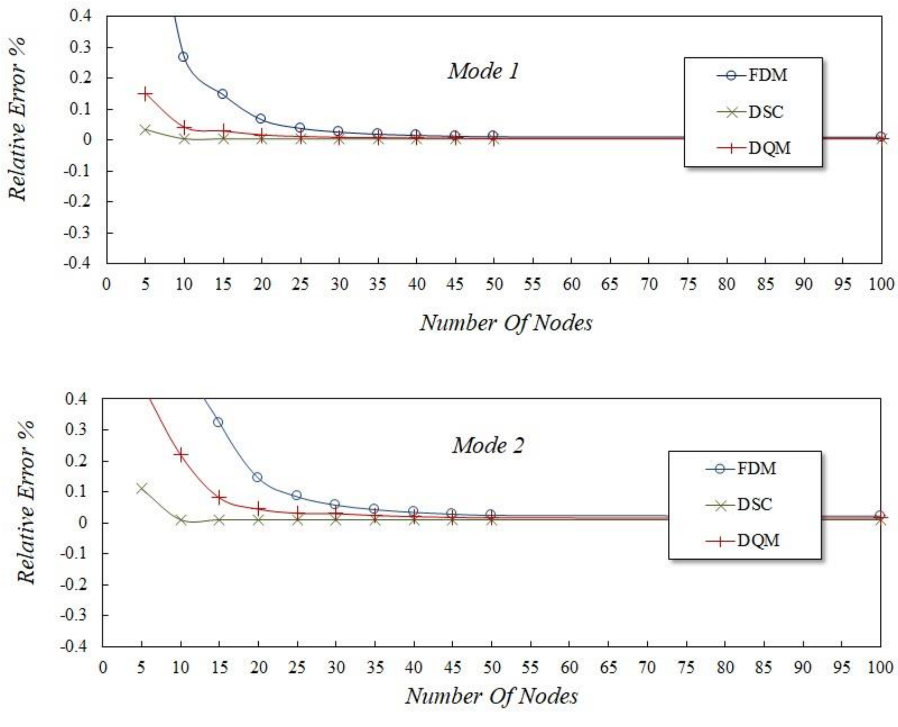
از مشخصه‌های یک روش عددی مناسب این است که علاوه بر دقت نتایج، به حجم عملیات و حافظه کامپیوتری کمتری نسبت به سایر روش‌ها نیاز داشته باشد. در مراجع مختلف، مساله ارتعاش آزاد دیوارهای برشی کوپله با استفاده از روش FEM به صورت دو بعدی و با استفاده از روش‌های DQM و FDM به صورت یک بعدی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است[۸-۱۱، ۲۴-۲۷]. بدیهی است که درنظر گرفتن مساله به صورت دوبعدی و استفاده از المانهای مستطیلی یا مثلثی باعث افزایش دقت نتایج خواهد شد ولی به همان نسبت حجم عملیات و حافظه کامپیوتری مورد نیاز را افزایش می‌دهد. مدل‌های یک بعدی دیوار برشی کوپله تنها در مدهای نوسانی پایین دقت قابل قبولی دارند[۲۵] و در مدهای نوسانی بسیار بالا از دقت آنها کاسته می‌شود. برای مسائل عملی طراحی، استفاده از مدهای نوسانی پایین کفایت می‌کند لذا استفاده از مدل‌های یک بعدی جهت کم کردن حجم عملیات و حافظه مورد نیاز و همچنین افزایش سرعت محاسبات ارجحیت دارد. از آنجایی که معادلات حاکم بر ارتعاش آزاد مدل یک بعدی دیوارهای برشی کوپله در مراجع مختلف با استفاده از روش‌های تفاضلات محدود و تفاضلات مربعات بطور وسیعی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند، لذا در این بخش کارایی روش DSC نسبت به روش‌های متداول FDM و DQM از نظر حجم عملیات، حافظه مورد نیاز و سرعت محاسبات برای مساله مذکور با یکدیگر مقایسه شدند. برای این منظور معادلات حاکم بر مدل یک بعدی دیوار برشی کوپله با استفاده از سه روش DSC، FDM و DQM گسسته‌سازی شده و برنامه کامپیوتری با استفاده از نرم افزار MATLAB تهیه شد. روند گسسته‌سازی و تعیین ماتریس ضرایب با استفاده از روش DQM در مرجع

[۲۴] به تفصیل تشریح شده است. برای گسسته‌سازی معادلات حاکم به روش FDM نیز در گره‌های میانی از فرمول تفاضل مرکزی و در گره‌های مرزی از روابط تفاضل پیشرو و پسرو استفاده گردید. در ادامه به کمک برنامه کامپیوتری تهیه شده، فرکانس‌های ارتعاشی مربوط به دیوار برشی مدل ۳ به ازای تعداد گره‌بندی‌های مختلف با استفاده از سه روش محاسبه شد. از آنجایی که پاسخ تحلیلی دقیق برای مساله مورد مطالعه موجود نیست، لذا برای بررسی روند همگرایی هر روش، نتایج به‌دست آمده از آن روش به ازای تعداد ۵۰۰ گره به عنوان پاسخ مرجع در نظر گرفته شد و درصد خطای نسبی از رابطه زیر محاسبه گردید:

$$\mathrm{Re}lative\ Error = \frac{\left|f_{n=500} - f_n\right|}{f_{n=500}} \times 100 \qquad (۵۷)$$

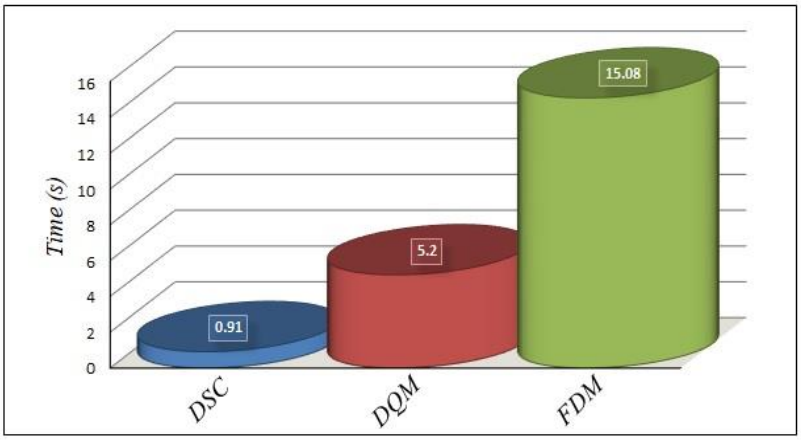
در رابطه اخیر f_n فرکانس ارتعاشی به‌دست آمده توسط هرکدام از روش‌های DSC، FDM و DQM به ازای تعداد n گره می‌باشد.

شکل (۶) روند همگرایی سه روش DSC، FDM و DQM را به ازای گره‌بندی‌های مختلف برای دو مد اول نوسانی نشان می‌دهد. همانگونه که ملاحظه می‌شود، روش DSC به ازای تعداد گره‌های بسیار کمتری (حدود ۱۰ گره) نسبت به دو روش دیگر همگرا می‌شود. روش DQM برای همگرا شدن نیاز به حدود ۳۰ گره دارد و این در حالی است که روش FDM تقریبا با ۵۰ گره به همگرایی می‌رسد. این مقایسه برتری الگوریتم پیشنهادی را نسبت به دو روش متداول دیگر نشان می‌دهد.



شکل۶ : روند همگرایی سه روش DSC، FDM و DQM به ازای گره‌بندی‌های مختلف

به منظور سنجش سرعت محاسبات در سه روش DSC، FDM و DQM ، دیوار برشی مدل ۳ با هریک از برنامه‌های کامپیوتری مربوط به سه روش مذکور اجرا شد. شکل (۷) مدت زمان محاسباتی مورد نیاز هرکدام از روش‌ها برای به‌دست آوردن فرکانس اصلی با خطایی از مرتبه 10^{-7}، به صورت نمودار میله‌ای نمایش می‌دهد. با توجه به شکل ملاحظه می‌شود که الگوریتم پیشنهادی برای همگرایی به مدت زمان کمتری نسبت به دو روش دیگر نیازمند است. برای مثال‌های متعدد نتایج مشابهی به‌دست آمد. بدیهی است با توجه به این‌که روش DSC برای همگرایی به تعداد گره‌های کمتری نیاز دارد درنتیجه ماتریس ضرایب تشکیل شده در این روش نسبت به دو روش دیگر بسیار کوچک‌تر بوده و این موضوع باعث کاهش حجم عملیات محاسباتی خواهد شد.



شکل۷ : مقایسه زمان محاسباتی مورد نیاز با استفاده از سه روش عددی

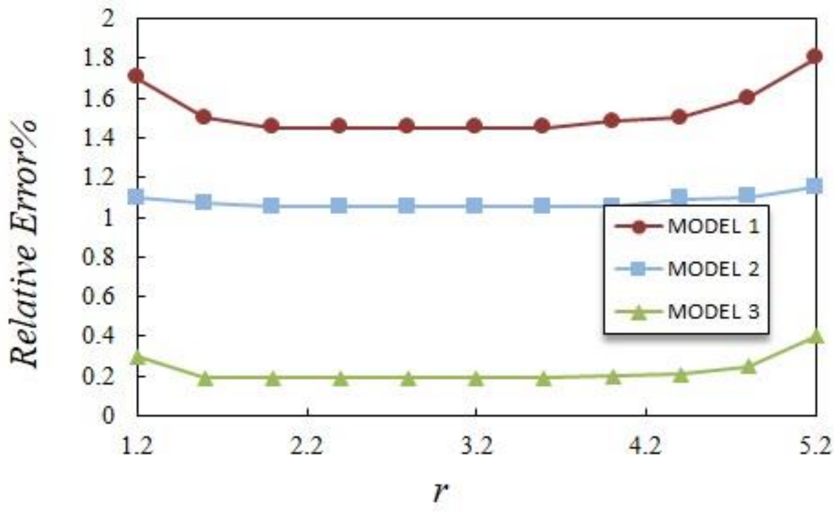
۵-۳- حساسیت سنجی الگوریتم پیشنهادی نسبت به پارامتر σ

یکی از موضوعات مهم در استفاده از الگوریتم DSC، انتخاب مقدار مناسب پارامتر تنظیم کننده σ می‌باشد. مطالعه بسیار جامعی در مرجع [۱۹] جهت تعیین بازه مناسب برای پارامتر σ در تحلیل ارتعاش آزاد مسائل یک بعدی توسط مولفین مقاله حاضر انجام شده است. در صورتی که پارامتر تنظیم کننده به صورت $r=\dfrac{\sigma}{\Delta}$ تعریف شود (Δ فاصله بین نقاط شبکه‌بندی می‌باشد)، بازه $1.6 \le r \le 3.6$ برای مساله ارتعاش آزاد المان‌های یک بعدی منجر به نتایجی با حداقل خطا خواهد شد.

در تحقیق حاضر آنالیز حساسیت الگوریتم DSC نسبت به پارامتر r برای هر سه مدل دیوار برشی انجام شد. برای این منظور برنامه کامپیوتری به ازای مقادیر مختلف پارامتر مذکور اجرا و مقادیر خطای نسبی مربوط به فرکانس مد اول با استفاده از رابطه زیر برای هر یک از سه دیوار برشی محاسبه شد:

$$\text{Relative Error}=\frac{\left|f_{FEM}-f_{DSC}\right|}{f_{FEM}}\times 100 \tag{۵۸}$$

شکل (۸) نتایج این آنالیز را نشان می‌دهد. بررسی نمودارها نشان می‌دهد که اختیار پارامتر r در بازه پیشنهادی $1.6 \le r \le 3.6$ برای حل مساله ارتعاش آزاد دیوارهای برشی کوپله به روش DSC مناسب می‌باشد.



شکل۸ : نتایج آنالیز حساسیت روش DSC نسبت به پارامتر تنظیم کننده r

۶- جمع‌بندی و خلاصه نتایج

در این مقاله مساله ارتعاش آزاد دیوارهای برشی کوپله، با استفاده از الگوریتم جدید همپیچی منفرد گسسته فرمول‌بندی گردید. در این راستا از مدل ریاضی ساده شده یک بعدی سازه، جهت فرمول‌بندی مساله مذکور استفاده شد. سپس به کمک رابطه بسط تیلور، راهکاری جهت گسسته‌سازی و اعمال شرایط مرزی پیشنهاد گردید. به منظور صحت‌سنجی روش پیشنهادی، شکل مودها و فرکانس‌های بدست آمده از روش جدید برای سه مدل عددی مختلف، با نتایج موجود در مراجع پیشین مقایسه گردید. انطباق بسیار خوبی بین نتایج روش جدید با داده‌های موجود در مراجع مذکور مشاهده شد. همچنین جهت ارزیابی کارایی الگوریتم پیشنهادی، نتایج حاصل از روش DSC با جواب‌های بدست آمده از سه روش متداول DQM، FDM و FEM مورد مقایسه قرار گرفت. با استفاده از آنالیز حساسیت، یک بازه مناسب برای مقدار پارامتر تنظیم کننده σ به منظور استفاده در مسائل ارتعاش آزاد دیوارهای برشی کوپله پیشنهاد گردید. به طور کلی، مهم‌ترین دستاوردهای این پژوهش را می‌توان به شرح زیر خلاصه نمود:

۱. بر اساس مطالعه انجام شده بر روی مدل‌های عددی مختلف، این نتیجه حاصل شد که الگوریتم پیشنهادی نسبت به روش‌های متداول DQM و FDM، برای همگرایی به تعداد گره‌های بسیار کمتری در محیط گسسته‌سازی شده نیاز دارد. برای نمونه جهت دستیابی به دقتی از مرتبه 10^{-7}، تعداد گره‌های مورد نیاز در روش جدید در حدود یک سوم روش DQM و یک پنجم روش FDM می‌باشد.

۲. ماتریس ضرایب تشکیل شده در روش پیشنهادی جهت دستیابی به یک دقت مشخص، نسبت به دو روش دیگر بسیار کوچکتر است. این خصوصیت باعث کاهش قابل توجهی در حجم و زمان محاسبات خواهد شد که یکی از مزایای برجسته در روش جدید به شمار می‌رود.

۳. برخلاف روش متداول DQM، ماتریس ضرایب در روش پیشنهادی بصورت قطری می‌باشد. این موضوع باعث تسهیل در محاسبات عددی و حل دستگاه معادلات حاکم خواهد شد.

۴. انتخاب مقدار مناسب برای پارامتر تنظیم کننده هسته ($\sigma = r.\Delta$)، یکی از مسائل مهم در استفاده از الگوریتم DSC می‌باشد. بر اساس آنالیز حساسیت انجام شده بر روی مدل‌های عددی مختلف، این نتیجه حاصل شد که بازه $1.6 \le r \le 3.6$ برای مساله ارتعاش آزاد دیوارهای برشی کوپله منجر به نتایجی با حداقل خطا می‌شود.

با توجه به نتایج به‌دست آمده در این پژوهش، روش پیشنهادی را می‌توان به عنوان یک تکنیک عددی جدید و کارا جهت حل مساله ارتعاش آزاد دیوارهای برشی کوپله به‌کار برد.

مراجع

[1] Ding, R., Tao, M., Nie, X. and Mo, Y. (2018). Analytical model for seismic simulation of reinforced concrete coupled shear walls. Engineering Structures, 168(1): 819-837.

[2] Rosman, R. (1964). Approximate analysis of shear walls subject to lateral loads. In: Proceedings of the American Concrete Institute, 61(6): 717–734.

[3] Cheung, Y., Hutton, S. and Kasemset, C. (1977). Frequency analysis of coupled shear wall assemblies. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 5(2):191-201.

[4] Basu, A. K., Guliani, A. K., Bajaj, R. S., Nagpal, A. K. (1979). Dynamic Characteristics of Coupled Shear Walls. Journal of the Structural Division (ASCE), 105(8): 1637-1652.

[5] Kuang, J. and Chau, C. (1998). Free vibrations of stiffened coupled shear walls. The Structural Design of Tall Buildings, 7(2):135-145.

[6] Aksogan, O., Arslan, H. and Choo, B. (2003). Forced vibration analysis of stiffened coupled shear walls using continuous connection method. Engineering Structures, 25(4): 499-506.

[7] Aksogan, O., Bikce, M., Emsen, E. and Arslan, H. (2007). A simplified dynamic analysis of multi-bay stiffened coupled shear walls. Advances in Engineering Software, 38(8-9): 552-560.

[8] Chaallal, O. (1992). Finite Element Model for Seismic RC Coupled Walls Having Slender Coupling Beams. Journal of Structural Engineering (ASCE), 118(10): 2936-2943.

[9] Bozdogan, K., Ozturk, D. and Nuhoglu, A. (2009). An approximate method for static and dynamic analyses of multi-bay coupled shear walls. The Structural Design of Tall and Special Buildings, 18(1): 1-12.
[10] Kwan, A. K. H. (1993). Mixed finite elements for analysis of coupled shear/core walls. Journal of Structural Engineering (ASCE), 119(59): 1388-1408.
[11] Kwan, A. K. H. (1993). Equivalence of finite elements and analogous frame modules for shear/core wall analysis. Computers & Structures, 57(2): 193-203.
[12] Rashed, Y. (2000). Analysis of building shear walls using boundary elements. Engineering Analysis with Boundary Elements, 24(3): 287-293.
[13] Kim, H. and Lee, D. (2003). Analysis of shear wall with openings using super elements. Engineering Structures, 25(8), pp.981-991.
[14] Wei, G. (1999). Discrete singular convolution for the solution of the Fokker–Planck equation. The Journal of Chemical Physics, 110(18): 8930-8942.
[15] Wei, G. (2001). Discrete singular convolution for beam analysis. Engineering Structures, 23(9): 1045-1053.
[16] Zhao, S., Wei, G. and Xiang, Y. (2005). DSC analysis of free-edged beams by an iteratively matched boundary method. Journal of Sound and Vibration, 284(1-2): 487-493.
[17] Wang, X. and Xu, S. (2010). Free vibration analysis of beams and rectangular plates with free edges by the discrete singular convolution. Journal of Sound and Vibration, 329(10): 1780-1792.
[18] Xu, S. and Wang, X. (2011). Free vibration analyses of Timoshenko beams with free edges by using the discrete singular convolution. Advances in Engineering Software, 42(10): 797-806.
[19] Shokrollahi, M. and Zayeri Baghlani Nejad, A. (2014). Numerical Analysis of Free Longitudinal Vibration of Nonuniform Rods: Discrete Singular Convolution Approach. Journal of Engineering Mechanics (ASCE), 140(8): 06014007.
[20] Kara, M. and Seçgin, A. (2019). Discrete singular convolution method for one-dimensional vibration and acoustics problems with impedance boundaries. Journal of Sound and Vibration, 446(1): 22-36.
[21] Wei, G. (2000). Solving quantum eigenvalue problems by discrete singular convolution. Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics, 33(3): 343-352.
[22] Wei, G. (2001). Vibration analysis by discrete singular convolution. Journal of Sound and Vibration, 244(3): 535-553.
[23] Zhao, Y., Wei, G. and Xiang, Y. (2002). Discrete singular convolution for the prediction of high frequency vibration of plates. International Journal of Solids and Structures, 39(1): 65-88.
[24] Bozdogan, K. (2012). Differential quadrature method for free vibration analysis of coupled shear walls. Structural Engineering and Mechanics, 41(1): 67-81.
[25] Takabatake, H. (2010). Two-dimensional rod theory for approximate analysis of building structures. Earthquakes and Structures, 1(1): 1-19.
[26] Potzta, G. and Kollár, L. (2003). Analysis of building structures by replacement sandwich beams. International Journal of Solids and Structures, 40(3): 535-553.
[27] Aksogan, O., Bikce, M., Emsen, E. and Arslan, H. (2007). A simplified dynamic analysis of multi-bay stiffened coupled shear walls. Advances in Engineering Software, 38(8-9): 552-560.